M 172: Diferenciální geometrie křivek a ploch

Jan Rataj

1 Úvod

1.1 Euklidovský prostor

Definice 1.1 n-rozměrný euklidovský prostor je čtveřice $\mathbb{E}^n = (B, V, \cdot, -)$, kde B je neprázdná množina (množina bodů prostoru), V je vektorový prostor dimenze n nad $\mathbb{R}$ se skalárním součinem $\cdot$ a $-$ je zobrazení $B \times B$ do V (značíme $-(Y, X) \equiv Y - X$, $X, Y \in B$) splňující

1. $(Z - Y) + (Y - X) = Z - X$, $X, Y, Z \in B$,
2. pro každý $P \in B$ je $X \mapsto X - P$ vzájemně jednoznačné zobrazení B na V.

Inverzní zobrazení k zobrazení $\cdot - P : B \to V$ značíme přirozeně $P + \cdot : V \to P$.

Příklady:

1. $B = V = \mathbb{R}^n$,
2. $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 3\}$, $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\} \cong \mathbb{R}^2$, skalární součin a odčítání jako v $\mathbb{R}^3$ (dvourozměrný euklidovský prostor).

Poznámka: Zvolíme-li pevně bod $P \in B$ (počátek) a ortonormální bázi $\{e_1, \ldots, e_n\}$ vektorového prostoru V (tzn. bázi splňující $e_i \cdot e_j = 0$ pro $i \neq j$ a 1 pro $i = j$), máme vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathbb{R}^n$ na B definované vztahem

$$(x_1, \ldots, x_n)^T \mapsto P + \sum_1^n x_i e_i$$

(vektory budeme zapisovat v souřadnicích jako sloupce, tedy T značí transpozici řádku na sloupec). V dalším budeme ztotožňovat B s $\mathbb{R}^n$, přitom uvažujeme vektorový prostor $V = \mathbb{R}^n$ s kanonickou bází a počátek $P = (0, \ldots, 0)^T$.

1.2 Smíšený a vektorový součin

Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ dimenze n.

Definice 1.2 Řekneme, že dvě báze $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ prostoru V jsou *shodně (opačně) orientovány*, je-li determinant matice přechodu od $\mathcal{B}$ k $\tilde{\mathcal{B}}$ kladný (záporný).

Definice 1.3 *Orientovaný vektorový prostor* je vektorový prostor V s pevně danou bází $\mathcal{B}$. Jiná báze $\tilde{\mathcal{B}}$ prostoru V je *kladně (záporně)* orientována, je-li shodně (opačně) orientována s $\mathcal{B}$.

Definice 1.4 Buď V orientovaný vektorový prostor se skalárním součinem $\cdot$ a $\{e_1, \ldots, e_n\}$ kladně orientovaná ortonormální báze. *Smíšený součin* vektorů $u_1, \ldots, u_n \in V$ je číslo

$$\{u_1, \ldots, u_n\} = \det(e_i \cdot u_j)_{i,j=1}^n.$$

Vlastnosti:

1. smíšený součin se nezávisí na volbě kladně orientované ortonormální báze.
2. Smíšený součin je lineární v každé složce,
3. $\{u_1, \ldots, u_n\} \neq 0$ právě když jsou vektory $u_1, \ldots, u_n$ lineárně nezávislé,
4. $|\{u_1, \ldots, u_n\}| = \lambda^n \Big(\{ \sum_1^n t_i u_i : \ 0 \leq t_i \leq 1 \} \Big), \quad u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n.$

Definice 1.5 *Vektorový součin* $u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \in V$ vektorů $u_1, \ldots, u_{n-1} \in V$ je definován vztahem

$$(u_1 \times \cdots \times u_{n-1}) \cdot v = \{u_1, \ldots, u_{n-1}, v\}, \quad v \in V.$$

Pozn.: Definice je korektní. V případě dimenze $n = 2$ značíme $[u]$ vektorový součin vektoru u.

Vlastnosti:

1. Vektorový součin je lineární v každé složce,
2. $u_1 \times \cdots \times u_{n-1} \neq o$ právě když jsou vektory $u_1, \ldots, u_{n-1}$ lineárně nezávislé,
3. $(u_1 \times \cdots \times u_{n-1}) \cdot u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1,$
4. $\|u_1 \times \cdots \times u_{n-1}\| = \lambda^{n-1} \Big(\{ \sum_1^{n-1} t_i u_i : \ 0 \leq t_i \leq 1 \} \Big), \quad u_1, \ldots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^n.$

Pozn.: V dalším budeme uvažovat (pokud nebude řečeno jinak) případ $V = \mathbb{R}^n$ s orientací danou kanonickou bází.

Cvičení:

1. Pro $u, v, x, y \in \mathbb{R}^3$ je
$$(u \times v) \cdot (x \times y) = \begin{vmatrix} u \cdot x & v \cdot x \\ u \cdot y & v \cdot y \end{vmatrix},$$
tedy speciálně
$$\|u \times v\|^2 = \sqrt{\begin{vmatrix} u \cdot u & u \cdot v \\ u \cdot v & v \cdot v \end{vmatrix}}.$$
2. Pro $u = (u^1, u^2, u^3)^T, v = (v^1, v^2, v^3)^T \in \mathbb{R}^3$ je
$$u \times v = \left(\begin{vmatrix} u^2 & v^2 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^3 & v^3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u^1 & v^1 \\ u^2 & v^2 \end{vmatrix} \right)^T.$$
3. Pro $v = (v^1, v^2)^T \in \mathbb{R}^2$ je $[v] = (-v^2, v^1)^T$.
4. Zobrazení $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je shodnost, jestliže $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}^n$. Ukažte, že S je shodnost, právě když $S(x) = b + Rx$, kde $b \in \mathbb{R}^n$ a R je unitární matice typu $n \times n$ (tj. $R^T R = I$). Popište shodnosti v $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$.

1.3 Diferenciál zobrazení

Buď F zobrazení z otevřené množiny $G \subseteq \mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že F je diferencovatelné, je-li třídy $\mathcal{C}^\infty$ na G, tj. má-li spojité parciální derivace všech řádů na G. *Diferenciál* F v bodě $x \in G$ je lineární zobrazení

$$dF_x : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$$

určené podmínkou

$$\|F(x+\xi) - F(x) - dF_x(\xi)\| = o(\|\xi\|), \quad \|\xi\| \to 0.$$

Hodnota $dF_x(\xi)$ se též nazývá derivací ve směru ξ a speciálně $dF_x(e_i) = \frac{\partial F}{\partial x^i}(x)$ je parciální derivace F podle x^i. Lineární zobrazení dF_x je určeno svou maticí

$$\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}\right)_{i=1,j=1}^{m,n}.$$

Je-li $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, značíme $F'(t) = dF_t(1)$.

Diferenciál druhého řádu d^2F chápeme jako (obyčejný) diferenciál zobrazení

$$dF : G \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n),$$

tedy $d^2F_x = d(dF)_x$ je lineární zobrazení z $\mathbb{R}^m$ do $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, neboli (ekvivalentně) bilineární zobrazení z $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ do $\mathbb{R}^n$. Toto zobrazení je symetrické (záměnnost smíšených derivací) a speciálně platí $d^2F_x(e_i, e_j) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j}(x)$.

Definice 1.6 Buď $\mathbb{E}^n = (B, V, \cdot, -)$ n-rozměrný euklidovský prostor. *Tečným prostorem v bodě* $A \in B$ rozumíme množinu

$$T_A\mathbb{E}^n = \{(A, u) : u \in V\}.$$

$T_A\mathbb{E}^n$ je přirozeně izomorfní s vektorovým prostorem V u přenášíme na něj všechny vektorové operace z V (skalární a vektorový součin, normu apod.) a vektory z $T_A\mathbb{E}^n$ přičítáme přirozeně k bodu A. Buď nyní

$$F : \mathbb{E}^m \to \mathbb{E}^n$$

zobrazení mezi dvěma euklidovskými prostory (tím rozumíme pochopitelně zobrazení mezi příslušnými bodovými množinami). *Diferenciálem* zobrazení F v bodě $A \in \mathbb{E}^m$ rozumíme (pokud existuje) lineární zobrazení $dF_A : T_A\mathbb{E}^m \to T_{F(A)}\mathbb{E}^n$ splňující

$$\|F(A+u) - F(A) - dF_A(u)\| = o(\|u\|), \quad \|u\| \to 0.$$

Věta 1.7 (o inverzním zobrazení) *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelné a $x \in G$ takový, že zobrazení dF_x je bijekce (ekvivalentně, $\mathcal{J}F(x) \neq 0$). Pak existuje otevřené okolí $U \subseteq G$ bodu x takové, že $F(U)$ je otevřená množina a restrikce $F \mid U$ je difeomorfismus U na $F(U)$ (tj. prosté diferencovatelné zobrazení, jehož inverze je rovněž diferencovatelná)*

Věta 1.8 (o implicitních funkcích) *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}^n$ diferencovatelné zobrazení a $(x_0, y_0) \in G$ takový, že $F(x_0, y_0) = 0$ a matice parciálních derivací $\left(\frac{\partial F^i}{\partial y^j}(x_0, y_0)\right)_{i,j=1}^n$ má hodnost n. Pak existuje otevřené okolí U bodu x_0 v $\mathbb{R}^m$ a otevřené okolí V bodu y_0 v $\mathbb{R}^n$, $U \times V \subseteq G$, a diferencovatelné zobrazení $g : U \to V$ tak, že*

1. *$g(x_0) = y_0$,*
2. *$F(x, g(x)) = 0$ pro všechna $x \in U$,*
3. *pro každý $x \in U$, $g(x)$ je jediným bodem $y \in V$, pro nějž $F(x, y) = 0$.*

Cvičení:

1. Jsou-li $F : U \to \mathbb{R}^n$ a $G : V \to U$ diferencovatelné, $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $V \subseteq \mathbb{R}^k$ otevřené, pak pro $x \in V$ platí
$$d(F \circ G)_x = dF_{G(x)} \circ dG_x.$$
2. Pro afinní zobrazení $A : x \mapsto b + Lx$ je $dF_x = L$ pro všechna x.
3. $F : (x, y) \mapsto x \cdot y \Longrightarrow dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \cdot \eta + \xi \cdot y$
4. $F(x) = \|x\| \Longrightarrow dF_x(\xi) = \frac{x \cdot \xi}{\|x\|}$
5. $F : (x, y) \mapsto x \times y \Longrightarrow dF_{(x,y)}(\xi, \eta) = x \times \eta + \xi \times y$
6. $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilineární forma, $Q(x) = B(x, x)$ příslušná kvadratická forma, pak $dQ_x(\xi) = B(x, \xi) + B(\xi, x)$.
7. Pro F, G, x jako v cvičení 1. a pro vektory $u, v \in \mathbb{R}^k$ platí
$$d^2(F \circ G)_x(u, v) = d^2F_{G(x)}(dG_x(u), dG_x(v)) + dF_{G(x)}(d^2G_x(u, v)).$$

2 Křivky

2.1 Základní pojmy

Definice 2.1 Buď $I \subseteq \mathbb{R}$ interval. Diferencovatelné zobrazení $c : I \to \mathbb{R}^n$ se nazývá *parametrizovaná křivka* v $\mathbb{R}^n$. Množina $c(I) \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *obraz křivky.*

Pozn.: Je-li I uzavřený nebo polouzavřený interval, rozumíme diferencovatelným zobrazením na I restrikci na I diferencovatelného zobrazení definovaného na nějakém otevřeném intervalu obsahujícím I.

Příklad: $c(t) = (t, t)^T$ je parametrizace přímky, $c(t) = (\cos t, \sin t)^T$ parametrizace jednotkové kružnice v $\mathbb{R}^2$ $(I = \mathbb{R})$.

Pozn.: Obraz křivky nemusí mít tečnu v každém svém bodě, viz např. $c(t) = (t^3, t^2)^T$, $t \in \mathbb{R}$.

Definice 2.2 Parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^n$ je *regulární*, jestliže $c'(t) \neq 0$ pro každé $t \in I$. Vektor $c'(t)$ pak je *tečným vektorem* křivky v bodě $c(t)$.

Pozn.: Zobrazení c nemusí být prosté, bod $x \in c(I)$ obrazu křivky tedy nemusí mít jednoznačně určenou tečnu (př. - $c(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)^T$). Je-li c prosté, říkáme, že parametrizovaná křivka je jednoduchá.

Příklad: Zobrazení $c(t) = (t, t)^T$ $(t > 0)$ a $\tilde{c}(t) = (e^t, e^t)^T$ $(t \in \mathbb{R})$ mají stejný obraz, tedy 'parametrizují tutéž křivku'.

Definice 2.3 Je-li $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ difeomorfismus intervalu $\tilde{I}$ na I, je $\tilde{c} = c \circ \phi : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ regulární parametrizovaná křivka se stejným obrazem jako c. Difeomorfismus ϕ pak nazýváme *změnou parametru* křivky c. Je-li navíc $\phi' > 0$ na $\tilde{I}$, nazveme ϕ *změnou parametru zachovávající orientaci.*

Věta 2.4 *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^n$ otevřená a $F : G \to \mathbb{R}^{n-1}$ diferencovatelné. Označme $\Gamma = \{x \in G : F(x) = 0\}$ a buď $x_0 \in \Gamma$ takový, že zobrazení dF_{x_0} je na $\mathbb{R}^{n-1}$. Pak existuje okolí U bodu x_0 v $\mathbb{R}^n$, otevřený interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a regulární parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^n$ taková, že $c(I) = \Gamma \cap U$.*

Důkaz: Protože dF_{x_0} je na, je po eventuálním přečíslování proměnných determinant matice $\left(\frac{\partial F^i}{\partial x^j}(x_0)\right)_{i,j=1}^{n-1}$ různý od nuly. Podle věty o implicitních funkcích tedy existuje otevřený interval I obsahující x_0^n, okolí V bodu $(x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$ a diferencovatelné zobrazení $g : I \to V$ takové, že $g(x_0^n) = (x_0^1, \ldots, x_0^{n-1})$ a $F(g(x_n), x_n) = 0$ na I. Zobrazení $c : x_n \mapsto (g(x_n), x_n)$ je pak hledanou regulární parametrizovanou křivkou.

2.2 Délka křivky

Definice 2.5 *Délka regulární parametrizované křivky $c : I \to \mathbb{R}^n$ je*

$$L = \int_I \|c'(t)\| dt.$$

Pozn.: Délka křivky je přirozeně definována, lze totiž ukázat, že platí

$$L = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{m} \|c(t_i) - c(t_{i-1})\| : m \in \mathbb{N}, t_0 < t_1 < \cdots < t_m \in I \right\}.$$

Definice 2.6 *Křivka je parametrizována obloukem, jestliže $\|c'(t)\| = 1$ pro včechna $t \in I$.*

Věta 2.7 *Ke každé regulární parametrizované křivce $c : I \to \mathbb{R}^n$ existuje změna parametru $\phi : \tilde{I} \to I$ tak, že $\tilde{c} = c \circ \phi$ je parametrizace obloukem.*

Důkaz: Zvolme $t_0 \in I$ a položme

$$\ell(t) = \int_{t_0}^{t} \|c'(\tau)\| d\tau, \quad t \in I$$

(délka křivky $c \mid (t_0, t)$) a označme $\tilde{I} = \ell(I)$ obraz intervalu I ($\tilde{I}$ je opět interval). Funkce $\ell : I \to \tilde{I}$ je rostoucí a $\ell'(t) = \|c'(t)\|$, $t \in I$. Položme $\phi = \ell^{-1}$, pak $\phi'(s) = \|c'(\phi(s))\|^{-1}$, a tedy parametrizace $\tilde{c} = c \circ \phi$ splňuje $\|\tilde{c}'(s)\| = \|c'(\phi(s))\phi'(s)\| = 1$.

Příklad: Regulární parametrizovaná křivka $c(t) = (r \cos t, r \sin t)^T$, $t \in (0, 2\pi)$ má parametrizaci obloukem $\tilde{c}(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})^T$, $s \in (0, 2\pi r)$.

2.3 Frenetův repér

Definice 2.8 Parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^n$ je *obecná*, jestliže vektory $c'(t), c''(t), \ldots, c^{(n-1)}(t)$ jsou lineárně nezávislé pro každé $t \in I$.

Pozn.: Obecná parametrizovaná křivka je samozřejmě regulární.

Věta 2.9 *Buď $c : I \to \mathbb{R}^n$ obecná parametrizovaná křivka. Pak existují diferencovatelná zobrazení $E_i : I \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, taková, že pro každé $t \in I$*

1. *$\{E_1(t), \ldots, E_n(t)\}$ je kladně orientovaná ortonormální báze $\mathbb{R}^n$,*
2. *pro každé $i = 1, \ldots, n-1$ jsou $\{E_1(t), \ldots, E_i(t)\}$ a $\{c'(t), \ldots, c^{(i)}(t)\}$ shodně orientované báze téhož prostoru dimenze i.*

Zobrazení $t \mapsto (E_1(t), \ldots E_n(t))$ se nazývá Frenetův repér křivky c.

Důkaz: Položíme $E_1(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$ a dále použijeme Gramm-Schmittův ortogonalizační proces, tedy hledáme $E_i(t)$ ve tvaru

$$E_i(t) = \alpha_{i,1}(t)c'(t) + \cdots + \alpha_{i,i}(t)c^{(i)}(t), \quad i = 2, \ldots, n-1,$$

kde $\alpha_{i,j}$ jsou diferencovatelné reálné funkce a $\alpha_{i,i} > 0$, $2 \leq i \leq n-1$. Nakonec položíme

$$E_n(t) = E_1(t) \times \cdots \times E_{n-1}(t).$$

Vektory $E_i'(t)$ můžeme vyjádřit ve tvaru

$$E_i'(t) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{i,j}(t) E_j(t)$$

s koeficienty $\omega_{i,j}(t) = E_i'(t) \cdot E_j(t)$.

Lemma 2.10 *$\omega_{i,j}$ jsou diferencovatelné funkce splňující*

1. $\omega_{i,j} + \omega_{j,i} = 0$ *pro všechna* $1 \leq i, j \leq n$,

2. $\omega_{i,j} = 0$ *pro* $j > i + 1$,

3. $\omega_{i,i+1} > 0$ *pro* $1 \leq i \leq n - 2$.

Důkaz:

1. Dokáže se derivivováním rovnosti $E_i(t) \cdot E_j(t) = \delta_{ij}$.
2. Máme $E_i = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{i,j} c^{(j)}$, tedy $E_i' \in \langle c', \ldots, c^{(i+1)} \rangle = \langle E_1, \ldots, E_{i+1} \rangle$, proto $E_i' \cdot E_j = 0$ pro $j > i+1$.
3. Zřejmě $E_i' = u + \alpha_{i,i} c^{(i+1)}$ pro nějaký $u \in \langle E_1, \ldots, E_i \rangle$, podobně $c^{(i+1)} = v + (\alpha_{i+1,i+1})^{-1} E_{i+1}$, $v \in \langle E_1, \ldots, E_i \rangle$, přitom $\alpha_{i,i} > 0$ a $\alpha_{i+1,i+1} > 0$, je tedy $\omega_{i,i+1} = E_i' \cdot E_{i+1} = \alpha_{i,i}(\alpha_{i+1,i+1})^{-1} > 0$.

Definice 2.11 Funkce $k_i(t) = \frac{\omega_{i,i+1}(t)}{\|c'(t)\|}$ se nazývá *i-tá funkce křivosti* parametrizované křivky $c(t)$ a rovnice

$$\begin{aligned}
E_1' &= \omega_{1,2} E_2 \\
E_2' &= -\omega_{1,2} E_1 + \omega_{2,3} E_3 \\
&\vdots \\
E_{n-1}' &= -\omega_{n-2,n-1} E_{n-2} + \omega_{n-1,n} E_n \\
E_n' &= -\omega_{n-1,n} E_{n-1}
\end{aligned}$$

se nazývají *Frenetovy rovnice* křivky $c(t)$.

Věta 2.12 *Buď $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulární obecná parametrizovaná křivka a $\phi : \tilde{I} \to I$ změna parametru zachovávající orientaci. Pak $\tilde{c} = c \circ \phi$ je regulární obecná parametrizovaná křivka a její Frenetův repér a funkce křivosti splňují*

$$\begin{aligned}
\tilde{E}_i(s) &= E_i(\phi(s)), \quad i = 1, \ldots, n, \\
\tilde{k}_i(s) &= k_i(\phi(s)), \quad i = 1, \ldots, n-1.
\end{aligned}$$

Důkaz:

1. $\tilde{E}_1(s) = \frac{\tilde{c}'(s)}{\|\tilde{c}'(s)\|} = \frac{c'(\phi(s))}{\|c'(\phi(s))\|} = E_1(\phi(s))$.

2. Indukcí: nechť $\tilde{E}_j = E_j \circ \phi$ pro $1 \leq j \leq i$. Jest $\tilde{c}^{(i+1)}(s) \in \langle c'(\phi(s)), \ldots, c^{(i+1)}(\phi(s))\rangle$ a prostory $\langle \tilde{c}'(s), \ldots, \tilde{c}^{(i+1)}(s)\rangle$ a $\langle c'(\phi(s)), \ldots, c^{(i+1)}(\phi(s))\rangle$ jsou shodně orientovány, tudíž $\tilde{E}_{i+1}(s) = E_{i+1}(\phi(s))$.

3. Ze vztahů $\tilde{E}_i'(s) = E_i'(\phi(s))\phi'(s)$ a $\|\tilde{c}_i'(s)\| = \|c_i'(\phi(s))\|\phi'(s)$ plyne $\tilde{\omega}_{i,i+1}(s) = \omega_{i,i+1}(\phi(s))\phi'(s)$ a $\tilde{k}_i(s) = k_i(\phi(s))$.

Věta 2.13 *Buď $c : I \to \mathbb{R}^n$ regulární obecná parametrizovaná křivka a $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ shodnost. Pak $\bar{c} = S \circ c$ je regulární obecná parametrizovaná křivka a její Frenetův repér a funkce křivosti splňují*

$$\begin{aligned} \bar{E}_i(t) &= S_0\big(E_i(t)\big), \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \bar{E}_n(t) = \pm S_0(E_n(t)), \\ \bar{k}_i(t) &= k_i(t), \quad i = 1, \ldots, n-2, \quad \bar{k}_{n-1}(t) = \pm k_{n-1}(t), \end{aligned}$$

kde $S_0(a) = S(a) - S(o)$ a znaménko $\pm$ se řídí znaménkem determinantu matice ortonormální transformace S_0.

Důkaz: Rovnost $\bar{E}_i = S_0(E_i)$ plyne z $\bar{c}^{(i)}(t) = S_0(c^{(i)}(t))$, $i = 1, \ldots, n-1$, dále

$$\bar{E}_n(t) = \bar{E}_1(t) \times \cdots \times \bar{E}_{n-1}(t) = S_0(E_1(t)) \times \cdots \times S_0(E_{n-1}(t)) = \pm E_0(t) \times \cdots \times E_{n-1}(t) = \pm E_{n-1}(t).$$

Protože ortonormální transformace zachovává skalární součin, máme dále

$$\bar{\omega}_{i,i+1} = S_0(E_i') \cdot S_0(E_{i+1}) = E_i' \cdot E_{i+1} = \omega_{i,i+1},$$

tudíž $\bar{k}_i = k_i$, $i = 1, \ldots, n-2$, a podobně $\bar{\omega}_{n-1,n} = \pm\omega_{n-1,n}$, tedy $\bar{k}_{n-1} = \pm k_{n-1}$.

Věta 2.14 *Buďte $c, \tilde{c} : I \to \mathbb{R}^n$ dvě regulární obecné parametrizované křivky a nechť pro všechna $t \in I$ platí*

1. $\|c'(t)\| = \|\tilde{c}'(t)\|$,

2. $k_i(t) = \tilde{k}_i(t), \quad i = 1, \ldots, n-1$.

Pak existuje právě jedna přímá shodnost $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taková,že $\tilde{c} = S \circ c$.

Důkaz: Zvolme $t_0 \in I$. Existuje právě jedna shodnost S na $\mathbb{R}^n$ s lineární složkou S_0 splňující

$$S(c(t_0)) = \tilde{c}(t_0), S_0(E_i(t_0)) = \tilde{E}_i(t_0), \ i = 1, \ldots, n,$$

kde $\{\tilde{E}_i : i = 1, \ldots, n\}$ je Frenetův repér křivky $\tilde{c}$. Protože oba Frenetovy repéry jsou kladně orientovány, je S přímá shodnost (neboli determinant matice příslušné S_0 je roven 1). Podle předpokladů je $\tilde{\omega}_{ij}(t) = \omega_{ij}(t)$, tedy

$$\tilde{E}_i'(t) = \sum_j \omega_{ij}(t)\tilde{E}_j(t).$$

Zároveň však platí

$$S_0(E_i'(t)) = \sum_j \omega_{ij}(t) S_0(E_j(t)).$$

Soustavy funkcí $\tilde{E}_i$ a $S_0 \circ E_i$, $i = 1, \ldots, n$, tedy splňují stejný systém lineárních diferenciálních rovnic na I. Protože se shodují v bodě t_0, musí být $\tilde{E}_i = S_0 \circ E_i$ na I. Speciálně máme $\tilde{c}' = S_0 \circ c'$, neboť $\|\tilde{c}'\| = \|c'\|$ na I. Je tedy

$$S(c(t)) - S(c(t_0)) = \int_{t_0}^{t} S_0(c'(t))dt = \int_{t_0}^{t} \tilde{c}'(t)dt = \tilde{c}(t) - \tilde{c}(t_0),$$

z čehož plyne $S(c(t)) = \tilde{c}(t)$, $t \in I$.

Věta 2.15 *Buďte $k_1, \ldots, k_{n-1}$ diferencovatelné funkce definované na okolí 0 v $\mathbb{R}$ a splňující $k_i > 0$, $1 \leq i \leq n-2$. Pak existuje $\delta > 0$ a regulární obecná křivka $c : (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$ parametrizovaná obloukem s funkcemi křivosti $k_1, \ldots, k_{n-1}$.*

Důkaz: Uvažujme Frenetovy rovnice (viz Definice 2.11) jako soustavu lineárních diferenciálních rovnic se zadanými koeficienty $\omega_{i,i+1} = -\omega_{i+1,i} = k_i$, $i = 1, \ldots, n-1$, a počáteční podmínkou $E_i(0) = e_i$, $i = 1, \ldots, n$. Buď $E_i : i = 1, \ldots, n$ řešení této soustavy na nějakém intervalu I obsahujícím 0 (takové jistě existuje). Protože pro všechna i, j platí

$$(E_i \cdot E_j)' = \omega_{i,j} + \omega_{j,i} = 0,$$

je $E_i(t) \cdot E_j(t) = E_i(t_0) \cdot E_j(t_0) = \delta_{ij}$ pro všechna $t \in I$. Hledanou křivkou je

$$c(s) = \int_0^s E_1(t)dt, \quad s \in I.$$

2.4 Křivky v prostoru

Používá se značení $T \equiv E_1, N \equiv E_2, B \equiv E_3$, což jsou po řadě *vektor tečny, hlavní normály a binormály* křivky v bodě $c(t)$. Přímka $c(t) + \langle T(t) \rangle$ se nazývá tečna, $c(t) + \langle N(t) \rangle$ hlavní normála a $c(t) + \langle B(t) \rangle$ binormála křivky v bodě $c(t)$. Rovina $c(t) + \langle T(t), N(t) \rangle$ se nazývá *oskulační rovina*, $c(t) + \langle N(t), B(t) \rangle$ *normálová rovina* a $c(t) + \langle T(t), B(t) \rangle$ *rektifikační rovina* křivky v bodě $c(t)$. Dále značíme $\kappa \equiv k_1$ (křivost) a $\tau \equiv k_2$ (torze). Frenetovy rovnice pro případ parametrizace obloukem mají tvar

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= -\tau N. \end{aligned}$$

Křivost je rovna (až na znaménko) křivosti průmětu křivky do její oskulační roviny a torze udává, nepřesně řečeno, rychlost změny oskulační roviny v daném bodě.

Poznamenejme, že přímka v $\mathbb{R}^3$ nemá obecnou parametrizaci a její Frenetův repér tedy není definován. Někdy je pro tento případ definován dodatečně tak, že N je libovolný konstantní jednotkový vektor kolmý k přímce a $B = T \times N$. Dostáváme pak konstantní nulovou křivost i torzi.

Věta 2.16 *Pro regulární obecnou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ platí*

$$\kappa(t) = \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}, \quad \tau(t) = \frac{\{c'(t), c''(t), c'''(t)\}}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}.$$

Důkaz: Vzorec pro křivost se dokáže ze vztahů $\omega_{1,2} = \|T'\|$ a

$$T' = \left(\frac{c'}{\|c'\|} \right)' = \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'}{\|c'\|^3}.$$

Dále platí

$$\omega_{2,3} = N' \cdot B = N' \cdot \frac{c' \times c''}{\|c' \times c''\|} = \frac{1}{\|c' \times c''\|}\{c', c'', N'\}.$$

Protože

$$N = \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} \left(c'' - \frac{c' \cdot c''}{\|c'\|^2} c' \right),$$

platí

$$N' = \alpha c' + \beta c'' + \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|} c'''$$

pro nějaké reálné funkce α, β a po dosazení dostaneme

$$\omega_{2,3} = \frac{\|c'\|}{\|c' \times c''\|^2}\{c', c'', c'''\},$$

z čehož plyne žádaný výsledek.

Věta 2.17 *Pro regulární obecnou parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ platí*

$$\tau(t) = 0, t \in I \iff \textit{křivka leží v rovině.}$$

Důkaz: Je snadné ukázat, že rovinná křivka má nulovou torzi. Předpokládejme tedy naopak, že $\tau = 0$. Z Frenetových vzorců je pak B je konstantní na I. Zvolme $t_0 \in I$ a položme

$$g(t) = (c(t) - c(t_0)) \cdot B, \quad t \in I.$$

Platí

$$g'(t) = c'(t) \cdot B = \frac{T(t) \cdot B}{\|c'(t)\|} = 0,$$

tedy funkce g je konstatntní na I. Protože však $g(t_0) = 0$, je $g = 0$ a křivka leží v rovině $\{x : (x - c(t_0)) \cdot B = 0\}$.

Věta 2.18 *Pro regulární obecnou křivku $c : I \to \mathbb{R}^3$ parametrizovanou obloukem a $s_0 \in I$ platí*

$$\begin{aligned} c(s) - c(s_0) &= \Big((s - s_0) - \frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa^2(s_0)\Big)T(s_0) \\ &+ \Big(\frac{(s - s_0)^2}{2}\kappa(s_0) + \frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa'(s_0)\Big)N(s_0) \\ &+ \Big(\frac{(s - s_0)^3}{6}\kappa(s_0)\tau(s_0)\Big)B(s_0) + o\big((s - s_0)^3\big), \quad s \to s_0. \end{aligned}$$

Důkaz: Výpočtem Taylorova rozvoje funkce c v bodě s_0 za využití Frenetových vzorců.

Pozn.: V mnoha případech neumíme parametrizaci obloukem explicitně vyjádřit. Předchozí věta nám umožňuje napsat přesto Taylorův rozvoj třetího řádu pro parametrizaci obloukem (Frenetův repér a funkce křivosti a torze spočteme z libovolné jiné parametrizace).

2.5 Křivky v rovině

Pro rovinnou regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ značíme opět $T \equiv E_1$ vektor tečny, $N \equiv E_2$ vektor hlavní normály a $k \equiv k_1$ křivost křivky. Je-li křivka parametrizovaná obloukem, její Frenetovy rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} E_1' &= kE_2, \\ E_2' &= -kE_1. \end{aligned}$$

Věta 2.19 *Pro regulární parametrizovanou křivku $c : I \to \mathbb{R}^2$ platí*

$$k(t) = \frac{\{c'(t), c''(t)\}}{\|c'(t)\|^3}.$$

Důkaz: Protože $E_2 = [E_1]$, platí $\omega_{1,2} = E_1' \cdot E_2 = E_1' \cdot [E_1] = \{E_1, E_1'\}$, přitom

$$E_1' = \left(\frac{c'}{\|c'\|}\right)' = \frac{\|c'\|^2 c'' - (c' \cdot c'')c'}{\|c'\|^3}.$$

Po dosazení dostaneme žádaný výsledek.

Věta 2.20 *Buď $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka a $v \in \mathbb{R}^2$ libovolný pevný vektor jednotkové délky. Buď dále $\theta(t)$ spojitá funkce na I splňující*

$$\begin{aligned} \cos\theta(t) &= E_1(t) \cdot v, \\ \sin\theta(t) &= -E_2(t) \cdot v. \end{aligned}$$

Pak $\omega_{1,2}(t) = \theta'(t)$.

Pozn.: $\theta(t)$ je úhel mezi v a tečnou $E_1(t)$. Ze spojitosti funkce θ zřejmě plyne i její diferencovatelnost.

Důkaz: Derivováním rovnic pro θ.

Definice 2.21 Je-li křivost $k(t)$ křivky c v bodě $c(t)$ nenulová, nazýváme číslo $\rho(t) = \frac{1}{|k(t)|}$ *poloměrem křivosti* a kružnici se středem $S(t) = c(t) + \frac{1}{k(t)}E_2(t)$ a poloměrem $\rho(t)$ *oskulační kružnicí* křivky c v bodě $c(t)$.

Pozn.: Křivka c a její oskulační kružnice mají v bodě $c(t)$ 'dotyk druhého řádu', tj. mají v tomto bodě společnou tečnu i křivost.

Věta 2.22 *Buď $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka. Pak platí:*

1. $k(t) = 0,\ t \in I$, *právě když $c(I)$ je část přímky,*
2. $k(t) = k \neq 0,\ t \in I$, *právě když $c(I)$ je část kružnice o poloměru $|k|^{-1}$.*

Důkaz: Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že křivka je parametrizována obloukem. V obou tvrzeních jsou implikace $\Longleftarrow$ zřejmé, dokážeme $\Longrightarrow$.

1. Je-li $k = 0$, z Frenetových vzorců dostaneme $0 = E_1' = c''$, tedy $c(s) = as + b$.
2. Buď $k(s) = k$. Položíme $p(s) = c(s) + k^{-1}E_2(s)$; platí $p'(s) = E_1(s) + k^{-1}E_2'(s)$ a opět z Frenetových vzorců máme $p'(s) = 0$, tedy $p(s) = p$ a $\|c(s) - p\| = |k|^{-1}$.

Definice 2.23 Buď $c : I \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka s nenulovou křivostí. Parametrizovaná křivka

$$\tilde{c} : t \mapsto c(t) - k(t)^{-1}N(t), \quad t \in I,$$

se nazývá *evolutou křivky c*. Původní křivka c se naopak nazývá *evolventou křivky $\tilde{c}$*.

Pozn.: Evoluta je tvořena středy oskulačních kružnic dané křivky. Evoluta nemusí být regulární parametrizovaná křivka (např. evoluta kružnice je tvořena jen jedním bodem).

Lemma 2.24 *Je-li křivka $c : I \to \mathbb{R}^2$ parametrizovaná obloukem, pak křivka*

$$\bar{c} : s \mapsto c(s) - sc'(s), \quad s \in I,$$

je její evolventou.

Důkaz: Derivováním a užitím Frenetových vzorců spočteme $\bar{c}' = -tkN$ a $\bar{c}'' = sk^2T - (k + sk')N$ (T, N, k značí po řadě tečnu, normálu a křivost křivky c v bodě s). Podle vzorce z Věty 2.19 je křivost křivky $\bar{c}$ rovna $\bar{k}(s) = |s|^{-1}$ a normála křivky $\bar{c}$ splňuje $\bar{N}(s) = (\operatorname{sgn} s)T(s)$. Platí tedy $c(s) = \bar{c}(s) + \bar{k}(s)^{-1}\bar{N}(s)$, neboli c je evolutou křivky $\bar{c}$.

2.6 Globální teorie rovinných křivek

2.6.1 Rotační index

Definice 2.25 Parametrizovaná křivka $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ je *uzavřená*, jestliže $c(a) = c(b)$ a $c^{(i)}(a) = c^{(i)}(b)$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$. Uzavřená křivka je *jednoduchá*, je-li c prosté na $[a, b)$.

V globální teorii křivek potřebujeme existenci úhlového zobrazení θ z Věty 2.20. Za referenční směr v můžeme vzít vektor $(1, 0)^T$.

Lemma 2.26 *Buď $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regulární parametrizovaná křivka. Pak existuje diferencovatelná funkce $\theta : I \to \mathbb{R}$ tak, že jednotkový vektor tečny ke křivce splňuje $T(t) = (\cos\theta(t), \sin\theta(t))^T$, $t \in I$. Funkce θ není určena jednoznačně, ale rozdíl $\theta(t_2) - \theta(t_1)$ nezávisí na volbě θ.*

Důkaz: Zvolme dělení $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tak, aby pro každě $i \leq n$ vektory $T(t) : t_{i-1} \leq t \leq t_i$ byly obsaženy v jedné polokružnici. Určíme-li hodnotu $\theta(a)$ libovolně tak, aby $T(a) = (\cos\theta(a), \sin\theta(a))^T$, můžeme θ (jednoznačně) spojitě dodefinovat postupně na všech intervalech $[t_{i-1}, t_i]$. Jsou-li $\theta, \tilde{\theta}$ dvě takovéto funkce, pak platí $\theta(t) - \tilde{\theta}(t) = 2\pi m(t)$ pro $m(t) \in \mathbb{Z}$, $t \in I$. Ze spojitosti máme však $m(t) \equiv m$, a tedy $\theta(t_2) - \theta(t_1) = \tilde{\theta}(t_2) - \tilde{\theta}(t_1)$. □

Definice 2.27 (+ tvrzení) Buď $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ regulární uzavřená parametrizovaná křivka a θ funkce z předchozího Lemmatu. Číslo

$$n_c = \frac{\theta(b) - \theta(a)}{2\pi}$$

se nazývá *rotační index* křivky c. Rotační index je celé číslo a platí

$$n_c = \int_a^b k(t)|c'(t)|\,dt.$$

Důkaz: Z definice uzavřené křivky máme $T(a) = T(b)$, tedy $\theta(b) - \theta(a)$ je celým násobkem 2π. Poslední rovnost plyne z vlastnosti $\theta'(t) = \omega_{12}$ (Věta 2.20). □

Následující věta je sice intuitivně zřejmá, její formální důkaz však není triviální.

Věta 2.28 (Umlaufsatz) *Je-li c jednoduchá uzavřená regulárná parametrizovaná křivka, pak* $n_c = \pm 1$.

2.6.2 Konvexní křivky

Definice 2.29 Jednoduchá regulární uzavřená křivka c je *konvexní*, jestliže pro každé $t_0 \in [a, b]$ platí buď $(c(t) - c(t_0)) \cdot N(t_0) \leq 0$ pro všechna t, nebo $(c(t) - c(t_0)) \cdot N(t_0) \geq 0$ pro všechna t (neboli celý obraz křivky leží v jedné polorovině určené tečnou ke křivce v daném bodě).

Pozn.: Pro konvexní uzavřenou křivku $c : I \to \mathbb{R}$ nastává právě jedna z následujících možností:

1. $(c(t) - c(t_0)) \cdot N(t_0) \leq 0$ pro všechna $t_0, t \in I$,
2. $(c(t) - c(t_0)) \cdot N(t_0) \geq 0$ pro všechna $t_0, t \in I$.

Podle definice sice typ nerovnosti $(\leq, \geq)$ může záviset na t_0, jednoduchým použitím argumentu spojitosti ale nahlédneme, že se typ nerovnosti měnit nemůže.

Lemma 2.30 *Jednoduchá regulární uzavřená parametrizovaná křivka je konvexní, právě když její křivost nemění znaménko (tzn. je všude nezáporná nebo všude nekladná).*

Pozn.: Podmínka "$k \geq 0$ nebo $k \leq 0$ na I" je zřejmě ekvivaletní podmínce monotonie funkce θ z Lemmatu 2.26.

Důkaz: Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že křivka je parametrizována obloukem. Buď θ funkce z Lemmatu 2.26.

Předpokládejme nejprve, že c je konvexní, nechť platí třeba podmínka 1. z poznámky výše. Ukážeme, že je-li pro $t_1 < t_2$ splněna podmínka $\theta(t_1) = \theta(t_2)$, musí být θ konstantní na celém intervalu $[t_1, t_2]$. Z této vlastnosti již plyne, že θ je monotónní na $[a, b]$, a tedy že křivost nemění znaménko. Nechť tedy $\theta(t_1) = \theta(t_2)$ a označme $p_1 = c(u_1)$, $p_2 = c(u_2)$. Z definice konvexnosti křivky (a poznámky za ní) musí být úsečka $[p_1, p_2]$ kolmá na vektor $N := N(t_1) = N(t_2)$ a celý obraz křivky c leží v jedné polorovině vymezené přímkou určenou body p_1, p_2. Ukážeme, že celá úsečka $[p_1, p_2]$ leží v obrazu křivky c. Nechť (bez újmy na obecnosti) je $T(t_1) = T(t_2)$ kladným násobkem vektoru $p_2 - p_1$. Kdyby nějaký $q \in [p_1, p_2]$ neležel v obrazu c, pak by kolmice k $[p_1, p_2]$ vedená bodem q musela protínat obraz c. Je-li $t > t_1$ nejmenší parametr, pro nějž $c(t) - q$ je kolmý na $p_2 - p_1$, pak zřejmě $T(t) \cdot (p_2 - p_1) \geq 0$, a tedy $N(t) \cdot N \geq 0$. Pak ale přímka kolmá k $N(t)$ procházející bodem $c(t)$ ostře odděluje body p_1, p_2 obrazu křivky c, což je ve sporu s konvexitou křivky.

Nechť naopak c není konvexní, tedy existuje $t_0 \in I$ tak, že funkce $\phi(t) = (c(t) - c(T_0)) \cdot N(t_0)$ mění znaménko. Označme t_+, t_- body (jistě různé od t_0), kde ϕ nabývá maxima a minima. Je $\phi'(t_+) = \phi'(t_-) = \phi'(t_0) = 0$, tedy všechny tři vektory $T(t_+), T(t_-), T(t_0)$ jsou kolmé k $N(t_0)$, tudíž aspoň dva z nich se shodují. Označme t_1, t_2 tyto dva různé body, pro něž $T(t_1) = T(t_2)$; změnou parametru můžeme dosáhnout toho, že $t_1 = a$ (a pak $a < t_2 < b$). Pak máme $\theta(t_2) - \theta(a) = 2m_1\pi$ a $\theta(b) - \theta(t_2) = 2m_2\pi$ pro nějaká celá čísla m_1, m_2. Pokud by θ byla monotónní, muselo by být $m_1 m_2 > 0$ (θ je nekonstantní na $[a, t_2]$ i na $[t_2, b]$). Pak by ale nemohlo být $m_1 + m_2 = \pm 1$, což je důsledek Věty 2.28. Funkce θ tedy není monotónní a křivost mění znaménko. $\square$

Definice 2.31 Řekneme, že regulární parametrizovaná křivka $c : I \to \mathbb{R}^2$ má v bodě $t \in I$ *vrchol*, jestliže $k'(t) = 0$.

Věta 2.32 (O čtyřech vrcholech) *Regulární konvexní jednoduchá uzavřená parametrizovaná křivka má aspoň čtyři vrcholy.*

(bez důkazu)

2.6.3 Oblast omezená křivkou

Lemma 2.33 *Buď $c = (x, y) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená křivka. Pak $c([a, b])$ ohraničuje v $\mathbb{R}^2$ omezenou oblast Ω plochy*

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - x'y)dt$$

za předpokladu, že křivka je kladně orientovaná (tzn. vektor $E_2(s)$ směřuje vždy 'dovnitř' oblasti Ω).

Částečný důkaz: Zřejmě stačí dokázat první rovnost, neboť druhá plyne z první použitím integrace per partes a třetí je přímým důsledkem prvních dvou. Omezíme se na případ *konvexní* uzavřené jednoduché křivky c, tj. takové, že Ω je konvexní podmnožina $\mathbb{R}^2$. Kolmá projekce Ω na osu x je interval $[x_1, x_2]$ a průnikem obrazu křivky c s 'opěrnými přímkami' $x = x_1, x = x_2$ jsou po řadě lineární segmenty (eventuelně degenerované do jednoho bodu) $[c(t_1), c(t_2)]$, $[c(t_3), c(t_4)]$. Bez újmy na obecnosti můžeme předpokládat, že $t_4 = a$. Obrazy částí křivky $c \mid [a, t_1]$ a $c \mid [t_2, t_3]$ jsou pak grafy funkcí proměnné x, které označíme po řadě f_1, f_2. Plošný obsah A je pak roven

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)dx - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)dx$$

a po provedení substituce $x = x(t)$ dostaneme

$$A = -\int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt = -\int_a^b y(t)x'(t)dt,$$

neboť $x'(t) = 0$ podél segmentů rovnoběžných s osou y. Tím je žádaná rovnost dokázána.

Věta 2.34 (Isoperimetrická nerovnost) *Buď $c : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ jednoduchá uzavřená regulární parametrizovaná křivka délky L a omezující oblast plochy A v $\mathbb{R}^2$. Pak*

$$L^2 - 4\pi A \geq 0,$$

přitom rovnost nastane, právě když $c[a, b]$ je kružnice.

Nástin důkazu: Nerovnost zřejmě stačí ukázat pro konvexní uzavřenou jednoduchou křivku, neboť konvexní obal nekonvexní oblasti má vždy větší plochu a menší délku obvodu. Mějme tedy konvexní uzavřenou jednoduchou křivku parametrizovanou obloukem $c(s) = (x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$, umístěnou tak, že její kolmá projekce na osu x je $[-r, r]$ a $x(0) = r$, $x(s_1) = -r$. Dále označme

$$\bar{y}(s) = \begin{cases} \sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [0, s_1], \\ -\sqrt{r^2 - x(s)^2}, & s \in [s_1, L]. \end{cases}$$

$(x(s), \bar{y}(s))$ je parametrizace kružnice se středem v počátku a poloměrem r. Podle předchozího Lemmatu máme

$$A = \int_0^L xy'\,ds, \quad \pi r^2 = -\int_0^L \bar{y}x'\,ds,$$

tudíž

$$A + \pi r^2 = \int_0^L (xy' - \bar{y}x')ds.$$

Podle Schwartzovy nerovnosti

$$xy' - \bar{y}x' = \begin{pmatrix} x \\ -\bar{y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y' \\ x' \end{pmatrix} \le \sqrt{(x^2 + \bar{y}^2)(x'^2 + y'^2)} = \sqrt{x^2 + \bar{y}^2} = r,$$

máme tedy odhad

$$A + \pi r^2 \le Lr.$$

Podle známé nerovnosti mezi aritmetickým a geometrickým průměrem je

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \le \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \le \frac{1}{2}Lr,$$

a tedy $4\pi A r^2 \le L^2 r^2$, čímž je nerovnost dokázána.

Předpokládejme nyní, že nastal případ $L^2 = 4\pi A$. Z postupu důkazu je zřejmé, že musí být $A = \pi r^2$ (rovnost v AG-nerovnosti); pak ale $L = 2\pi r$ a tedy délka průmětu $2r$ nezávisí na směru promítání. Dále musí platit rovnost ve Schwartzově nerovnosti pro vektory $(x, -\bar{y})^T$, $(y', x')^T$, tedy $(x, -\bar{y})^T = \alpha(y', x')^T$ pro nějaké $\alpha \in \mathbb{R}$. Porovnáním délek obou vektorů dostaneme $\alpha = \pm r$, a tedy $x = \pm ry'$. Protože r nezávisí na směru promítání, můžeme zaměnit proměnné a platí též $y = \pm rx'$, z čehož plyne

$$x^2 + y^2 = r^2(x'^2 + y'^2) = r^2,$$

tedy obraz c je kružnice.

2.6.4 Integrální geometrie křivek

Úhlu $\varphi \in [0, \pi)$ přiřaďme přímku $p_\varphi = \langle(\cos\varphi, \sin\varphi)\rangle$ procházející počátkem. Každou přímku p z množiny $\mathcal{P}$ všech přímek v $\mathbb{R}^2$ pak lze vyjádřit jako $p = p_\varphi + z$, $z \in p_\varphi^\perp$, $\varphi \in [0, \pi)$. *Integrálně-geometrická míra* na množině $\mathcal{P}$ všech přímek je dána jako

$$dp = d(p_\varphi + z) = dz\,d\varphi$$

(tato míra je invariantní vůči shodnostem v rovině).

Věta 2.35 (Cauchy-Croftonův vzorec) *Buď $\Gamma = c(I) \subseteq \mathbb{R}^2$ obraz jednoduché regulární parametrizované křivky c délky L a $h : \Gamma \to [0, \infty)$ měřitelná funkce. Pak*

$$\int_{\mathcal{P}} \sum_{x \in \Gamma \cap p} h(x)\,dp = 2\int_\Gamma h\,d\sigma.$$

Speciálně pro $h \equiv 1$ dostáváme

$$\int_{\mathcal{P}} \mathrm{card}(\Gamma \cap p)\,dp = 2L$$

Pozn.: Věta platí pro daleko obecnější množiny Γ.

Věta plyne z následujícího Lemmatu, které je jistou analogií Fubiniho věty:

Lemma 2.36 *Za předpokladů předchozí věty platí*

$$\int_\Gamma h(x) \sin \angle(\varphi, T_x)\, d\sigma(x) = \int_{p_\varphi^\perp} \sum_{x \in \Gamma \cap (p_\varphi + z)} h(x)\, dz,$$

kde T_x je tečna ke Γ v x.

(Lemma se snadno dokáže pro případ, kdy Γ je úsečka a funkce h konstantní, dále se postupuje aproximací.)

3 Plochy

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1 *Parametrizovaná plocha* v $\mathbb{R}^3$ je diferencovatelné zobrazení

$$f : U \to \mathbb{R}^3,$$

kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$ a df_u je prosté pro každé $u \in U$. Dvourozměrný lineární prostor $df_u(\mathbb{R}^2)$ se nazývá *tečná rovina* a značí se $T_u f$. Množina $f(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ se nazývá *obraz* parametrizované plochy f.

Pozn.:

- Pod tečnou rovinou se často chápe afinní prostor $f(u) + df_u(\mathbb{R}^2)$.
- Vektory parciálních derivací $f_{u^1} = \frac{\partial f}{\partial u^1}$, $f_{u^2} = \frac{\partial f}{\partial u^2}$ jsou dle předpokladu lineárně nezávislé a tvoří bázi $T_u f$. Zobrazení df_u je bijekce $\mathbb{R}^2$ na $T_u f$.

Věta 3.2 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $\phi : V \to U$ difeomorfismus takový, že $\mathcal{J}\phi \neq 0$ na V. Pak $\tilde{f} = f \circ \phi$ je parametrizovaná plocha se stejným obrazem jako f.*

Definice 3.3 Zobrazení ϕ z předchozí věty se nazývá *změna parametru* plochy f. Je-li $\mathcal{J}\phi > 0$ na V, nazývá se *změnou parametru zachovávající orientaci.*

Pozn.: Záměna souřadnic $(v^1, v^2)^T \mapsto (v^2, v^1)^T$ je změnou parametru, která nezachovává orientaci.

Příklady:

1. $f(u^1, u^2) = \mathbf{a} + u^1\mathbf{b} + u^2\mathbf{c}$, $U = \mathbb{R}^2$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3)$ - rovina,
2. $f(u^1, u^2) = (\cos u^1 \cos u^2, \sin u^1 \cos u^2, \sin u^2)^T$, $U = \mathbb{R} \times (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ - jednotková sféra bez pólů,
3. $f(u^1, u^2) = (u^1, u^2, \sqrt{1 - (u^1)^2 - (u^2)^2})^T$, $U = \{(u^1)^2 + (u^2)^2 < 1\}$ - otevřená polosféra,
4. $f(u^1, u^2) = \big(p(u^1) \cos u^2, p(u^1) \sin u^2, q(u^1)\big)^T$, $U = I \times \mathbb{R}$ - rotační plocha (vznikne rotací regulární parametrizované křivky $u^1 \mapsto \big(p(u^1), 0, q(u^1)\big)^T$ ležící v rovině $\{x^2 = 0\}$ kolem osy x^1; předpokládáme $p \neq 0$ a $(p')^2 + (q')^2 > 0$.

Definice 3.4 *Plocha* v $\mathbb{R}^3$ je podmnožina $S \subseteq \mathbb{R}^3$ taková, že ke každému $x \in S$ existuje otevřené okolí $V \subseteq \mathbb{R}^3$ bodu x, otevřená množina $U \subseteq \mathbb{R}^2$ a diferencovatelné zobrazení $f : U \to V$ takové, že

1. f je homeomorfismus U na $V \cap S$,
2. df_u je prosté pro každé $u \in U$.

Lemma 3.5 *Buď $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otevřená a $h : U \to \mathbb{R}$ diferencovatelná funkce. Pak* $\operatorname{graf} h = \{(u, f(u)) : u \in U\}$ *je plocha.*

Důkaz: Zobrazení $f : u \mapsto (u, h(u))$ je diferencovatelné a prosté, rovněž df_u je prosté pro každé $u \in U$. Zobrazení f^{-1} z graf h na U je spojité, neboť je restrikcí spojitého zobrazení (projekce do prvních dvou souřadnic).

Definice 3.6 Buď $G \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená a $F : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná. Bod $x \in G$ je *kritickým bodem* funkce F, jestliže dF_x není surjektivní. $F(x)$ je pak *kritickou hodnotou* funkce F. $a \in \mathbb{R}$ je *regulární hodnotou* funkce F, jestliže $F^{-1}(a)$ neobsahuje žádný kritický bod F.

Věta 3.7 *Buď $G \subseteq \mathbb{R}^3$ otevřená, $F : G \to \mathbb{R}$ diferencovatelná taková, že 0 je regulární hodnota F. Pak $F^{-1}(0)$ je plocha.*

Důkaz: Buď $x_0 \in F^{-1}(0)$. Podle předpokladu je dF_{x_0} surjektivní, tedy existuje souřadnice (bez újmy na obecnosti předpokládejme, že x^3) taková, že $dF_{x_0}(e_3) = \frac{\partial F}{\partial x^3}(x_0) \neq 0$. Podle věty o implicitních funkcích existuje okolí U bodu (x_0^1, x_0^2), okolí V bodu x_0^3 a diferencovatelná funkce $g : U \to V$ tak, že $g(x_0^1, x_0^2) = x_0^3$ a $F(x^1, x^2, g(x^1, x^2)) = 0$ na U. $F^{-1}(0) \cap V$ je grafem funkce g, je tedy plochou podle předchozího Lemmatu. Protože tento postup lze provést pro každý bod $x \in F^{-1}(0)$, je $F^{-1}(0)$ plocha.

Příklady: Následující množiny jsou plochy v $\mathbb{R}^3$:

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ - sféra,
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - elipsoid,
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - jednodílný hyperboloid,
4. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ - eliptický paraboloid,
5. $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ - hyperbolický paraboloid,
6. $z = \frac{x^2}{a^2}$ - parabolický válec,
7. $(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2$ - torus $(a > b > 0)$.

Pod uvedenými názvy rozumíme samozřejmě i obrazy výše zadaných ploch při libovolné shodnosti. Plochy 1-6 se nazývají *kvadriky*.

Lemma 3.8 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, f prosté. Pak $f(U)$ je plocha.*

Důkaz: Vezměme $x_0 \in f(U)$. Protože f je prosté, existuje právě jeden $u_0 \in U$ s $f(u_0) = x_0$. Protože df_{u_0} je prosté, je (po případné záměně souřadnic) $\Pi \circ df_{u_0} = d(\Pi \circ f)_{u_0}$ bijekce, kde $\Pi : (x^1, x^2, x^3) \mapsto (x^1, x^2)$ je projekce do prvních dvou souřadnic. Podle věty o inverzním zobrazení tedy existuje okolí U_0 bodu u_0 tak, že $g = (\Pi \circ f) \mid U_0$ je difeomorfismus U_0 na $V_0 = g(U_0)$. $f(U) \cap \Pi^{-1}(V_0)$ je tedy grafem diferencovatelné funkce $f \circ g^{-1}$, je tedy plochou podle Lemmatu 3.5.

3.2 První fundamentální forma

Definice 3.9 Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $u \in U$. Bilineární formu $I_u(X, Y) = X \cdot Y$, $X, Y \in T_u f$, nazveme *první fundamentální formou* plochy v bodě $f(u)$. Vzor I_u při df_u je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$, kterou budeme značit

$$g_u(\xi, \zeta) = I_u\big(df_u(\xi), df_u(\zeta)\big) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta), \quad \xi, \zeta \in \mathbb{R}^2.$$

g_u nazveme *první fundamentální formou* plochy v bodě u a její matici označíme rovněž

$$g_u = \Big(g_u(e_i, e_j)\Big)_{i,j=1}^2 = \begin{pmatrix} f_{u^1} \cdot f_{u^1}, & f_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ f_{u^2} \cdot f_{u^1}, & f_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Pozn.: I_u je restrikcí skalárního součinu v $\mathbb{R}^3$ na T_uf, I_u i g_u jsou proto symetrické pozitivně definitní bilineární formy. Jak uvidíme dále, první fundamentální forma určuje metrické vlastnosti plochy.

Věta 3.10 *Je-li $u : I \to U$ regulární křivka v $U \subseteq \mathbb{R}^2$, je $c = f \circ u$ regulární křivka na ploše f a její délka je*

$$L = \int_I \sqrt{g_u\big(u'(t), u'(t)\big)}\, dt.$$

Důkaz: Vzorec pro délku plyne z Definice 2.5 a ze vztahu

$$c' = f_{u^1}(u^1)' + f_{u^2}(u^2)' = df_u(u').$$

Definice 3.11 *Plošným obsahem* parametrizované plochy f nazveme číslo

$$A = \int_U \sqrt{\det g_u}\, du.$$

Věta 3.12 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $\phi : V \to U$ změna parametru. Označme $\tilde{f} = f \circ \phi$ a $\tilde{I}$, $\tilde{g}$ první fundamentální formu příslušnou $\tilde{f}$. Pak pro $v \in V$ platí*

$$\begin{aligned} \tilde{I}_v &= I_{\phi(v)}, \\ \tilde{g}_v(\xi, \zeta) &= g_{\phi(v)}\big(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)\big). \end{aligned}$$

Důkaz: Tečná rovina samozřejmě nezávisí na parametrizaci, první rovnost plyne tedy přímo z definice první fundamentální formy. Druhá rovnost plyne ze vztahu pro diferenciál složeného zobrazení

$$d\tilde{f}_v = df_{\phi(v)} \circ d\phi_v.$$

Věta 3.13 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost. Označme $\bar{f} = S \circ f$ a $\bar{g}$ první fundamentální formu příslušnou $\bar{f}$. Pak pro $u \in U$ platí*

$$\bar{g}_u = g_u.$$

Důkaz: Podle pravidel derivování složeného zobrazení platí $d\bar{f}_u = S_0 \circ df_u$, kde $S_0(\cdot) = S(\cdot) - S(o)$ je lineární složka afinního zobrazení S. Protože S_0 zachovává skalární součin, dostaneme

$$\bar{g}_u(\xi, \zeta) = d\bar{f}_u(\xi) \cdot d\bar{f}_u(\zeta) = S_0(df_u(\xi)) \cdot S_0(df_u(\zeta)) = df_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = g_u(\xi, \zeta).$$

3.3 Normála a druhá fundamentální forma

Definice 3.14 Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha. Zobrazení

$$n : u \mapsto \frac{f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)}{\|f_{u^1}(u) \times f_{u^2}(u)\|}$$

z U do $\mathbb{R}^3$ se nazývá *Gaussovo zobrazení*.

Pozn.: n je diferencovatelné zobrazení. Jednotkový vektor $n(u)$ je kolmý k T_uf a nazývá se též normálový vektor k ploše v $f(u)$.

Lemma 3.15 *Pro každé $u \in U$ platí $dn_u(\mathbb{R}^2) \subseteq T_uf$.*

Důkaz: Derivováním rovnosti $n(u) \cdot n(u) = 1$.

Definice 3.16

1. Lineární zobrazení $L_u = -dn_u \circ (df_u)^{-1}$ z $T_u f$ do $T_u f$ se nazývá *Weingartenovo zobrazení.*

2. Bilineární forma $I\!I_u(X, Y) = (L_u X) \cdot Y$ na $T_u f$ se nazývá *druhá fundamentální forma plochy* v $f(u)$. Její vzor při df_u značíme

$$h_u(\xi, \zeta) = I\!I_u\big(df_u(\xi), df_u(\zeta)\big) = -dn_u(\xi) \cdot df_u(\zeta),$$

   což je bilineární forma na $\mathbb{R}^2$ s maticí

$$h_u = \begin{pmatrix} -n_{u^1} \cdot f_{u^1}, & -n_{u^1} \cdot f_{u^2} \\ -n_{u^2} \cdot f_{u^1}, & -n_{u^2} \cdot f_{u^2} \end{pmatrix}.$$

Věta 3.17 *h_u, a tedy i $I\!I_u$, je symetrická bilineární forma.*

Důkaz: Z rovnosti $f_{u^1} \cdot n = 0$ dostaneme $d\big(f_{u^1} \cdot n\big)_u(e_2) = 0$, tedy $d(f_{u^1})_u(e_2) \cdot n + f_{u^1} \cdot dn_u(e_2) = 0$, z čehož plyne

$$-f_{u^1} \cdot n_{u^2} = f_{u^1,u^2} \cdot n$$

(značíme $f_{u^i,u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$). Podobně odvodíme i $-f_{u^2} \cdot n_{u^1} = f_{u^2,u^1} \cdot n$, a ze záměnnosti smíšených derivací plyne $-f_{u^2} \cdot n_{u^1} = -f_{u^1} \cdot n_{u^2}$.

Pozn.: Z důkazu poslední věty je vidět, že matici druhé fundamentální formy lze vyjádřit ve tvaru

$$h_u = \begin{pmatrix} n \cdot f_{u^1,u^1}, & n \cdot f_{u^1,u^2} \\ n \cdot f_{u^1,u^2}, & n \cdot f_{u^2,u^2} \end{pmatrix}.$$

Věta 3.18 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $\phi : V \to U$ změna parametru. Pro normálu a druhou fundamentální formu plochy $\tilde{f} = f \circ \phi$ platí ($v \in V$)*

$$\begin{aligned} \tilde{n}(v) &= \pm n(\phi(v)), \\ \widetilde{I\!I}_v &= \pm I\!I_{\phi(v)}, \\ \tilde{h}_v(\xi, \zeta) &= \pm h_{\phi(v)}\big(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)\big), \end{aligned}$$

se znaménkem $+$, jedná-li se o změnu parametru zachovávající orientaci.

Důkaz: Označme $u = \phi(v)$. Protože $d\tilde{f}_v = df_u \circ d\phi_v$, platí

$$\tilde{f}_{v^1} \times \tilde{f}_{v^2} = (\det d\phi_v)\ f_{u^1} \times f_{u^2},$$

z čehož plyne první rovnost. Druhý a třetí vztah odvodíme z rovností

$$\begin{aligned} d\tilde{n}_v &= \pm dn_{\phi(v)} \circ d\phi_v, \\ \tilde{L}_v &= -d\tilde{n}_v \circ (d\tilde{f}_v)^{-1} = \mp dn_{\phi(v)} \circ (df_{\phi(v)})^{-1} = \pm L_{\phi(v)}. \end{aligned}$$

Věta 3.19 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost. Označme $\bar{f} = S \circ f$ a $\bar{h}$ druhou fundamentální formu příslušnou $\bar{f}$. Pak pro $u \in U$ platí*

$$\bar{h}_u = \pm h_u$$

se znaménkem $+$, jedná-li se o přímou shodnost.

Důkaz: Využijeme následující vlastnosti shodnosti: její lineární složka $S_0(\cdot) = S(\cdot) - S(o)$ komutuje s vektorovým součinem až na změnu znaménka, tj. pro $u, v \in \mathbb{R}^3$ platí $S_0(u) \times S_0(v) = \pm S_0(u \times v)$, se znaménkem $+$, jedná-li se o přímou shodnost (ověří se z definice vektorového součinu). V důsledku této vlastnosti je pak $\bar{n}(u) = \pm S_0(n(u))$, a tedy

$$\bar{h}_u(\xi, \zeta) = -d\bar{n}_u(\xi) \cdot d\bar{f}_u(\zeta) = - \mp S_0(dn_u(\xi)) \cdot S_0(df_u(\zeta)) = \mp dn_u(\xi) \cdot df_u(\zeta) = \pm h_u(\xi, \zeta).$$

Příklady:

1. f buď parametrizace části sféry se středem v počátku a poloměrem r. Pak je zřejmě $n(u) = \pm r^{-1} f(u)$, tedy $dn_u = \pm r^{-1} df_u$, $L_u(X) = -dn_u \circ (df_u)^{-1}(X) = \pm r^{-1} X$, a tedy

$$I\!I_u(X, Y) = \pm r^{-1} X \cdot Y$$

(znaménko závisí na orientaci sféry).

2. Je-li f parametrizací části válce $\{(x^1)^2 + (x^2)^2 = r^2\}$, máme $n(u) = \pm r^{-1}\Pi(f(u))$, kde Π je kolmá projekce do roviny $\{x^3 = 0\}$. Je tedy $dn_u = \pm r^{-1}\Pi \circ df_u$, $L_u(X) = \pm r^{-1}\Pi(X)$ a

$$I\!I_u(X, Y) = \pm r^{-1}\Pi(X) \cdot Y.$$

3.4 Křivky na ploše

Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $u : I \to U$ regulární parametrizovaná křivka, takže $c = f \circ u$ je regulární parametrizovaná křivka na ploše f. Předpokládejme, že c je parametrizace obloukem a κ, T, N je křivost a vektor tečny a hlavní normály příslušný křivce c.

Věta 3.20 $I\!I_{u(s)}\big(c'(s), c'(s)\big) = \kappa(s)\Big(n(u(s)) \cdot N(s)\Big)$, $s \in I$.

Důkaz: Plyne z rovností

$$I\!I_{u(s)}\big(c'(s), c'(s)\big) = h_{u(s)}\big(u'(s), u'(s)\big) = n(u(s)) \cdot c''(s) = \kappa(s)\Big(n(u(s)) \cdot N(s)\Big),$$

prostřední rovnost dostaneme derivováním rovnosti $(n \circ u) \cdot c' = 0$.

Věta 3.21 (Meusnier) *$\theta(s) \in [0, \frac{\pi}{2}]$ buď úhel mezi normálou $n(u(s))$ k ploše a oskulační rovinou křivky c v bodě $c(s)$. Pak*

$$|I\!I_{u(s)}\big(c'(s), c'(s)\big)| = \kappa(s) \cos\theta(s), \quad s \in I.$$

Definice 3.22 $f : U \to \mathbb{R}^3$ buď parametrizovaná plocha, $u \in U$, $o \neq X \in T_u f$. Pak číslo

$$k_N(X) = \frac{I\!I_u(X, X)}{I_u(X, X)}$$

nazveme *normálovou křivostí* plochy v bodě $f(u)$ a ve směru X.

Pozn.:

1. Zřejmě platí $k_N(\alpha X) = k_N(X)$ pro každé $\alpha \neq 0$, k_N je tedy skutečně funkcí 'směru' $\langle X \rangle = \{\alpha X : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

2. Z Meusnierovy věty plyne, že $|k_N(X)|$ je křivost křivky ležící v řezu plochy rovinou $\langle X, n(u) \rangle$ v bodě $f(u)$.

3.5 Hlavní směry a hlavní křivosti plochy

Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a zvolme $u \in U$ pevně. Označme

$$S_u f = \{X \in T_u f : \|X\| = 1\}.$$

Funkci k_N můžeme přirozeně chápat jako funkci na $S_u f$; jako spojitá funkce na kompaktu zde musí nabývat minima a maxima.

Definice 3.23 $X \in S_u f$ (resp. $\langle X \rangle$) je *hlavním směrem* plochy f v $f(u)$, jestliže k_N nabývá extrému v X. Hodnota $k_N(X)$ se pak nazývá *hlavní křivostí* plochy v $f(u)$.

Pozn.: X je hlavní směr, právě když $-X$ je hlavní směr.

Hledání hlavních směrů a hlavních křivostí: Jedná se o úlohu na vázaný extrém

$$\min / \max\{I\!I_u(X, X) : I_u(X, X) = 1\},$$

ekvivalentně

$$\min / \max\{h_u(\xi, \xi) : g_u(\xi, \xi) = 1\}.$$

Metodou Lagrangeových multiplikátorů se úloha převede na hledání nevázaného extrému funkce

$$\Lambda(\xi, \lambda) = h_u(\xi, \xi) - \lambda\big(g_u(\xi, \xi) - 1\big), \quad \xi \in \mathbb{R}^2, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Funkce Λ je diferencovatelná, pokud tedy nabývá v (ξ, λ) extrému, musí platit

$$d\Lambda_{(\xi,\lambda)}(\eta, 0) = 2h_u(\xi, \eta) - 2\lambda g_u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{pro všechna } \eta \in \mathbb{R}^2,$$

v maticovém zápisu

$$\eta^T(h_u - \lambda g_u)\xi = 0, \quad \eta \in \mathbb{R}^2.$$

Poslední podmínka nastane, právě když

$$(h_u - \lambda g_u)\xi = o, \tag{1}$$

což může nastat jedině když

$$\det(h_u - \lambda g_u) = 0. \tag{2}$$

Věta 3.24 *Jsou-li $\lambda_1 \neq \lambda_2$ dvě řešení (2) a ξ_1, ξ_2 odpovídající řešení (1), platí $g_u(\xi_1, \xi_2) = 0$ (neboli hlavní směry odpovídající různým hlavním křivostem jsou vzájemně kolmé).*

Důkaz: Odečtením rovnic (důsledek (1))

$$\begin{aligned} \xi_2^T(h_u - \lambda_1 g_u)\xi_1 &= 0, \\ \xi_1^T(h_u - \lambda_2 g_u)\xi_2 &= 0. \end{aligned}$$

Pozn.: Z rovnice 1 plyne, že hlavní směry $X_i = df_u(\xi_i)$ jsou vlastní vektory Weingartenova zobrazení L_u odpovídající vlastním číslům λ_i, neboli $L_u(X_i) = \lambda_i X_i$.

Mohou nastat tyto případy:

1. Rovnice (2) má jediné řešení λ_1, pak $\lambda_1 = k_N(X)$ pro všechna $X \in S_u f$ (každý směr je hlavním směrem):
   (a) $\lambda_1 = 0$, $f(u)$ je *planární bod* plochy,
   (b) $\lambda_1 \neq 0$, $f(u)$ je *kruhový bod* plochy.

2. Rovnice (2) má dvě řešení $\lambda_1 < \lambda_2$, odpovídající hlavní směry X_1, X_2 ($X_i = df_u(\xi_i)$) jsou navzájem kolmé:
   (a) $\lambda_1\lambda_2 > 0$, $f(u)$ je *eliptický bod* plochy,
   (b) $\lambda_1\lambda_2 = 0$, $f(u)$ je *parabolický bod* plochy,
   (c) $\lambda_1\lambda_2 < 0$, $f(u)$ je *hyperbolický bod* plochy.

Definice 3.25 Funkce $K(u) = \lambda_1(u)\lambda_2(u)$ se nazývá *Gaussova křivost* a $H(u) = \frac{\lambda_1(u)+\lambda_2(u)}{2}$ *střední křivost* plochy. (Je-li jediná hlavní křivost, klademe $\lambda_2 = \lambda_1$.)

Věta 3.26 *Platí následující vzorce pro výpočet Gaussovy a střední křivosti pomocí matic první a druhé fundamentální formy:*

$$K(u) = \frac{\det h_u}{\det g_u}, \tag{3}$$

$$H(u) = \frac{g_u^{11}h_u^{22} + g_u^{22}h_u^{11} - 2g_u^{12}h_u^{12}}{2\det g_u} \tag{4}$$

Důkaz: Vzorce se odvodí přímo z (2).

Věta 3.27 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $\phi : V \to U$ změna parametru. Pak pro křivosti parametrizované plochy $\tilde{f} = f \circ \phi$ platí ($v \in V$)*

$$\tilde{K}(v) = K(\phi(v)), \quad \tilde{H}(v) = \pm H(\phi(v)),$$

se znaménkem + v případě změny parametru zachovávající orientaci.

Věta 3.28 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ shodnost. Pak pro křivosti parametrizované plochy $\bar{f} = S \circ f$ platí ($u \in U$)*

$$\bar{K}(u) = K(u), \quad \bar{H}(u) = \pm H(u).$$

Lemma 3.29 *Buď f parametrizovaná plocha s nenulovou druhou fundamentální formou. Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f na okolí bodu $u_0 \in U$*

$$T_2 f(u) = f(u_0) + df_{u_0}(u - u_0) + \frac{1}{2}d^2 f_{u_0}(u - u_0, u - u_0)$$

je parametrizací kvadriky, a to:

1. *eliptického paraboloidu v případě $K(u_0) > 0$,*
2. *parabolického válce v případě $K(u_0) = 0$,*
3. *hyperbolického paraboloidu v případě $K(u_0) < 0$.*

Důkaz: V první řadě si uvědomme, že obraz parametrizované plochy $T_2 f$ se nezmění při změně parametru plochy f. Na dostatečně malém okolí bodu $f(u_0)$ můžeme plochu parametrizovat jako graf funkce nad tečnou rovinou $T_{u_0}f$, přitom za souřadnice parametru $v \in T_{u_0}f$ zvolíme jeho souřadnice vůči ortonormální bázi $\{X_1, X_2\}$ tvořené hlavními směry plochy f v u_0. Dotyčná parametrizace pak je

$$\tilde{f}(v^1, v^2) = f(u_0) + v^1 X_1 + v^2 X_2 + \beta(v^1, v^2)n,$$

kde $n \equiv n(u_0)$ je jednotkový vektor normály k ploše v $f(u_0)$ a β je nějaká diferencovatelná funkce na $T_{u_0}f$. Derivováním dostaneme $d\beta_o = 0$ a

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial v^i \partial v^j}(o) = d^2 f_{u_0}(\xi_i, \xi_j) \cdot n(u_0) = I\!I_{u_0}(X_i, X_j) = L_{u_0}(X_i) \cdot X_j = \lambda_i(X_i \cdot X_j),$$

kde $X_i = df_{u_0}\xi_i$, tedy

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial(v^1)^2}(o) = \lambda_1, \quad \frac{\partial^2\beta}{\partial(v^2)^2}(o) = \lambda_2, \frac{\partial^2\beta}{\partial v^1 \partial v^2}(o) = \frac{\partial^2\beta}{\partial v^2 \partial v^1}(o) = 0.$$

Pro Taylorův rozvoj funkce $\tilde{f}$ v o pak dostaneme

$$T_2\tilde{f}(v^1, v^2) = f(u_0) + v^1 X_1 + v_2 X_2 + \Big(\lambda_1(v^1)^2 + \lambda^2(v^2)^2\Big)n,$$

což je zřejmě parametrizace kvadriky $z = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2$ v souřadnicích vůči ortonormální bázi $\{X_1, X_2, n\}$.

Definice 3.30

1. Křivky $u^1 \mapsto f(u^1, u^2)$ (u^2 pevné) a $u^2 \mapsto f(u^1, u^2)$ (u^1 pevné) se nazývají *parametrické křivky* plochy f.

2. Křivka $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^3$ na ploše je *hlavní křivkou*, jestliže $c'(t)$ je hlavním směrem pro každé $t \in I$. Křivka na ploše je hlavní, právě když vyhovuje diferenciální rovnici

$$\big(h_{u(t)} - \lambda_i g_{u(t))}\big)u'(t) = 0, \quad t \in I. \tag{5}$$

Věta 3.31 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha.*

1. *Parametrické křivky jsou hlavními křivkami, právě když matice první i druhé fundamentální formy jsou diagonální, tj. když $g_u^{12} = h_u^{12} = 0$ pro $u \in U$.*

2. *Ke každému $u \in U$ existuje okolí U_0 a změna parametru $\phi : V \to U_0$ tak, že parametrické křivky plochy $\tilde{f} = f \circ \phi$ jsou zároveň hlavními křivkami.*

(bez důkazu)

3.6 Asymptotické směry a asymptotické křivky

Definice 3.32 $\langle X \rangle \subseteq T_u f$ je *asymptotický směr* parametrizované plochy f v bodě $f(u)$, jestliže $I\!I_u(X, X) = 0$ pro každý $X \in \langle X \rangle$ (asymptotickým směrem budeme nazývat i každý takový vektor X). Analogicky $\xi \in \mathbb{R}^2$ je asymptotický směr f v bodě u, jestliže $h_u(\xi, \xi) = 0$.

Věta 3.33 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha a $u \in U$.*

1. *Je-li $K(u) > 0$, neexistuje v u žádný asymptotický směr.*

2. *Je-li $K(u) < 0$, existují v u právě dva různé asymptotické směry.*

3. *Je-li $K(u) = 0$ a $0 = \lambda_1(u) \neq \lambda_2(u)$, existuje v u právě jeden asymptotický směr, který je zároveň hlavním směrem.*

4. *Je-li $K(u) = 0$ a $0 = \lambda_1(u) = \lambda_2(u)$, je v u každý směr asymptotický.*

Definice 3.34 Křivka $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^3$ na parametrizované ploše f je *asymptotická křivka*, jestliže $c'(t)$ je asymptotický směr pro každé $t \in I$. Asymptotická křivka vyhovuje diferenciální rovnici

$$h_{u(t)}\big(u'(t), u'(t)\big) = 0, \quad t \in I. \tag{6}$$

3.7 Přímkové plochy

Definice 3.35 Parametrizovaná plocha $f : U \to \mathbb{R}^3$ se nazývá *přímková (parametrizovaná) plocha*, jestliže existuje regulární křivka $c : I \to \mathbb{R}^3$ a diferencovatelné zobrazení $X : I \to \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ tak, že $U \subseteq I \times \mathbb{R}$ a

$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 X(u^1), \quad (u^1, u^2) \in U.$$

Je-li navíc $n_{u^2} = 0$ na U (normálové pole je konstantní podél generátorů), nazveme f *rozvinutelnou.* Plochu $S \subseteq \mathbb{R}^3$ nazveme *přímkovou (rozvinutelnou) plochou*, jestliže ke každému $x \in S$ existuje okolí V bodu x v $\mathbb{R}^3$ a přímková (rozvinutelná) parametrizovaná plocha $f : U \to \mathbb{R}^3$ taková, že $f(U) = S \cap V$.

Věta 3.36 *Buď $f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 X(u^1)$ přímková parametrizovaná plocha.*

1. *Přímky $u^1 = \text{const.}$ (generátory) jsou asymptotickými křivkami.*
2. *$K(u) \leq 0$, $u \in U$.*
3. *f je rozvinutelná, právě když $f_{u^1 u^2}(u) \in T_u f$, $u \in U$.*
4. *f je rozvinutelná, právě když $K(u) = 0$, $u \in U$.*

Důkaz:

1. Plyne z $I\!I(f_{u^2}, f_{u^2}) = n \cdot f_{u^2, u^2} = 0$.
2. Z předchozí úvahy dostáváme $h^{11} = 0$, tedy $K = -\frac{(h^{12})^2}{\det_g} \leq 0$.

3,4. Protože $n_{u^2} \cdot f_{u^2} = 0$, platí

$$n_{u^2} = 0 \iff n_{u^2} \cdot f_{u^1} = 0 \iff n \cdot f_{u^1 u^2} = 0 \iff h^{12} = 0 \iff K = 0.$$

Příklady:

1. Plocha tečen obecné regulární parametrizované křivky
$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 c'(u^1)$$
je rozvinutelná parametrizovaná plocha.
2. Zobecněná válcová plocha
$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 X$$
je rozvinutelná parametrizovaná plocha.
3. Plocha binormál obecné regulární křivky parametrizované obloukem
$$f(u^1, u^2) = c(u^1) + u^2 B(u^1)$$
je přímková parametrizovaná plocha, která není rozvinutelná.
4. Šroubová plocha
$$f(u^1, u^2) = \left(u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, a u^1\right)^T \quad (a > 0)$$
je přímková parametrizovaná plocha, která není rozvinutelná.
5. Jednodílný hyperboloid $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ je přímková plocha (parametrizace $f(u^1, u^2) = \big(\cos u^2 - u^1 \sin u^2, \sin u^2 + u^1 \cos u^2, u^1\big)^T$).

3.8 Izometrie ploch

Definice 3.37 Parametrizované plochy $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}^3$ a $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}^3$ jsou *izometrické*, jestliže existují změny parametrů $\phi_1 : U \to U_1$ a $\phi_2 : U \to U_2$ takové, že první fundamentální formy $\tilde{g}_1$, $\tilde{g}_2$ příslušné $\tilde{f}_1 = f \circ \phi_1$ a $\tilde{f}_2 = f \circ \phi_2$ se shodují na U.

Pozn.: Je-li f_1 homeomorfismus, můžeme definovat zobrazení $\Psi = \tilde{f}_2 \circ \tilde{f}_1^{-1}$, které zobrazuje obraz plochy f_1 na obraz plochy f_2. Toto zobrazení je tzv. lokální difeomorfismus (tj. na nějakém okolí každého bodu definičního oboru je restrikcí difeomorfismu v $\mathbb{R}^3$) a jeho diferenciál zachovává skalární součin.

Příklady.

1. Válcová plocha
$$f(u^1, u^2) = (a \cos u^1, a \sin u^1, u^2)^T, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$
je izometrická rovině.

2. Kuželová plocha
$$f_1(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, bu^2)^T, \quad u^1 \in \mathbb{R}, u^2 > 0,$$
je izometrická rovině bez počátku
$$f_2(v^1, v^2) = (v^2 \cos v^1, v^2 \sin v^1, 0)^T, \quad v^1 \in \mathbb{R}, v^2 > 0$$
(změna parametru $u^1 = \sqrt{1+b^2}v^1$, $u^2 = v^2/\sqrt{1+b^2}$).

3. Šroubová plocha
$$f_1(u^1, u^2) = (u^2 \cos u^1, u^2 \sin u^1, au^1)^T, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2,$$
je izometrická katenoidu
$$f_2(v^1, v^2) = a(\cosh v^2 \cos v^1, \cosh v^2 \sin v^1, v^2)^T, \quad (u^1, u^2) \in \mathbb{R}^2$$
(změna parametru $u^1 = v^1, u^2 = a \sinh v^2$).

Věta 3.38 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, jejíž Gaussova křivost je rovna 0 na U. Pak ke každému $u \in U$ existuje okolí U_0 v U tak, že restrikce $f \mid U_0$ je izometrická části roviny (neboli f je 'lokálně izometrická' rovině).*

(bez důkazu)

Pozn.: Z předchozí věty plyne, že každá rozvinutelná plocha je lokálně izometrická rovině.

3.9 Vnitřní vlastnosti plochy a Gaussova věta

Vnitřní vlastnosti plochy jsou vlastnosti dané její první fundamentální formou (zobrazením $u \mapsto I_u$, resp. $u \mapsto g_u$, $u \in U$). Všechny vnitřní vlastnosti se tedy zachovávají při izometrickém zobrazení. Ne všechny charakteristiky plochy jsou však vnitřní, například Gaussovo zobrazení $u \mapsto n(u)$ není dáno první fundamentální formou (viz šroubová plocha a katenoid v Příkladu 3 Kapitoly 3.8).

V celé kapitole bude dána parametrizovaná plocha $f : U \to \mathbb{R}^3$. Budeme používat úsporné značení parciálních derivací pomocí dolních indexů, tedy např. $f_i = f_{u^i} = \frac{\partial f}{\partial u^i}$, $f_{ij} = f_{u^i, u^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j}$, $n_i = n_{u^i} = \frac{\partial n}{\partial u^i}$, $i, j = 1, 2$, a tak podobně. Podobně jako dříve budeme značit g^{ij}, h^{ij} koeficienty matic první a druhé fundamentální formy g, h a a^{ij} budou koeficienty inverzní matice $a = g^{-1}$, $i, j = 1, 2$.

Pro každé $u \in U$ tvoří vektory f_1, f_2, n bázi (obecně ne ortogonální) prostoru $\mathbb{R}^3$. Najdeme koeficienty vektorů n_i a f_{ij} vůči této bázi.

Lemma 3.39 *Pro $i, j = 1, 2$ platí*
$$n_i = -\sum_k \sum_l h^{il} a^{lk} f_k, \tag{7}$$
$$f_{ij} = \sum_k \Gamma^k_{ij} f_k + h^{ij} n, \tag{8}$$

kde

$$\Gamma^k_{ij} = \sum_l a^{kl}(f_{ij}\cdot f_l) \tag{9}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_l a^{kl}\left(g^{il}_j + g^{jl}_i - g^{ij}_l\right) \tag{10}$$

(zde opět značíme $g^{ij}_l = \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^l}$*). Koeficienty* Γ^k_{ij} *se nazývají* Christoffelovy symboly.

Důkaz: Rovnosti (7,8) se ověří skalárním násobením obou stran vektory f_1, f_2, n. Rovnost výrazů (9) a (10) ověříme dosazením za derivace g^{ij}_k.

Podle předpokladu je f diferencovatelné zobrazení, má tedy záměnné smíšené parciální derivace třetího řádu

$$f_{ijk} = f_{ikj}, \quad i,j,k = 1,2.$$

Upravíme-li tento vztah s využitím (8), dostaneme

$$\sum_l \left(\Gamma^l_{ij,k} f_l + \Gamma^l_{ij} f_{lk}\right) + h^{ij}_k n + h^{ij} n_k = \sum_l \left(\Gamma^l_{ik,j} f_l + \Gamma^l_{ik} f_{lj}\right) + h^{ik}_j n + h^{ik} n_j.$$

Dosadíme-li opět podle (8) a (7) dostaneme

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_l \left(\Gamma^l_{ij,k} - \Gamma^l_{ik,j}\right) f_l + (h^{ij}_k - h^{ik}_j) n \\ &+ \sum_l \Gamma^l_{ij}\Big(\sum_m \Gamma^m_{lk} f_m + h^{lk} n\Big) - \sum_l \Gamma^l_{ik}\Big(\sum_m \Gamma^m_{lj} f_m + h^{lj} n\Big) \\ &- h^{ij}\sum_l\sum_m h^{kl} a^{lm} f_m + h^{ik}\sum_l\sum_m h^{jl} a^{lm} f_m. \end{aligned}$$

Porovnáním koeficientů u f_m a n dostaneme následující rovnice.

Věta 3.40 *Pro* $i,j,k,m = 1,2$ *platí vztahy*

$$\Gamma^m_{ij,k} - \Gamma^m_{ik,j} + \sum_l \left(\Gamma^l_{ij}\Gamma^m_{lk} - \Gamma^l_{ik}\Gamma^m_{lj}\right) = \sum_l a^{lm}\left(h^{ij}h^{kl} - h^{ik}h^{jl}\right) \tag{11}$$

(Gaussova rovnice) a

$$\sum_l \left(\Gamma^l_{ij} h^{lk} - \Gamma^l_{ik} h^{lj}\right) + h^{ij}_k - h^{ik}_j = 0 \tag{12}$$

(Codazzi-Mainardiho rovnice).

Nyní můžeme vyslovit větu o existenci plochy se zadanými funkcemi první a druhé fundamentální formy (analogie Věty 2.15).

Věta 3.41 (Bonet) *Buď* $U \subseteq \mathbb{R}^2$ *jednoduše souvislá otevřená množina* g, h *symetrické maticové* (2×2) *funkce definované na* U *takové, že* g *je pozitivně definitní a jsou splněny rovnice* (11), (12) *na* U*. Pak existuje parametrizovaná plocha* $f: U \to \mathbb{R}^3$ *s maticemi první a druhé fundamentální formy* g, h*. Tato plocha je určena jednoznačně až na shodnost.*

(Bez důkazu.)

Dosadíme-li do pravé strany Gaussovy rovnice (11) hodnoty $i = j = 1$ a $k = m = 2$, dostaneme

$$\sum_l a^{l2}\left(h^{11}h^{2l} - h^{12}h^{1l}\right) = a^{22}\det h = g^{11}\frac{\det h}{\det g} = g^{11}K,$$

kde K je Gaussova křivost plochy v daném bodě (viz Věta 3.26). Jako důsledek tohoto pozorování dostáváme slavnou Gaussovu větu.

Věta 3.42 (Theorema Egregium) *Pro Gaussovu křivost parametrizované plochy platí*

$$K = (g^{11})^{-1}\left(\Gamma^2_{11,2} - \Gamma^2_{12,1} + \sum_l \left(\Gamma^l_{11}\Gamma^2_{l2} - \Gamma^l_{12}\Gamma^2_{l1}\right)\right).$$

Speciálně tedy Gaussova křivost je funkcí první fundamentální formy, čili je vnitřní vlastností plochy.

Důsledek 3.43 *Izometrické parametrizované plochy mají v odpovídajících bodech stejnou Gaussovu křivost.*

Poznámka: Věta 3.38 říká, že předchozí důsledek lze v případě nulové Gaussovy křivosti obrátit. Obecně tomu tak ale není, jak ukazuje následující příklad: plochy

$$\begin{aligned} f(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, \ln u)^T, \\ \tilde{f}(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, v)^T, \quad u>0, v\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

mají shodnou Gaussovu křivost, ale nejsou izometrické.

3.10 Geodetiky na ploše

Motivace. Mějme parametrizovanou plochu $f: U\to\mathbb{R}^3$ a regulární parametrizovanou křivku $c = f\circ u$ na ploše f. Hledáme podmínky zaručující, že křivka c spojuje nejkratším možným způsobem libovolné své dva různé dostatečně blízké body. Pozměníme málo křivku c na okolí nějakého bodu výchylkou ve směru tečném k rovině a kolmém k tečně křivky:

$$c_\varepsilon(t) = c(t) + \varepsilon\alpha(t)(c'(t)\times N(t)),$$

kde $N(t) = n(u(t))$, $\varepsilon>0$ malé a $\alpha(t)$ je libovolná nezáporná diferencovatelná funkce. Délka části křivky c_ε je $\int_{I'}\|c'_\varepsilon\|$. Chceme, aby tato délka byla minimální pro $\varepsilon=0$ při libovolné volbě funkce α, což znamená podmínku

$$\frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} = 0,$$

$\alpha\geq 0$ libovolná. Máme

$$c'_\varepsilon = c' + \varepsilon\alpha'(c'\times N) + \varepsilon\alpha(c''\times N) + \varepsilon\alpha(c'\times N'),$$

tedy

$$\frac{d}{d\varepsilon}\|c'_\varepsilon\|\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{c'\cdot\Big(\alpha'(c'\times N) + \alpha(c''\times N) + \alpha(c'\times N')\Big)}{\|c'\|} = \alpha\{c', c'', N\}.$$

Poslední výraz je roven 0 pro libovolnou α, právě když smíšený součin $\{c', c'', N\} = 0$.

Definice 3.44 Regulární křivka $c = f\circ u : I\to\mathbb{R}^3$ na parametrizované ploše f se nazývá *geodetikou*, jestliže smíšený součin $\{c'(t), c''(t), n(u(t))\} = 0$ pro každé $t\in I$.

Pozn.: Vlastnost křivky 'být geodetikou na ploše' je zřejmě invariantní vůči změně parametru křivky i plochy.

Příklady

1. V rovině jsou geodetiky právě všechny přímky. Část přímky je geodetikou na libovolné ploše.

2. Na jednotkové sféře
$$f(u^1,u^2) = (\cos u^1\cos u^2, \sin u^1\cos u^2, \sin u^2)^T$$
jsou geodetiky právě všechny 'velké kružnice', tj. kružnice maximálního poloměru 1.

3. Na válcové ploše

$$f(u^1, u^2) = (\cos u^1, \sin u^1, u^2)^T$$

jsou geodetiky 'spirály' parametrizované např. $u^1 = \alpha_1 t + \beta_1$, $u^2 = \alpha_2 t + \beta_2$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ (tyto křivky odpovídají přímkám po 'rozbalení' plochy do roviny).

Definice 3.45 Buď $c = f \circ u$ regulární parametrizovaná křivka na parametrizované ploše $f : U \to \mathbb{R}^3$ a $X : I \to \mathbb{R}^3$ diferencovatelné zobrazení (vektorové pole podél křivky c). *Kovariantní derivací* vektorového pole X podél křivky c nazveme zobrazení

$$\frac{\nabla X}{dt} : t \mapsto \Pi_{u(t)}(X'(t)),\ t \in I,$$

kde Π_u je operátor kolmé projekce $\mathbb{R}^3$ do $T_u f$.

Definice 3.46 Řekneme, že regulární křivka na ploše $c = f \circ u$ je *parametrizovaná geodetika*, platí-li $\frac{\nabla c'}{dt}(t) = o$, $t \in I$.

Lemma 3.47 *Buď $c = f \circ u$ regulární parametrizovaná křivka na parametrizované ploše $f : U \to \mathbb{R}^3$. Je ekvivalentní:*

1. *c je parametrizovaná geodetika,*
2. *vektor $c''(t)$ je násobkem normálového vektoru plochy $n(u(t))$ pro každé $t \in I$,*
3. *c je geodetika a její parametrizace splňuje $\|c'(t)\| = \text{konst}$.*

Důkaz: Ekvivalence prvních dvou podmínek plyne přímo z definice parametrizované geodetiky. Dále je zřejmé, že z (2) plyne, že c je geodetika. Pro geodetiku je však ekvivalentní

$$c''(t) \perp T_{u(t)} f \iff c' \cdot c'' = 0 \iff \|c'(t)\|' = \frac{c' \cdot c''}{\|c'\|} = 0 \iff \|c'\| = \text{konst.},$$

z čehož plyne ekvivalence druhé a třetí podmínky.

Rovnice pro parametrizované geodetiky. Buď $c = f \circ u$ regulární křivka na ploše f. Derivováním rovnosti

$$c' = (u^1)' f_{u^1} + (u^2)' f_{u^2}$$

dostaneme

$$\begin{aligned} c'' &= \sum_i (u^i)'' f_{u^i} + \sum_i \sum_j (u^i)' \Big(\sum_k \Gamma_{ij}^k f_{u^k} + \beta_{ij} n \Big) (u^j)' \\ &= \sum_k^2 \Big((u^k)'' + \sum_i^2 \sum_j^2 (u^i)' (u^j)' \, \Gamma_{ij}^k \Big) f_{u^k} + \sum_i \sum_j \beta_{i,j} n \end{aligned}$$

(Γ_{ij}^k jsou Christoffelovy symboly, viz Lemma 3.39). Z tohoto vyjádření plyne, že křivka $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^3$ je parametrizovaná geodetika, právě když vyhovuje diferenciálním rovnicím na I

$$\begin{aligned} (u^1)'' + \textstyle\sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)' \, \Gamma_{ij}^1 &= 0, \\ (u^2)'' + \textstyle\sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)' \, \Gamma_{ij}^2 &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Poznámka: Z rovnic (13) je vidět, že vlastnost 'být geodetikou' je vnitřní vlastností plochy. Speciálně tedy izometrickým obrazem geodetiky je opět geodetika (jinými slovy, jsou-li $f, \tilde{f} : U \to \mathbb{R}^3$ dvě parametrizované plochy se shodnou první fundamentální formou, pak $c = f \circ u$ je geodetikou na f, právě když $\tilde{c} = \tilde{f} \circ u$ je geodetikou na $\tilde{f}$).

Geodetická křivost. Buď $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^3$ regulární křivka na ploše f. Definujme repér $t \mapsto \{E_1^g(t), E_2^g(t)\}$ tak, že $E_1^g(t) = E_1(t) = c'(t)/\|c'(t)\|$ a $\{E_1^g(t), E_2^g(t)\}$ je ortonormální báze tečné roviny $T_{u(t)}f$ stejné orientace jako $\{f_{u^1}(u), f_{u^2}(u)\}$ pro každé $t \in I$. (Zřejmě $E_2^g(t) = n(u(t)) \times E_1(t)$.) *Geodetickou křivost* křivky c definujeme předpisem

$$k_g(t) = \Big(\frac{\nabla E_1^g}{dt}(t) \cdot E_2^g(t)\Big)/\|c'(t)\|, \quad t \in I.$$

Poznámky:

1. Dá se snadno ukázat, že absolutní hodnota geodetické křivosti nezávisí na parametrizaci plochy ani křivky, zatímco její znaménko lze změnit změnou orientace jak křivky, tak plochy.

2. Z definice je zřejmé, že křivka c je geodetikou, právě když její geodetická křivost je nulová.

Pro 'obyčejnou' křivost křivky v $\mathbb{R}^3$ parametrizované obloukem platí $\kappa(s) = \|c''(s)\|$. Z definice geodetické křivosti snadno odvodíme následující tvrzení.

Věta 3.48 *Pro obecnou křivku $c = f \circ u$ parametrizovanou obloukem platí*

$$|k_g(s)| = \|\Pi_{u(s)}(c''(s))\| = \kappa(s)\sin\theta(s), \quad s \in I,$$

kde $\kappa(s)$ je křivost křivky c v $\mathbb{R}^3$ a $\theta(s) \in [0, \pi/2]$ je úhel mezi normálou plochy a oskulační rovinou křivky.

Využijeme-li Meusnierovu větu (Důsledek 3.21) a nezávislost křivostí na parametrizaci, dostáváme

Důsledek 3.49 *Pro obecnou křivku $c = f \circ u$ platí následující vztah mezi obyčejnou a geodetickou křivostí křivky a normálovou křivostí plochy:*

$$\kappa^2(t) = k_N^2(c'(t)) + k_g^2(t), \quad t \in I.$$

Je zřejmé, že poslední rovnost platí i pro případ kdy c je část přímky.

Na závěr uvedeme ještě větu o existenci geodetik zadaných vlastností. K důkazu, který neuvádíme, je třeba použít věty o řešení soustav parciálních diferenciálních rovnic.

Věta 3.50 *Buď $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, $u_0 \in U$.*

1. *Ke každému vektoru $o \neq X \in T_u f$ existuje právě jedna parametrizovaná geodetika $c = f \circ u : I \to \mathbb{R}^3$ taková, že $u(0) = u_0$ a $c'(0) = X$.*

2. *Existuje okolí U_0 bodu u tak, že každá geodetika $c = f \circ u$ s $u(I) \subseteq U_0$ je nejkratší spojnicí na ploše libovolných dvou svých bodů (jinými slovy, délka libovolné křivky na ploše spojující dva body $c(a), c(b)$, $a, b \in I$, je větší nebo rovna délce geodetiky $c \mid [a, b]$ a rovnost nastává pouze v případě, kdy obrazy obou křivek splývají).*

Poznámka: Tvrzení 2. skutečně platí jen lokálně: z příkladu válcové plochy je zřejmé, že libovolné dva její body, které neleží na společné 'rovnoběžce' (kružnici kolmé k ose válce), lze spojit nekonečně mnoha geodetickými křivkami ('spirálami') libovolně velké délky.

Cvičení:

1. Uvažujte torus, který vznikne rotací kružnice $(x - a)^2 + z^2 = b^2$, $y = 0$ kolem osy z $(a > b > 0)$. Určete, které kružnice na toru jsou geodetickými (asymptotickými, hlavními) křivkami.

2. Ukažte, že křivka na ploše, která je hlavní i geodetickou křivkou, je křivkou rovinnou.

3. Ukažte, že křivka na ploše, která je asymptotickou i geodetickou křivkou, je částí přímky.

4. Ukažte, že každá regulární parametrizovaná křivka v $\mathbb{R}^3$ je geodetickou křivkou na ploše svých binormál.

3.11 Riemannova geometrie

Buď $S(2)$ množina všech reálných symetrických pozitivně definitních matic 2×2. $S(2)$ můžeme považovat za otevřenou podmnožinu $\mathbb{R}^3$ (symetrická matice 2×2 je dána svými třemi prvky), můžeme tedy hovořit o diferencovatelnosti zobrazení s hodnotami v $S(2)$.

Definice 3.51 *Riemannovým prostorem* rozumíme dvojici (U, g), kde U je otevřená podmnožina $\mathbb{R}^2$ a $g : U \to S(2)$ je diferencovatelné zobrazení. Zobrazení g nazýváme *Riemannovou metrikou* na U. Dva Riemannovy prostory (U, g) a $(V, \tilde{g})$ jsou *ekvivalentní*, jestliže existuje difeomorfismus $\phi : V \to U$ takový, že

$$g_{\phi(v)}(d\phi_v(\xi), d\phi_v(\zeta)) = \tilde{g}_v(\xi,\zeta), \quad \xi,\zeta \in \mathbb{R}^2,\ v \in V.$$

Poznámka: Je-li $f : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizovaná plocha, pak samozřejmě (U, g) je Riemannovým prostorem. Obráceně však neplatí, že každý Riemannův prostor odpovídá nějaké ploše v $\mathbb{R}^3$.

Všechny vnitřní charakteristiky a vlastnosti ploch, jimiž jsme se zabývali, lze převést na Riemannovy prostory. Základním pojmem je *délka* (regulární parametrizované) *křivky* $u : I \to U$

$$L(u) = \int_I \sqrt{(u')^T g_u u'}\, dt.$$

Vztahem (10) definujeme Christoffelovy symboly a rovnicemi (13)

$$\begin{aligned} (u^1)'' + \textstyle\sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)'\,\Gamma^1_{ij} &= 0,\\ (u^2)'' + \textstyle\sum_i \sum_j (u^i)'(u^j)'\,\Gamma^2_{ij} &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

parametrizované geodetiky v (U, g). Geodetiky v Riemannově prostoru se často nazývají přímkami. Pomocí Věty 3.42 lze též definovat Gaussovu křivost v U.

Poznámka: Je-li množina U souvislá, můžeme definovat vzdálenost $\rho(u, v)$ dvou bodů $u, v \in U$ jako infimum délek všech křivek v U spojujících u a v. Snadno se ověří, že ρ je metrika (ve smyslu metrických prostorů) na U. Množinu všech bodů v (U, g) s konstantní vzdáleností $r > 0$ od daného bodu $u_0 \in U$, nazveme kružnicí se středem v u_0 a poloměrem r.

Příklad: Riemannův prostor $H^2 = (U, g)$ s $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ a $g^{11}_u = g^{22}_u = y^{-2}$, $g^{12}_u = 0, u \in U$, se nazývá *hyperbolická rovina*, nebo též (Lobačevského) hyperbolická geometrie. Přímkami (geodetikami) v H^2 jsou právě všechny euklidovské polopřímky kolmé k ose x a euklidovské polokružnice se středem na ose x. Gaussova křivost je konstantní a rovna -1.

Literatura

1. L. Boček: *Příklady z diferenciální geometrie.* Univerzita Karlova, Praha 1974
2. L. Boček, V. Kubát: *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* Státní pedagogické nakladatelství, Praha 1983
3. J. Bureš, K. Hrubčík: *Diferenciální geometrie křivek a ploch.* MFF UK, Praha 1998
4. M.P. do Carmo: *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey 1976
5. W. Klingenberg: *A Course in Differential Geometry.* Springer-Verlag, New York 1978