PLOŠNÝ A KŘIVKOVÝ INTEGRÁL: ZATÍM BEZ DIFERENCIÁLNÍCH FOREM

Kapitola z projektu "Průvodce plošným a křivkovým integrálem"

JAN MALÝ[1] A VLADIMÍR SOUČEK

1. Křivkový a plošný integrál prvého druhu

1.1. **k-rozměrná plocha.** k-rozměrná plocha bude pro nás spojitě diferencovatelné zobrazení $\psi : G \to \mathbb{R}^d$, kde $G \subset \mathbb{R}^k$ je otevřená množina. Symbolem $\langle\psi\rangle$ značíme množinu $\psi(G)$, tzv. *obraz* plochy ψ.

1.2. **Nulové množiny.** Řekneme, že množina $N \subset \mathbb{R}^d$ je k-nulová, jestliže pro každé $\mathcal{C}^1$-zobrazení φ prostoru $\mathbb{R}^d$ do $\mathbb{R}^k$ má obraz $\varphi(N)$ nulovou k-rozměrnou Lebesgueovu míru.

1.3. **Jakobián prvého druhu.** Je-li $\psi : G \to \mathbb{R}^d$ k-rozměrná plocha, definujeme *jakobián prvého druhu* zobrazení ψ v bodě $t \in G$ jako odmocninu z Grammova determinantu, tedy $J_\psi(t) \geq 0$ a

$$(J_\psi(t))^2 := \det\left(\frac{\partial\psi}{\partial t_i}(t) \cdot \frac{\partial\psi}{\partial t_j}(t)\right)_{i,j=1}^{k}.$$

Budeme důrazně tozlišovat mezi symboly $J\psi$ (jakobián, může být záporný) a J_ψ (jakobián prvého druhu, vždy nezáporný). Pro případ $d = k$, tedy zobrazení $\psi : G \to \mathbb{R}^k$, máme $J_\psi = |J\psi|$.

1.4. **S_k-měřitelné množiny.** k-rozměrnou míru podmnožin $\mathbb{R}^d$ budeme počítat pomocí "věty o substituci", podobně jako nám vhodná záměna proměnných často usnadní výpočet objemové míry množin v $\mathbb{R}^d$. Množiny, kterým budeme umět přiřadit k-rozměrnou míru budou až na k-nulové množiny části obrazů k-rozměrných ploch.

Řekněme, že množina $M \subset \mathbb{R}^d$ je *S_k-měřitelná*, jestliže pro každou prostou regulární k-rozměrnou plochu ψ je $\psi^{-1}(M)$ Lebesgueovsky měřitelná množina. Systém všech S_k-měřitelných množin zřejmě tvoří σ-algebru, kterou budeme značit $\mathcal{S}_k$. Plochu ψ budeme nazývat *přípustnou parametrizací pro výpočet* $S_k(M)$, jestliže ψ je prostá a regulární a mnaožina $M \setminus \langle\psi\rangle$ je k-nulová. Řekneme, že $M \subset \mathbb{R}^d$ je *k-rozměrný útvar*, jestliže existuje přípustná parametrizace pro výpočet $S_k(M)$. Jestliže ψ je přípustná parametrizace pro výpočet $S_k(M)$, definujeme

$$S_k(M, \psi) := \int_{\psi^{-1}(M)} J_\psi(t)\, dt.$$

1.5. **Věta.** *Nechť ψ a $\tilde{\psi}$ jsou přípustné parametrizace k-rozměrného útvaru M. Potom*

$$S_k(M, \psi) := S_k(M, \tilde{\psi})$$

Důkaz. Důkaz odložíme do podkapitoly 7 □

1.6. **k-rozměrná míra.** Pro každou S_k-měřitelnou množinu M definujeme

$$S_k(M) = \begin{cases} S_k(M,\psi), & \text{je-li } M \text{ } k\text{-rozměrný útvar a } \psi \text{ přípustná parametrizace}, \\ \infty, & \text{jestliže } M \text{ není } k\text{-rozměrný útvar.} \end{cases} \tag{1}$$

Korektnost této definice je zřejmá z předchozí věty. Poznamenejme, že $S_k(M)$ může být nekonečno, i když M je k-rozměrný útvar.

1.7. **Věta.** *$\mathcal{S}_k$ je σ-algebra obsahující všechny borelovské množiny a S_k je míra.*

Důkaz. Důkaz odložíme do podkapitoly 7 □

1.8. **Integrál prvého druhu.** *Křivkový* ($k = 1$) a *plošný* (k obecné) integrál prvého druhu definujeme jako integrál podle k-rozměrné míry. Křivkový integrál bude pro nás speciálním případem plošného integrálu. Pokud mluvíme o dimenzi jedna, dáváme přednost termínu "křivkový". Integrál prvého druhu tedy budeme počítat podle substitučního vzorce

$$\int_M u(x)\, dS_k = \int_{\psi^{-1}(M)} u(\psi(t))\, J_\psi(t)\, dt,$$

kde ψ je přípustná parametrizace pro výpočet $S_k(M)$. V případě křivky ($k = 1$) značíme $ds = dS_1$, pro plochu kodimenze 1 zavádíme $dS = dS_{d-1}$.

[1] "zodpovědný" za tuto kapitolu

2. Křivkový a plošný integrál druhého druhu

2.1. **Řetězce.** V dalším se nám bude hodit "řetězení" k-rozměrných ploch do trochu složitějších objektů. *Řetězce* definujeme jako formální celočíselné lineární kombinace k-rozměrných ploch, tedy výrazy tvaru

$$\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m], \tag{2}$$

kde I je konečná indexová množina, p_m jsou celočíselné koeficienty a ψ_m jsou k-rozměrné plochy v $\mathbb{R}^d$. Řetězce

$$\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m], \qquad \tilde{\Psi} = \sum_{m\in \tilde{I}} \tilde{p}_m[\tilde{\psi}_m]$$

pokládáme za stejné, pokud pro každou k-rozměrnou plochu ψ je

$$\sum_{\{m:\psi_m=\psi\}} p_m = \sum_{\{m:\tilde{\psi}_m=\psi\}} \tilde{p}_m.$$

Symbol $[\psi]$ značí "elementární" řetězec z jedné plochy s koeficientem 1. Hlavní rozdíl mezi ψ a $[\psi]$ je v tom, že ψ chápeme jako zobrazení, a proto bychom například 2ψ mohli vykládat jako zobrazení $t \mapsto 2\psi(t)$. Oproti tomu $2[\psi]$ si představujeme jako plochu ψ "zparametrizovanou dvakrát".

Je-li Ψ řetězec ve tvaru (2), značíme

$$\langle\Psi\rangle = \bigcup_{m\in I} \langle\psi\rangle_m.$$

Řekneme, že řetězec Ψ ve tvaru (2) je

- *regulární*, jestliže ψ_m jsou regulární,
- *prostý*, jestliže všechny ψ_m jsou prosté, všechny koeficienty jsou ± 1 a obrazy $\langle\psi\rangle_m$ jsou navzájem disjunktní.
- *homeomorfní*, jestliže všechny ψ_m jsou homeomorfní, všechny koeficienty jsou ± 1 a že pro $m \neq l$ je
$$\langle\psi_m\rangle \cap \overline{\langle\psi_l\rangle} = \emptyset.$$

2.2. **Jakobián druhého druhu.** Nechť $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$ je uspořádaná k-tice indexů (tzv. multiindex). Potom zavádíme zobrazení ("projekci") $\Pi_\alpha : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$ předpisem

$$\Pi_\alpha(x) = (x_{\alpha_1},\dots,x_{\alpha_k}).$$

Multiindexu α odpovídá *jakobián druhého druhu*

$$J_\alpha\psi := J\left(\Pi_\alpha\circ\psi\right) := \frac{\partial(\psi^{\alpha_1},\dots,\psi^{\alpha_k})}{\partial(t_1,\dots,t_k)}.$$

2.3. **Integrál druhého druhu.** Nyní zavedeme *křivkový* ($k=1$) a *plošný* (k obecné) integrál druhého druhu. Ačkoli tento integrál také do jisté míry "nezávisí na parametrizaci", situace je zde složitější a korektnější představa je, že integrujeme přes plochu danou parametrizací a nikoli jen přes její obraz. Tomu bude odpovídat i značení, kde plocha (obecněji řetězec) se vyskytne v indexu u integrálu. Nechť $\psi : G \to \mathbb{R}^d$ je k-rozměrná plocha v $\mathbb{R}^d$ a u je funkce na $\langle\psi\rangle$. Nechť $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$ je multiindex. Definujeme

$$\int_\psi u\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k} := \int_G u(\psi(t))\,J_\alpha\psi(t)\,dt \tag{3}$$

(pokud má výraz na pravé straně smysl). Symboly $\wedge$ se používají k posílení vědomí, že hodnota integrálu závisí na pořadí diferenciálů (na rozdíl od obyčejných dvojných a množných integrálů). Pokud čtenáře toto vysvětlení (právem) neuspokojuje, nalezne klid v kapitole o multilineární algebře.

Je-li $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ řetězec, definujeme

$$\int_\Psi u\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k} := \sum_{m\in I} p_m \int_{\psi_m} u\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k}$$

2.4. **Vztah mezi integrálem prvého a druhého druhu.** Porovnáme-li integrál druhého a prvého druhu, zjistíme, že se liší především použitým jakobiánem. Poměr jakobiánu druhého a prvého druhu je důležitý invariant, pro nějž teď zavedeme symbol. Předpokládejme, že $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární řetězec, $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$ je multiindex, $m \in I$ a $x = \psi_m(t)$. Pak definujeme

$$\xi_\alpha(x,\Psi) = p_m \frac{J_\alpha\psi(t)}{J_\psi(t)}. \tag{4}$$

Hodnotu ξ_α raději přiřazujeme bodu x než jeho vzoru, neboť tento funkce ξ_α je krokem na cestě odprostit se od závislosti na parametrizaci. Vztah mezi integrálem prvého a druhého druhu pak můžeme vyjádřit následujícím důležitým vzorcem (věta 2.5), který je bezprostředním důsledkem definic. Věta 2.6 nám pak ukáže názorný význam integrálu druhého druhu. Její důkaz odložíme ke konci podkapitoly.

2.5. **Věta.** *Předpokládejme, že $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární řetězec, $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$ je multiindex a $u : \langle\Psi\rangle \to \mathbb{R}$ je S_k-měřitelná funkce. Potom*

$$\int_\Psi u(x)\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k} = \int_{\langle\Psi\rangle} u(x)\,\xi_\alpha(x,\Psi)\,dS_k(x).$$

2.6. **Věta.** *Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární k-rozměrný řetězec a u je funkce na $\langle\Psi\rangle$. Nechť $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$ je multiindex. Potom*

$$\int_\Psi u(x)\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k} = \int_{\mathbb{R}^k}\Bigg(\sum_{\{x:\,\Pi_\alpha(x)=y\}} u(x)\ \operatorname{sgn}\xi_\alpha(x,\Psi)\Bigg)\,dy_1\dots dy_k, \tag{5}$$

pokud integrál nalevo konverguje.

2.7. **Poznámka.** Zobrazení Π_α je vlastně substituce $y_1 = x_{\alpha_1},\dots,y_k = x_{\alpha_k}$, pak formálně vychází $dy_i = dx_{\alpha_i}$, $i = 1,\dots,k$, což motivuje způsob značení tohoto druhu integrálu.

2.8. **Nezávislost integrálu na parametrizaci.** Z věty 2.6 můžeme učinit závěr o nezávislosti integrálu druhého druhu na parametrizaci. Předpokládejme, že $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ a $\tilde\Psi = \sum_{m\in\tilde I}\tilde p_m[\tilde\psi_m]$ jsou prosté regulární řetězce, které parametrizují stejnou množinu, tj. $\langle\tilde\Psi\rangle = \langle\Psi\rangle$. Abychom mohli učinit závěr, že

$$\int_\Psi u\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k} = \int_{\tilde\Psi} u\,dx_{\alpha_1}\wedge\cdots\wedge dx_{\alpha_k},$$

stačí ověřit, že v každém bodě $x \in \langle\Psi\rangle$ je $\operatorname{sgn}\xi_\alpha(x,\Psi) = \operatorname{sgn}\xi_\alpha(x,\tilde\Psi)$. To je požadavek na stejnou tzv. orientaci řetězců Ψ a $\tilde\Psi$, tomuto tématu se budeme více věnovat později.

Důkaz věty 2.6. Zřejmě stačí provést důkaz pro jednu plochu $\psi : G \to \mathbb{R}^d$. Dokážeme obecnější vzorec

$$\int_E u(\psi(t))\,J_\alpha\psi(t)\,dt = \int_{\mathbb{R}^k} v(y,E)\,dy, \qquad v(y,E) := \sum_{\{t\in E:\,\Pi_\alpha(\psi(t))=y\}} u(\psi(t))\ \operatorname{sgn} J_\alpha\psi(t) \tag{6}$$

pro každou měřitelnou množinu $E \subset G$, pro níž integrál nalevo konverguje. Označme

$$\begin{aligned} G^+ &= \{t\in G : J_\alpha\psi(t) > 0\},\\ G^- &= \{t\in G : J_\alpha\psi(t) < 0\},\\ Z &= \{t\in G : J_\alpha\psi(t) = 0\}.\end{aligned}$$

Vzorec (6) zřejmě platí pro $E \subset Z$, Nechť $E \subset G^+$ je měřitelná množina a $t \in E$. Aplikujeme větu o inverzním zobrazení na $\Pi_\alpha\circ\psi$. Podle ní existuje racionální okolí U bodu t tak, že $\Pi_\alpha\circ\psi$ na U je difeomorfismus. Pro každé $t \in E\cap U$ je zřejmě zřejmě $v(\Pi_\alpha(\psi(t)),E) = u(\psi(t))$. Tedy pokud je množina E podmnožinou U, dostáváme (6) z obyčejné věty o substituci. Všechna použitá racionální okolí srovnáme do posloupnosti $\{U_m\}_m$. Obecnou měřitelnou množinu $E \subset G^+$ pak můžeme napsat ve tvaru

$$E = \bigcup_m E_m, \quad E_1 = E\cap U_1,\ E_2 = E\cap U_2\setminus U_1,\ E_3 = E\cap U_3\setminus(U_1\cup U_2),\dots.$$

kde množiny E_m jsou po dvou disjunktní a pro každou z nich už (6) platí. Sečtením přes j dostaneme (6) pro E. Podobně bychom dostali (6) pro $E \subset G^-$. Pro obecnou měřitelnou množinu $E \subset G$ obdržíme (6) rozkladem $E = (E\cap G^+)\cup(E\cap G^-)\cup(E\cap Z)$. Tím je dokázán vzorec (6), z něhož plyne dokazovaná věta volbou $E = G$. □

3. Klasický křivkový integrál

3.1. **Křivkový integrál prvého druhu.** Jednorozměrné plochy se nazývají *křivky*. Jakobián J_ψ se v jednorozměrném případě redukuje na $|\psi'|$, máme

$$\int_\psi f\,ds = \int_G f(\psi(t))\,|\psi'(t)|\,dt.$$

3.2. **Křivkový integrál druhého druhu.** Nechť $\psi : G \to \mathbb{R}^d$ je křivka a $\vec{f}:\ \langle\psi\rangle \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. Definujeme

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\psi \vec{f}(x)\cdot d\vec{s}(x) := \int_G \vec{f}(\psi(t))\cdot\psi'(t)\,dt \tag{7}$$

(pokud má výraz na pravé straně smysl). Definici lze snadno přepsat ve tvaru

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\psi f_1\,dx_1 + \cdots + f_n\,dx_n. \tag{8}$$

Definici (7) zobecníme na řetězce. Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je jednorozměrný řetězec, a $\vec{f}:\ \langle\Psi\rangle \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. Pak definujeme

$$\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{s} = \sum_{m\in I} p_m \int_{\psi_m} \vec{f}\cdot d\vec{s}.$$

Vzorec (8) platí analogicky i pro řetězce.

3.3. **Tečný vektor.** Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární jednorozměrný řetězec. *Tečný vektor* $\vec{\tau}(x) = (\tau_1(x),\dots,\tau_n(x))$ k Ψ v bodě $x = \psi_m(t)$ definujeme předpisem

$$\vec{\tau}(x) = \vec{\tau}(x,\Psi) := p_m\frac{\psi_m'(t)}{|\psi_m(t)|} \tag{9}$$

Zřejmě $\vec{\tau}(x)$ je jednotkový vektor.

3.4. **Orientace a nezávislost integrálu na parametrizaci.** Předpokládejme, že $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je homeomorfní regulární jednorozměrný řetězec. Podle 2.8 je veškerá informace o Ψ potřebná k určení integrálů druhého druhu tvaru $\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{s}$ (za výše uvedených předpokladů) je skryta v množině $\langle\Psi\rangle$ a ve vektorovém poli $\vec{\tau}$. Toto je spojité a může nabývat pro alternativní parametrizaci $\tilde{\Psi}$ množiny $\langle\Psi\rangle$ v bodě x pouze hodnot $\vec{\tau}(x,\Psi)$ a $-\vec{\tau}(x,\Psi)$. Odtud lze odvodit, že pokud množina $\langle\Psi\rangle$ je souvislá, mohou globálně nastat jen dvě možnosti: $\vec{\tau}(x,\tilde{\Psi}) \equiv \vec{\tau}(x,\Psi)$ nebo $\vec{\tau}(x,\tilde{\Psi}) \equiv -\vec{\tau}(x,\Psi)$. Předpoklad homeomorfnosti ovšem dává, že množina $\langle\Psi\rangle$ je souvislá, právě když Ψ je jednotlivá křivka $\Psi = [\psi]$ nebo $\Psi = -[\psi]$, $\psi : G \to \mathbb{R}^n$, a množina G je interval.

3.5. **Vztah mezi integrálem druhého a prvého druhu.** *Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární jednorozměrný řetězec, $\vec{\tau} = \vec{\tau}(\cdot,\Psi)$ a $\vec{f} : \langle\Psi\rangle \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole. Potom*

$$\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_{\langle\Psi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{\tau}\,ds,$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Tvrzení je speciální případ věty 2.5. □

3.6. **Věta o potenciálu.** *Nechť $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}^d$ je křivka a $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina obsahující $\langle\varphi\rangle$. Nechť $u : \overline{U} \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, spojitě diferencovatelná uvnitř U. Nechť φ má vlastní limity*

$$\varphi(a+) = \lim_{t\to a+}\varphi(t), \qquad \varphi(b-) = \lim_{t\to b-}\varphi(t).$$

Potom

$$u(\varphi(b-)) - u(\varphi(a+)) = \int_\varphi \nabla u\cdot d\vec{s} \tag{10}$$

platí, pokud integrál vpravo konverguje.

Důkaz. Podle Newton-Leibnizovy formule je

$$u(\varphi(b-)) - u(\varphi(a+)) = \int_a^b (u\circ\varphi)'(t)\,dt = \int_a^b \nabla u(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = \int_\varphi \nabla u\cdot d\vec{s}.$$

□

4. Klasický plošný integrál

4.1. **Vektorový Jakobián.** Nechť $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ je otevřená množina. *Vektorový jakobián* diferencovatelného zobrazení $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ definujeme předpisem

$$\vec{J}\,\psi(t) = \frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t)\times\cdots\times\frac{\partial\psi}{\partial t_{n-1}}(t).$$

Označme $\neg i$ $(n-1)$-tici indexů komplementární k (i), tedy $\neg i = (1,\dots,i-1,i+1,\dots,n)$. Snadno nahlédneme, že

$$\vec{J}\,\psi(t) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} J_{\neg i}\psi\,\vec{e}_i.$$

4.2. **Lemma.** *Je-li $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelná zobrazení a $t \in G$, pak*

$$|\vec{J}\,\psi(t)| = J_\psi(t).$$

Důkaz. Důkaz vyplyne později z obecnější Cauchy-Binetovy formule. □

4.3. **Plošný integrál druhého druhu.** Nechť $\psi : G \to \mathbb{R}^d$ je $(n-1)$-rozměrná plocha v $\mathbb{R}^d$ a $\vec{f} : \langle\psi\rangle \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. Definujeme

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_\psi \vec{f}(x)\cdot d\vec{S}(x) := \int_G \vec{f}(\psi(t))\cdot\vec{J}\psi(t)\,dt \tag{11}$$

(pokud má výraz na pravé straně smysl). Definici lze snadno přepsat ve tvaru

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_G \det\Big(\vec{f}\circ\psi,\ \frac{\partial\psi}{\partial t_1},\dots,\frac{\partial\psi}{\partial t_{n-1}}\Big)\,dt \tag{12}$$

nebo

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_\psi f_1\,dx_2\wedge\cdots\wedge dx_n - f_2\,dx_1\wedge dx_3\wedge\cdots\wedge dx_n + \cdots + (-1)^{n-1} f_n\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{n-1}. \tag{13}$$

Tedy

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_\psi f_1\,dx_2\wedge dx_3 - f_2\,dx_1\wedge dx_3 + f_2\,dx_1\wedge dx_2, \qquad n=3,$$

a

$$\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_\psi f_1\,dx_2 - f_2\,dx_1, \qquad n=2.$$

Všimněte si, že v dimenzi 2, kdy křivka ψ má současně dimenzi a kodimenzi 1, je podstatný rozdíl mezi $\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{S}$ a $\int_\psi \vec{f}\cdot d\vec{s}$.

Definici (11) zobecníme na řetězce. Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je $(n-1)$-rozměrný řetězec, a $\vec{f} : \langle\Psi\rangle \to \mathbb{R}^n$ je vektorová funkce. Pak definujeme

$$\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \sum_{m\in I} p_m \int_{\psi_m} \vec{f}\cdot d\vec{S}.$$

Vzorec (13) platí analogicky i pro řetězce.

4.4. **Normála.** Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární $(n-1)$-rozměrný řetězec. *Normálu* $\vec{\nu}(x) = (\nu_1(x),\dots,\nu_n(x))$ k Ψ v bodě $x = \psi_m(t)$ definujeme předpisem

$$\vec{\nu}(x) = \vec{\nu}(x,\Psi) := p_m \frac{\vec{J}\,\psi_m(t)}{J_{\psi_m}(t)} \tag{14}$$

Z rovnosti $J_{\psi_m}(t) = |\vec{J}\psi_m(t)|$ (lemma 4.2) vidíme, že $\vec{\nu}(x)$ je jednotkový vektor. Porovnáním s (4) okamžitě dostáváme

$$\nu_i(x,\Psi) = (-1)^{n-1}\xi_{\neg i}(x.\Psi), \qquad i=1,\dots,n. \tag{15}$$

4.5. **Orientace podle normály a nezávislost integrálu na parametrizaci.** Předpokládejme, že $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je homeomorfní regulární $(n-1)$-rozměrný řetězec. Jelikož (15) dává přímý vztah mezi souřadnicemi normály a koeficienty $\xi_{\neg i}$, podle 2.8 je veškerá informace o Ψ potřebná k určení integrálů druhého druhu tvaru $\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{S}$ (za výše uvedených předpokladů) je skryta v množině $\langle\Psi\rangle$ a ve vektorovém poli $\vec{\nu}$. Toto je spojité a může nabývat pro alternativní parametrizaci $\tilde{\Psi}$ množiny $\langle\Psi\rangle$ v bodě x pouze hodnot $\vec{\nu}(x,\Psi)$ a $-\vec{\nu}(x,\Psi)$. Odtud lze odvodit, že pokud množina $\langle\Psi\rangle$ je souvislá, mohou globálně nastat jen dvě možnosti: $\vec{\nu}(x,\tilde{\Psi}) \equiv \vec{\nu}(x,\Psi)$ nebo $\vec{\nu}(x,\tilde{\Psi}) \equiv -\vec{\nu}(x,\Psi)$. Předpoklad homeomorfnosti ovšem dává, že množina $\langle\Psi\rangle$ je souvislá, právě když Ψ je jednotlivá plocha $\Psi = [\psi]$ nebo $\Psi = -[\psi]$, $\psi : G \to \mathbb{R}^n$, a množina G je souvislá.

4.6. **Vztah mezi integrálem druhého a prvého druhu.** *Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární $(n-1)$-rozměrný řetězec, $\vec{\nu} = \vec{\nu}(\cdot,\Psi)$ a $\vec{f} : \langle\Psi\rangle \to \mathbb{R}^n$ je vektorové pole. Potom*

$$\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_{\langle\Psi\rangle} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, dS,$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Tvrzení je speciální případ věty 2.5. □

5. Věta o divergenci a její důsledky

5.1. **Směřování vektoru.** Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je množina, $x \in \partial\Omega$ a $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ je vektor. Řekneme, že $\vec{u}$ *směřuje ven z* Ω v bodě x, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že

$$x + \zeta\vec{u} \notin \overline{\Omega}, \quad x - \zeta\vec{u} \in \Omega \quad \forall\zeta \in (0,\delta). \tag{16}$$

5.2. **Věta o divergenci.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená otevřená množina. Nechť $\Psi = \sum_{m\in I} p_m[\psi_m]$ je prostý regulární $(n-1)$-rozměrný řetězec. Nechť $\partial\Omega = \langle\Psi\rangle \cup N$, kde N je uzavřená $(n-1)$-nulová množina. Nechť v každém bodě $x \in \langle\Psi\rangle$ směřuje normála $\vec{\nu}(x,\Psi)$ ven z Ω. Nechť $\vec{f} = (f_1,\dots,f_n) : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ je spojité zobrazení ("vektorové pole"), spojitě diferencovatelné uvnitř Ω. Potom vzorec*

$$\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{S} = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\, dx \tag{17}$$

platí, pokud integrály na obou stranách konvergují.

Důkaz. Důkaz uvedeme později. □

5.3. **Poznámky.** Existence řetězce, který ohraničuje množinu Ω tak jak to požadují předpoklady věty, je možná pouze pro množiny, jejichž hranice není "příliš divoká". Pro ostatní množiny je nutné použít profesionálnější verze věty, a jsou i takové, na něž nelze úspěšně aplikovat žádnou ze známých verzí věty o divergenci. Pokud už existuje řetězec Ψ splňující naše předpoklady, pak $\partial\Omega$ je $(n-1)$-rozměrný útvar, normála $\vec{\nu} = \vec{\nu}(\cdot,\Psi)$ je už jednoznačně určená požadavkem vnějšího směřování a vzorec lze zformulovat ve tvaru, který se neodvolává na konkrétní parametrizaci, totiž

$$\int_{\partial\Omega} \vec{f}\cdot\vec{\nu}\, dS = \int_\Omega \operatorname{div}\vec{f}\, dx. \tag{18}$$

Předpoklad o směřování normály má hlavní účel vyloučit nevhodně orientované parametrizace hranice. Možná je zajímavé si všimnout, že tento předpoklad také hlídá, aby Ω neměla velkou (ve smyslu $(n-1)$-nenulovosti) část hranice "obklopenou množinou Ω z obou stran". Např. je-li Ω sjednocení dvou přilehlých otevřených polokoulí, "rozhraní" mezi nimi je takovou špatnou částí hranice.

5.4. **Greenova věta.** *Nechť Ω a Ψ splňují předpoklady věty o divergenci pro dimenzi $n = 2$. Nechť $\vec{f} : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ je spojité vektorové pole, spojitě diferencovatelné na Ω. Potom*

$$\int_\Psi \vec{f}\cdot d\vec{s} = \int_\Omega \operatorname{curl}\vec{f}\, dx, \tag{19}$$

pokud integrály na obou stranách konvergují.

Důkaz. Označme

$$\vec{g} = f_2\vec{e}_1 - f_1\vec{e}_2.$$

Snadno ověříme

$$\det\Big(\vec{g},\psi'\Big) = \vec{g}\cdot\psi'$$

a

$$\operatorname{div} g = \operatorname{curl} f,$$

takže (19) dostaneme aplikováním věty o divergenci na $\vec{g}$. □

5.5. **Speciální Stokesova věta.** *Nechť Ω a Ψ splňují předpoklady věty o divergenci pro dimenzi $n = 2$ a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ dvakrát spojitě diferencovatelná plocha. Nechť existuje $\mathcal{C}^1$ rozšíření $\bar{\varphi}$ zobrazení φ na okolí množiny $\Omega \cup \langle\Psi\rangle$. Nechť $U \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená množina obsahující $\varphi(\Omega)$ a $\vec{f} : \overline{U} \to \mathbb{R}^3$ je spojité vektorové pole, spojitě diferencovatelné na U. Potom*

$$\int_{\bar{\varphi}\circ\Psi} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\varphi} \vec{\operatorname{curl}} \vec{f} \cdot d\vec{S},$$

pokud integrály na obou stranách konvergují.

Důkaz. Máme

$$\int_{\bar{\varphi}\circ\Psi} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\Psi} \Big(\vec{f} \circ \bar{\varphi} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_1}\, \vec{e}_1 + \vec{f} \circ \bar{\varphi} \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x_2}\, \vec{e}_2 \Big) \cdot d\vec{s};$$

skalární součiny nalevo a uvnitř závorky jsou vzhledem k $\mathbb{R}^3$, zatímco skalární součin vně závorky je vzhledem k $\mathbb{R}^2$. Všimněme si také, že diferenciály na levé a pravé straně mají různý význam, protože integrujeme přes různé křivky. Aplikujeme-li na integrál vpravo Greenovu větu, dostaneme

$$\int_{\bar{\varphi}\circ\Psi} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial}{\partial x_1} \Big(\vec{f} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big) - \frac{\partial}{\partial x_2} \Big(\vec{f} \circ \varphi \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big) \Big)\, dx.$$

Provedeme-li derivování, členy s druhými derivacemi φ vypadnou podle věty o záměně smíšených derivací a zbude nám

$$\int_{\bar{\varphi}\circ\Psi} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_{\Omega} \Big(\frac{\partial(\vec{f} \circ \varphi)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} - \frac{\partial(\vec{f} \circ \varphi)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \Big)\, dx. \tag{20}$$

Na druhou stranu,

$$\int_{\varphi} \vec{\operatorname{curl}} \vec{f} \cdot d\vec{S} = \int_{\Omega} \det\Big(\vec{\operatorname{curl}} \vec{f}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \Big)\, dx. \tag{21}$$

Porovnáme-li integrandy na pravých stranách (20) a (21), po rutinním roznásobení zjistíme, že jsou stejné. □

5.6. **Obecnější Stokesova věta.** Nyní můžeme vyslovit obecnou větu, která zahrnuje větu o potenciálu, větu o divergenci, Greenovu větu i speciální Stokesovu větu jako zvláštní případ.

Nechť Ω a Ψ splňují předpoklady věty o divergenci a $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ dvakrát spojitě diferencovatelná plocha. Nechť existuje $\mathcal{C}^1$ rozšíření $\bar{\varphi}$ zobrazení φ na okolí množiny $\Omega \cup \langle\Psi\rangle$. Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina obsahující $\varphi(\Omega)$ a $u : \overline{U} \to \mathbb{R}^d$ je spojitá funkce, spojitě diferencovatelná na U. Nechť $\alpha \in \{1, \dots, d\}^k$ je multiindex. Potom

$$\int_{\bar{\varphi}\circ\Psi} f\, dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_{n-1}} = \int_{\varphi} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i \wedge dx_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dx_{\alpha_k},$$

pokud integrály na obou stranách konvergují.

Důkaz této věty je založen na stejných myšlenkách, jako důkaz věty (5.5): opírá se o větu o divergenci, záměnu smíšených derivací, a pak je důležité mít systematický přehled o členech, které se po rozderivování a roznásobení obou stran vyskytují. Poslední úkol nám značně usnadní kalkulus multilineární algebry a na něm postavená teorie diferenciálních forem. Proto podrobnější rozbor a důkaz této věty odložíme do dalších kapitol.

6. Cauchyova-Binetova formule

6.1. **Cauchyova-Binetova formule.** *Jestliže $A, B : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^d$, jsou lineární zobrazení, pak*

$$\det(B^T A) = \sum_{\alpha \in I(d,k)} \det(B^T \Pi_\alpha^T \Pi_\alpha A) = \sum_{\alpha \in I(d,k)} \det(B^T \Pi_\alpha^T)\, \det(\Pi_\alpha A). \tag{22}$$

(Pro $B = A$ jde vlastně o zobecnění Pythagorovy věty).

Důkaz. Pravá rovnost je jen věta o násobení determinantů, jde nám o levou rovnost. Uvažujme $2k$-lineární formy

$$\Phi(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k)=\sum_{\alpha\in I(d,k)}\det(\Pi_\alpha v_i\cdot\Pi_\alpha w_j)_{i,j=1}^k\,, \tag{23}$$

$$\Psi(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k)=\det\Big(\vec{v}_i\cdot\vec{w}_j\Big)_{i,j=1}^k\,. \tag{24}$$

Za malou chvíli ověříme, že Φ a Ψ dávají stejný výsledek, když $\vec{v}_i$ a $\vec{w}_i$ vybíráme z bázových vektorů, tudíž z multilinearity plyne, že se musí shodovat. Výsledek aplikujeme na vektory $\vec{v}_i=A(\vec{e}_i)$, $\vec{w}_i=B(\vec{e}_i)$, $i=1,\dots,k$.

Nechť tedy $\vec{v}_i$ a $\vec{w}_i$ jsou některé z bázových vektorů. Pokud $\vec{v}_{i_1}=\vec{v}_{i_2}$, kde $i_1,i_2\in\{1,\dots,n\}$ jsou různé, potom v matici

$$\Big(\vec{v}_i\cdot\vec{w}_j\Big)_{i,j=1}^k$$

se shodují řádky s indexy i_1 a i_2, tedy determinant je roven nule. Ze stejného důvodu jsou rovny nule i všechny determinanty v Φ. Můžeme tedy předpokládat, že $\vec{v}_i$ jsou navzájem různé, tedy existuje $\beta\in I(d,k)$ tak, že až na pořadí jsou $\vec{v}_i$ právě $\vec{e}_{\beta_1},\dots,\vec{e}_{\beta_k}$. Nyní uvažujme případ, že mezi vektory $\vec{w}_j$ není zastoupen vektor $\vec{v}_p$, $p\in\{1,\dots,k\}$. Potom Φ i Ψ dávají nulu, neboť v maticích

$$\Big(\vec{v}_i\cdot\vec{w}_j\Big)_{i,j=1}^k,\qquad\Big(\Pi_\alpha\vec{v}_i\cdot\Pi_\alpha\vec{w}_j\Big)_{i,j=1}^k$$

je p-tý řádek nulový. Zbývá případ, že až na pořadí jsou $\vec{w}_j$ právě $\vec{e}_{\beta_1},\dots,\vec{e}_{\beta_k}$. Potom na pravé straně (23) je nenulový jediný sčítanec, odpovídající multiindexu indexu β. Jelikož

$$\Pi_\beta\vec{v}_i\cdot\Pi_\beta\vec{w}_j=\vec{v}_i\cdot\vec{w}_j,\qquad i,j=1,\dots,k,$$

dávají opět Φ a Ψ stejný výsledek. Tím jsme ověřili, že

$$\Phi(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k)=\Psi(\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_k,\vec{w}_1,\dots,\vec{w}_k)$$

a důkaz je dokonán. □

7. k-rozměrná míra v $\mathbb{R}^n$

7.1. Lemma. *Nechť $\psi:G\to\mathbb{R}^d$, $\tilde\psi:\tilde G\to\mathbb{R}^d$ jsou prosté regulární k-rozměrné plochy a $\alpha\in\{1,\dots,d\}^k$ je multiindex. Potom*

$$N:=\big\{x\in\langle\psi\rangle\cap\langle\tilde\psi\rangle:\ |\xi_\alpha(x,\tilde\psi)|\neq|\xi_\alpha(x,\psi)|\big\}$$

je k-nulová množina.

Důkaz. Nechť $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^k$ je $\mathcal{C}^1$ zobrazení. Označme

$$Z=\{x\in N:\ x=\psi(t),\ J(g\circ\psi)(t)=0\},$$
$$\tilde Z=\{x\in N:\ x=\tilde\psi(t),\ J(g\circ\tilde\psi)(t)=0\},$$

Potom podle Sardovy věty je

$$\lambda_k(g(Z))=\lambda_k(g(\tilde Z))=0. \tag{25}$$

Zvolme $x\in N\setminus(Z\cup\tilde Z)$. Najděme $t\in G$ a $\tilde t\in\tilde G$ tak, že $\tilde\psi(\tilde t)=\psi(t)=x$. Potom podle věty o inverzním zobrazení existují okolí $G'\subset G$ bodu t a $\tilde G'\subset\tilde G$ bodu $\tilde t$ tak, že $g\circ\psi$ je difeomorfismus na G' a $g\circ\tilde\psi$ je difeomorfismus na $\tilde G'$. Nechť h je inverzní zobrazení k restrikci $g\circ\psi$ na G' a $\tilde h$ je inverzní zobrazení k restrikci $g\circ\tilde\psi$ na $\tilde G'$. Označme $y=g(x)$. Potom

$$\tilde\psi\circ\tilde h\ (y)=\psi\circ h\ (y)=x.$$

Předpokládejme, že

$$(\tilde\psi\circ\tilde h)'(y)=(\psi\circ h)'(y). \tag{26}$$

Pro každý multiindex $\beta\in\{1,\dots,d\}^k$ je pak

$$J_\beta(\tilde\psi\circ\tilde h)(y)=J_\beta(\psi\circ h)(y)$$

a podle věty o součinu determinantů odtud dostáváme

$$J_\beta\tilde\psi(\tilde h(y))\ J\tilde h(y)=J_\beta\psi(h(y))\ Jh(y). \tag{27}$$

Rovnost (27) umocníme na druhou, sečteme přes $\beta \in I(d,k)$ a odmocníme. Cauchy-Binetova formule nám dá

$$J_{\tilde{\psi}}(\tilde{h}(y))\,|J\tilde{h}(y)| = J_{\psi}(h(y))\,|Jh(y)|. \tag{28}$$

Nyní podělíme (27) použité na $\beta = \alpha$ rovností (28) a dostaneme

$$|\xi_\alpha(x,\tilde{\psi})| = |\xi_\alpha(x,\psi)|,$$

což je spor s předpokladem $x \in N$. Jelikož předpoklad (26) vede ke sporu, máme

$$(\tilde{\psi}^i \circ \tilde{h})'(y) \neq (\psi^i \circ h)'(y)$$

pro některé $i \in \{1,\dots,d\}$. Podle věty o implicitní funkci existuje okolí V bodu y, na kterém lze množinu

$$\big\{y' \in V:\ \tilde{\psi}^i(\tilde{h}(y')) - (\psi^i(h(y')) = 0\big\}$$

vyjádřit jako graf funkce $(k-1)$-proměnných, tedy lebesgueovsky nulovou množinu. Buď B racionální okolí bodu t obsažené v $h(V)$, potom $\lambda_k(g(N \cap \psi(B))) = 0$. Sjednocením přes všechna taková racionální okolí dostaneme

$$\lambda_k\big(g(N \setminus (Z \cup \tilde{Z}))\big) = 0$$

Připomeneme-li (25), máme $\lambda_k(g(N)) = 0$. Jelikož testovací zobrazení g bylo libovolné, je N k-nulová množina. $\square$

Důkaz věty 1.5. Nechť $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ a $\tilde{\psi} : \tilde{G} \to \mathbb{R}^d$ jsou přípustné parametrizace pro výpočet $S_k(M)$, chceme dokázat

$$\int_{\psi^{-1}(M)} J_\psi(t)\,dt = \int_{\tilde{\psi}^{-1}(M)} J_{\tilde{\psi}}(t)\,dt. \tag{29}$$

Zvolme $t \in M$. Najdeme multiindex $\alpha \in \{1,\dots,d\}^k$ tak, že $J_\alpha(t) \neq 0$. Podle věty o inverzním zobrazení existuje racionální okolí $G' \subset G$ tak, že $\Pi_\alpha \circ \psi$ je difeomorfismus na G'. Dokážeme, že pro každou S_k-měřitelnou množinu $M' \subset M \cap \psi(G')$ je

$$S_k(M',\psi) \le S_k(M',\tilde{\psi}). \tag{30}$$

Označme

$$N := \{x \in M':\ |\xi_\alpha(x,\tilde{\psi})| \neq |\xi_\alpha(x,\psi)|\},$$
$$N' := \langle\psi\rangle \setminus \langle\tilde{\psi}\rangle.$$

Potom

$$\lambda_k(\Pi_\alpha(N)) = 0, \quad \lambda_k(\Pi_\alpha(N')) = 0; \tag{31}$$

totiž N je k-nulová podle lemmatu (7.1) a N' podle definice přípustné parametrizace. Tedy podle vět 2.5 a 2.6 je

$$\begin{aligned}
S_k(M',\psi) &= \int_{M'} \frac{dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_k}}{\xi_\alpha(x,\psi)} = \int_{\Pi_\alpha(M')} \Big(\sum_{x \in M \cap \Pi_\alpha^{-1}(y)} \frac{1}{|\xi_\alpha(x,\psi)|} \Big)\,dy \\
&= \int_{\Pi_\alpha(M') \setminus \Pi_\alpha(N \cup N')} \Big(\sum_{x \in M \cap \Pi_\alpha^{-1}(y)} \frac{1}{|\xi_\alpha(x,\psi)|} \Big)\,dy \\
&= \int_{\Pi_\alpha(M') \setminus \Pi_\alpha(N \cup N')} \Big(\sum_{x \in M \cap \Pi_\alpha^{-1}(y)} \frac{1}{|\xi_\alpha(x,\tilde{\psi})|} \Big)\,dy \\
&\le \int_{M'} \frac{dx_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dx_{\alpha_k}}{\xi_\alpha(x,\tilde{\psi})} \\
&= S_k(M',\tilde{\psi}).
\end{aligned} \tag{32}$$

Srovnejme do posloupnosti $\{G_m\}$ všechna racionální okolí bodů $t \in G$ na nichž je pro některý multiindex α $\Pi_\alpha \circ \psi$ difeomorfismus a použijme trik zdisjunktnění na množiny $M \cap \psi(G_m)$, tedy položme

$$M_1 = M \cap \psi(G_1),\ M_2 = M \cap \psi(G_2 \setminus G_1),\ M_3 = M \cap \psi(G_3 \setminus (G_1 \cap G_2)), \dots.$$

Podle (32) je $S_k(M_m,\psi) \le S_k(M_m,\tilde{\psi})$, tedy sečtením přes m dostáváme

$$S_k(M,\psi) \le S_k(M,\tilde{\psi}).$$

Opačná nerovnost plyne ze symetrie situace. $\square$

7.2. Věta. *Nechť* $\{M_m\}_m$ *je posloupnost* k*-rozměrných útvarů. Potom* $M = \bigcup_m M_m$ *je* k*-rozměrný útvar.*

Důkaz. Ke každému indexu m najdeme přípustnou parametrizaci $\psi_m : G_m \to \mathbb{R}^d$ pro výpočet $S_k(M_m)$. Ke každému bodu $t \in G_m$ najdeme racionální okolí B tak, že $\overline{B} \subset G_m$. Podle věty o substituci - nerovnosti je $\psi_m(\partial B)$ k-nulová množina. Srovnáme-li páry (m, B) do posloupnosti, najdeme posloupnost spojitých zobrazení $\{\varphi_p\}_p$, $\varphi_p : \overline{B}_p \to \mathbb{R}^d\}$, tak, že B_p jsou koule, φ_p jsou prostá a regulární na B_p, $\varphi_p(\partial B_p)$ jsou k-nulové množiny a

$$\bigcup_p \varphi_p(\overline{B}_p) = \bigcup_m \psi_m(G_m).$$

Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že koule B_p jsou po dvou disjunktní, jinak provedeme afinní záměny proměnných, které záležitost napraví. Označme $K_p = \varphi_p(\overline{B}_p)$, $p = 1, 2, \ldots$, víme, že K_p jsou kompaktní množiny. Položme

$$G_1 := B_1, \quad G_2 := B_2 \setminus \varphi_2^{-1}(K_1), \quad G_3 := B_3 \setminus \varphi_3^{-1}(K_1 \cup K_2), \ldots, G := \bigcup_p G_p$$

a definujme

$$\psi(t) := \varphi_p(t), \qquad t \in G_p, \quad p = 1, 2, \ldots.$$

Potom $\psi : G \to \mathbb{R}^d$ je prosté regulární zobrazení a

$$M \setminus \langle\psi\rangle \subset \bigcup_m (M_m \setminus \langle\psi\rangle_m) \cup \bigcup_p \varphi_p(\partial B_p),$$

což je k-nulová množina. Tedy ψ je přípustná parametrizace pro výpočet $S_k(M)$ a M je k-rozměrný útvar. □

Důkaz věty 1.7. Systém $\mathcal{S}_k$ všech S_k-měřitelných množin je zřejmě σ-algebra. Nechť $U \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená množina a ψ je k-rozměrná plocha. Potom $\psi^{-1}(U)$ je otevřená, tedy lebesgueovsky měřitelná množina. Tedy $U \in \mathcal{S}_k$. Jelikož otevřené množiny generují borelovskou σ-algebru, je každá borelovská množina S_k-měřitelná.

Nechť nyní $\{M_m\}_m$ je posloupnost po dvou disjunktních S_k-měřitelných množin a $M = \bigcup_{m=1}^{\infty} M_m$. Chceme dokázat

$$S_k(M) = \sum_{m=1}^{\infty} S_k(M_m). \tag{33}$$

Jestliže některá z množin M_m není k-rozměrný útvar, pak ani jejich sjednocení není k-rozměrný útvar a na obou stranách (33) máme nekonečno. Pokud M_m jsou k-rozměrné útvary, potom podle věty 7.2 též M je k-rozměrný útvar. Nechť ψ je přípustná parametrizace pro výpočet $S_k(M)$. Potom ψ je přípustná parametrizace pro výpočet všech $S_k(M_m)$ a

$$S_k(M) = S_k(M, \psi) = \sum_m S_k(M_m, \psi) = \sum_m S_k(M_m).$$

□

8. Důkaz věty o divergenci

8.1. Lemma. *Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.2. Nechť* $x \in \partial\Omega \setminus N$. *Nechť* $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ *je jednotkový vektor,* $\vec{u} \cdot \vec{\nu}(x) > 0$. *Potom* $\vec{u}$ *směřuje ven z* Ω.

Důkaz. Najděme m a t tak, že $x = \psi_m(t)$. Označme

$$c = \tfrac{1}{2}\, \vec{u} \cdot \vec{\nu}(x).$$

Uvažujme kužel

$$K = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^n : \vec{z} \cdot \vec{\nu}(x) > c\}$$

Funkce $s \mapsto (\psi_m(s) - \psi_m(t)) \cdot \vec{\nu}(x)$ je spojitě diferencovatelná a v $s = t$ má zřejmě nulové parciální derivace, tudíž také nulový totální diferenciál. Odtud je zřejmé, že pro dostatečně malé $\varepsilon > 0$ a hodnoty parametru $s \in B(t, \varepsilon)$ je $\psi_m(s) - \psi_m(t) \notin K$. Z definice homeomorfnosti řetězce dostaneme, že existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $B(x, \delta_1) \cap \langle\Psi\rangle \subset \psi_m(B(t, \varepsilon))$. Jelikož N je uzavřená, najdeme $\delta_2 > 0$ tak, že $B(x, \delta_2) \cap N = \emptyset$. Nechť $0 < \delta < \min(\delta_1, \delta_2)$. Potom $\partial\Omega \cap B(x, \delta) \subset \psi_m(B(t, \varepsilon))$ a tudíž pro $y \in \partial\Omega \cap B(x, \delta)$ máme $y - x \notin K$. Množina

$$K_{x,\delta} := \{y \in B(x, \delta) : \; y - x \in K\}$$

je konvexní a neobsahuje žádný bod $\partial\Omega$, tedy $K_{x,\delta}$ leží celá uvnitř Ω nebo celá vně $\overline{\Omega}$. První možnost můžeme vyloučit, protože pro dostatečně malá $\zeta > 0$ je $x + \zeta\vec{\nu}(x)$ vně $\overline{\Omega}$ (podle předpokladu) i v $K_{x,\delta}$ (to je zřejmé). Tedy pro $0 < \zeta < \delta$ je $x + \zeta\vec{u} \in K_{x,\delta} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. Podobně se ověří druhá polovina (16). $\square$

Důkaz věty 5.2. Vzorec (17) vznikne sečtením přes $i = 1, \dots, n$ rovností

$$(-1)^{n-1} \int_\Psi f_i \, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \dots \wedge dx_n = \int_\Omega \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \, dx. \tag{34}$$

Rovnost (34) dokážeme např. pro $i = 1$. Tato volba nečiní žádnou újmu na obecnosti, ale umožňuje nám použít trochu přehlednější značení. Obecný bod $x \in \mathbb{R}^n$ můžeme vyjádřit ve tvaru $x = (\zeta, y)$, kde $\zeta \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Budeme značit $\Pi = \Pi_{\neg 1}$, tedy

$$\Pi(\zeta, y) = y, \qquad (\zeta, y) \in \mathbb{R}^n.$$

Dále připomeneme značení pro “řez” (v našem případe spíš “průpich”) množiny $M \subset \mathbb{R}^n$

$$M^y = \{\zeta \in \mathbb{R} : \ (\zeta, y) \in M\}.$$

Levou stranu (34) si přepíšeme podle věty 2.6 ve tvaru

$$\begin{aligned} \int_\Psi f_1 \, dx_2 \wedge \dots \wedge dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg(\sum_{\{m,t:\, \Pi(\psi_m(t))=y\}} f_1(\psi_m(t)) \, p_m \operatorname{sgn} J(\Pi \circ \psi_m)(t) \Bigg) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Bigg(\sum_{\langle\Psi\rangle^y} f_1(\zeta, y) \ \operatorname{sgn} \nu_1(\zeta, y) \Bigg) \, dy. \end{aligned} \tag{35}$$

Na pravé straně použijeme konvergenci integrálu k ověření předpokladů Fubiniovy věty, podle níž

$$\int_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big(\int_{\Omega^y} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\zeta, y) \, d\zeta \Big) \, dy. \tag{36}$$

Podle (35) a (36) zbývá tedy pouze ukázat, že pro $(n-1)$-skoro všechna $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ je

$$\sum_{\langle\Psi\rangle^y} f_1(\zeta, y) \ \operatorname{sgn} \nu_1(\zeta, y) = \int_{\Omega^y} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\zeta, y) \, d\zeta. \tag{37}$$

Za tímto účelem “vyhodíme” z $\mathbb{R}^{n-1}$ dvě $(n-1)$-nulové množiny. Množina $\Pi(N)$ je $(n-1)$-nulová podle definice $(n-1)$-nulové množiny. Je-li Z_m množina všech bodů t, pro které $\nu_1(\psi_m(t)) = 0$, potom můžeme přepsat

$$Z_m = \{t \in G : \ J(\Pi \circ \psi_m) = 0\}$$

a podle Sardovy věty je $(\Pi \circ \psi_m)(Z_m)$ množina $(n-1)$-nulová. Zvolme tedy

$$y \notin \Pi(N) \cup \bigcup_m (\Pi \circ \psi_m)(Z_m)$$

a dokazujme (37). Jestliže $x = (\zeta, y) = \psi_m(t)$, pak $\nu_1(x) \neq 0$, protože $y \notin (\Pi \circ \psi_m)(Z_m)$. Předpokládejme nejprve $\vec{\nu}(x) \cdot \vec{e}_1 = \nu_1(x) > 0$. Podle lemmatu 8.1 existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(\zeta + h, y) \notin \overline{\Omega}, \quad (\zeta - h, y) \in \Omega \quad \forall h \in (0, \delta).$$

Jestliže naopak $\nu_1(x) < 0$, použijeme lemma 8.1 na vektor $-\vec{e}_1$. Množina $(\partial\Omega)^y$ je tedy omezená a izolovaná. Dále, nemá žádný hromadný bod, neboť ten by musel ležet v N a to jsme vyloučili volbou x. Je tedy tato množina konečná. Množina Ω^y je otevřená v $\mathbb{R}$ a tudíž k našemu pevnému y majdeme po dvou disjunktní intervaly (a_l, b_l) tak, že

$$\Omega^y = \bigcup_{l \in L} (a_l, b_l). \tag{38}$$

Zde l probíhá nějakou indexovou množinu L, která musí být konečná, protože, jak už jsme řekli, $(\partial\Omega)^y$ je konečná množina. Z výše provedených úvah vyplývá, že

$$\{\zeta \in \langle\Psi\rangle^y : \ \operatorname{sgn} \nu_1(\zeta, y) > 0\} = \{b_l : l \in L\},$$
$$\{\zeta \in \langle\Psi\rangle^y : \ \operatorname{sgn} \nu_1(\zeta, y) < 0\} = \{a_l : l \in L\}.$$

Tedy podle Newton-Leibnizovy formule

$$\begin{aligned}\sum_{\zeta\in\langle\Psi\rangle^y} f_1(\zeta,y)\ \operatorname{sgn}\nu_1(\zeta,y) &= \sum_l \Big(f_1(b_l,y)-f_1(a_l,y)\Big)\\ &= \sum_l \int_{a_l}^{b_l} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\zeta,y)\,d\zeta\\ &= \int_{\Omega^y} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\zeta,y)\,d\zeta.\end{aligned}$$

což dokazuje (37) a tudíž završuje důkaz věty. □

9. Důkaz Stokesovy věty

9.1. **Lemma.** *Nechť $U\subset\mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $g_1,\dots,g_k$ jsou dvakrát spojitě diferencovatelné funkce, $0\le k\le n-1$, a $\vec v_1,\dots,\vec v_{n-k-1}$ jsou konstantní vektory. Potom*

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\det\Big(\vec e_i,\nabla g_1,\dots,\nabla g_k,\vec v_{n-k-1},\dots,\vec v_1\Big)=0.$$

Důkaz. Důkaz provedem indukcí podle k. Pro $k=0$ tvrzení triviálně platí, neboť derivace konstanty je nula. Předpokládejme, že $k\ge 1$ a tvrzení platí pro $k-1$. Rozvojem podle k-tého sloupce dostaneme

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\det\Big(\vec e_i,\nabla g_1,\dots,\nabla g_k,\vec v_{n-k-1},\dots,\vec v_1\Big)\\ &\quad=\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\det\big(\vec e_i,\nabla g_1,\dots,\nabla g_{k-1},\sum_{j=1}^n\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\vec e_j,\vec v_{n-k-1},\dots,\vec v_1\big)\Big)\\ &\quad=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial g_k}{\partial x_j}\ \det\big(\vec e_i,\nabla g_1,\dots,\nabla g_{k-1},\vec e_j,\vec v_{n-k-1},\dots,\vec v_1\big)\Big)\\ &\quad=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i\partial x_j}\ \det\big(\vec e_i,\nabla g_1,\dots,\nabla g_{k-1},\vec e_j,\vec v_{n-k-1},\dots,\vec v_1\big)\Big)\\ &\qquad+\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \frac{\partial g_k}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\det\big(\vec e_i,\nabla g_1,\dots,\nabla g_{k-1},\vec e_j,\vec v_{n-k-1},\dots,\vec v_1\big)\Big).\end{aligned}$$

První ze sum na pravé straně je nulová podle věty o záměnnosti smíšených derivací, totiž zaměníme-li prvý a k-tý sloupec, podle pravidla o záměně sloupců v determinantu změníme znaménko. Při následném přeznačení i na j a naopak ale dostaneme původní sumu beze změny znaménka. Druhá suma na pravé straně je nula podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz proveden. □

Důkaz věty 5.6. Nechť $\psi: G\to\mathbb{R}^n$ je jedna z parametrických ploch ψ_m. Podle definice, Cauchy-Binetovy formule a tvrzení 4.6 je

$$\begin{aligned}&\int_{\varphi\circ\psi} f\,dy_{\alpha_1}\wedge\dots\wedge dy_{\alpha_{n-1}}=\int_G f(\varphi(\psi(t)))\frac{\partial(\varphi^{\alpha_1}\circ\psi,\dots,\varphi^{\alpha_{n-1}}\circ\psi)}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})}(t)\\ &\quad=\int_G f(\varphi(\psi(t)))\sum_{\beta\in I(n,n-1)}\frac{\partial(\varphi^{\alpha_1},\dots,\varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_{\beta_1},\dots,x_{\beta_{n-1}})}(\psi(t))\frac{\partial(\psi^{\beta_1},\dots,\psi^{\beta_{n-1}})}{\partial(t_1,\dots,t_{n-1})}(t)\\ &\quad=\int_\psi f(\varphi(x))\sum_{\beta\in I(n,n-1)}\frac{\partial(\varphi^{\alpha_1},\dots,\varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_{\beta_1},\dots,x_{\beta_{n-1}})}\,dx_{\beta_1}\wedge\dots\wedge dx_{\beta_{n-1}}\\ &\quad=\int_\psi f(\varphi(x))\sum_{i=1}^n\frac{\partial(\varphi^{\alpha_1},\dots,\varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots x_n)}\,dx_1\wedge\dots\wedge dx_{i-1}\wedge dx_{i+1}\wedge dx_n,\\ &\quad=\int_\psi f(\varphi(x))\sum_{i=1}^n(-1)^{i+1}\frac{\partial(\varphi^{\alpha_1},\dots,\varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots x_n)}\,\nu_i(x)\,dS(x),\end{aligned}\tag{39}$$

kde ν_i jsou souřadnice normály k Ψ, zatímco

$$\int_\psi \frac{\partial f}{\partial y_j}\, dy_j \wedge dy_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge dy_{\alpha_{n-1}} = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) \frac{\partial(\varphi^j, \varphi^{\alpha_1}, \ldots, \varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x)\, dx. \tag{40}$$

Rozvojem determinantů podle prvého řádku dostaneme

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d \frac{\partial f}{\partial y_j}(\varphi(x)) \frac{\partial(\varphi^j, \varphi^{\alpha_1}, \ldots, \varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) &= \frac{\partial(f\circ\varphi, \varphi^{\alpha_1}, \ldots, \varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}(x) \\ &= \det(\nabla(f\circ\varphi), \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}})\end{aligned}$$

(zde i v dalším vystupují determinanty z matic zapsaných jako seznam sloupců) a

$$(-1)^{i+1} \frac{\partial(\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \varphi^{\alpha_{n-1}})}{\partial(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_n)} = \det(\vec{e}_i, \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}})$$

Podle věty o divergenci tedy stačí dokázat vzorec

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f\circ\varphi \det\Big(\vec{e}_i, \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}}\Big)\Big) = \det\Big(\nabla(f\circ\varphi), \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}}\Big). \tag{41}$$

Podle pravidla o derivování součinu dostaneme

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(f\circ\varphi \det\Big(\vec{e}_i, \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}}\Big)\Big) \\ &\quad = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial x_i} \det\Big(\vec{e}_i, \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}}\Big) + f\circ\varphi \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \det\Big(\vec{e}_i, \nabla\varphi^{\alpha_1}, \ldots, \nabla\varphi^{\alpha_{n-1}}\Big).\end{aligned}$$

Prvý člen je zřejmě roven pravé straně (41), zatímco druhý je nula podle lemmatu 9.1. Tím je dokázán vzorec (41) a tudíž završen důkaz věty. □

10. Počítání křivkových a plošných integrálů

10.1. **Orientace povrchů.** Tolerance k nulovým množinám nám umožňuje parametrizovat např. kulovou sféru (hranici koule) pomocí sférických souřadnic. Abychom mohli použít Gaussovu větu, potřebujeme zjistit, zda normála směřuje ven z koule. Z úvah v 4.5 ještě neplyne, že orientaci stačí testovat v jednom bodě. Tento závěr však dostaneme dostaneme z následující věty.

10.2. **Věta.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\psi : G \to \mathbb{R}^n$ je homeomorfní regulární plocha. Předpokládejme, že G je souvislá množina a $\langle\psi\rangle$ je relativně otevřená část $\partial\Omega$. Potom směřuje-li normála $\nu(x, \psi)$ ven z Ω v jednom bodě, směřuje ven z Ω v každém bodě $x \in \langle\psi\rangle$.*

Důkaz. Označme

$$\begin{aligned}\Gamma_+ &= \{x \in \langle\psi\rangle : \ \vec{\nu}(x) \text{ směřuje ven z } \Omega\}, \\ \Gamma_- &= \{x \in \langle\psi\rangle : \ -\vec{\nu}(x) \text{ směřuje ven z } \Omega\}, \\ \Gamma_0 &= \langle\psi\rangle \setminus (\Gamma_+ \cup \Gamma_-).\end{aligned}$$

Zvolme $t \in G$ a najděme nejprve $i \in \{1, \ldots, n\}$ tak, že $\nu_i(x) \neq 0$, kde $x = \psi(t)$. Dále najděme okolí G' bodu t, na němž je $\Pi_{\neg i} \circ \psi$ difeomorfismus (k tomu použijeme větu o inverzním zobrazení). Nechť pro jednoduchost $\nu_i(x) > 0$ a $i = 1$, budeme značit $\Pi = \Pi_{\neg i}$ a používat zápis $x = (\zeta, y)$, $\zeta \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Buď $V' := \Pi(\psi(G'))$ a g inverzní zobrazení k $\Pi \circ \psi$ na V'. Jelikož ψ je homeomorfní a $\langle\psi\rangle$ je relativně otevřená část $\partial\Omega$, existuje okolí U bodu $\psi(t)$ tak, že $\partial\Omega \cap U \subset \psi(G')$. Tomuto okolí můžeme vepsat válec $[a, b] \times V$, kde $[a, b]$ je jednorozměrný otevřený interval a $V \subset V'$ je $(n-1)$-rozměrná koule, $x \in (a, b) \times V$. Množiny $V_a := \{a\} \times V$, $V_b := \{b\} \times V$ jsou konvexní a neprotínají $\partial\Omega$, takže V_a buď leží celá v Ω nebo celá vně $\overline{\Omega}$, podobně pro V_b. Označme

$$\begin{aligned}U_a &:= \{(\zeta, y) : \ y \in V, \ a \le \zeta < \psi^1(g(y))\}, \\ U_b &:= \{(\zeta, y) : \ y \in V, \ \psi^1(g(y)) < \zeta \le b\}.\end{aligned}$$

Předpokládejme, že $V_a \subset \Omega$. Potom každý bod $x \in U_a$ lze spojit vodorovnou (tj. rovnoběžnou s první souřadnicovou osou) úsečkou s bodem na V_a a taková úsečka neobsahuje žádný bod $\partial\Omega$. Tedy $U_a \subset \Omega$. Jelikož pro U_b nebo $\mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$ je situace podobna, dostáváme, že U_a buď leží celá v Ω nebo celá vně $\overline{\Omega}$, podobně pro U_b. Jestliže obě množiny U_a, U_b leží v Ω, nesměřuje $\vec{e}_1$ ani $-\vec{e}_1$ ven z Ω. Jelikož $\vec{e}_i \cdot \nu_i(x) > 0$, podle lemmatu 8.1 nesměřuje $\nu_i(x)$ ani $-\nu_i(x)$ ven z Ω v x, a stejná situace nastává na relativním okolí

$\langle\psi\rangle \cap [(a,b) \times V]$ bodu x. Je tedy x spolu se svým relativním okolím v Γ_0. Jestliže obě množiny U_a, U_b leží vně $\overline{\Omega}$, pak $\Omega \cap [(a,b) \times V] = \emptyset$, což je ve sporu s inkluzí $\langle\psi\rangle \subset \partial\Omega$. Pokud $U_a \subset \Omega$ a $U_b \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, pak $\vec{e}_1$ směřuje ven z Ω v x a podle lemmatu 8.1 směřuje $\nu_i(x)$ ven z Ω v x. Stejná situace nastává na relativním okolí $\partial\Omega \cap [(a,b) \times V]$ bodu x. Je tedy x spolu se svým relativním okolím v Γ_+. Konečně, pokud $U_b \subset \Omega$ a $U_a \cap \overline{\Omega} = \emptyset$, pak je x spolu se svým relativním okolím v Γ_+. Tedy množiny Γ_+, Γ_-, Γ_0 jsou relativně otevřené v $\langle\psi\rangle$, a jelikož $\langle\psi\rangle$ je souvislá množina, jedna z nich je celý obraz $\langle\psi\rangle$. Odtud dostáváme tvrzení věty. $\square$