

# STŘEDOŠKOLSKÁ ODBORNÁ ČINNOST

OBOR 02

## ZOBECNĚNÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC DO ČTYŘROZMĚRNÉHO PROSTORU

VYPRACOVAL:  
*Výška Martin, sexta A*

**2007**

GYMNÁZIUM NAD ALEJÍ

NAD ALEJÍ 1952, PRAHA 6

## ANOTACE

V této práci jsem se snažil popsat mechanismus zobecnění fyzikálních zákonů do čtyřrozměrného prostoru (prostoru se čtyřmi prostorovými dimenzemi) a následně jsem tento mechanismus použil na Maxwellovy rovnice a s nimi související zákony elektromagnetismu. První podkapitola druhé kapitoly má za úkol vysvětlit potřebnou problematiku vektorové analýzy, tenzorového počtu a speciální teorie relativity, konkrétně čtyřvektorů a zobecněných diferenciálních operátorů. Ve druhé podkapitole jsem shrnul základní informace o Maxwellových rovnicích ve 3-D, jejich význam, integrální a diferenciální tvar a poté vyjádření pomocí potenciálů. Konečně ve třetí podkapitole jsem popsal převedení Maxwellových rovnic do relativistického tvaru, který je nutný pro přidání dalšího prostorového rozměru. Ve třetí kapitole jsem rozšířil relativistické rovnice o jeden prostorový rozměr a následně odseparoval jejich časové a prostorové části. Poté jsem tyto nové rovnice porovnal s původními Maxwellovými rovnicemi. Na konci kapitoly uvádím nástin zobecnění do dalších rozměrů. Ve čtvrté kapitole jsem získané výsledky využil k odvození základních zákonů, jako jsou Coulombův a Biot-Savartův, ve čtyřrozměrném prostoru a jejich porovnání s těmito zákony, tak jak je známe. Tyto odvozené zákony jsem poté předvedl na jednoduchých příkladech, jako je např. tvar tenzoru magnetického pole v blízkosti nekonečně dlouhého vodiče ve čtyřrozměrném prostoru.

Prohlašuji tímto, že jsem soutěžní práci vypracoval samostatně pod vedením Jana Olšiny a v seznamu literatury uvedl veškerou použitou literaturu.

V Praze dne 21. 3. 2007

---

vlastoruční podpis autora

## 1. ÚVOD

1.1. Úvod .....	4
1.2. Poděkování .....	4
1.3. Přehled použitého značení .....	4

## 2. ÚVOD DO PROBLEMATIKY

2.1. Úvod do vektorového a tenzorového počtu .....	5
a) Vektorová analýza .....	5
b) Tenzory, pseudovektory .....	7
c) Zobecněné diferenciální operátory ve 4-D časoprostoru, čtyřvektory .....	8
2.2. Maxwellovy rovnice v trojrozměrném prostoru .....	9
a) Integrální a diferenciální tvar Maxwellových rovnic .....	9
b) Vyjádření Maxwellových rovnic pomocí potenciálů .....	12
c) Rovnice kontinuity pro náboj, pohybová rovnice .....	13
2.3. Relativistický zápis Maxwellových rovnic .....	14
a) Maxwellovy rovnice a tenzor elektromagnetického pole .....	14
b) Kalibrační podmínka, rovnice kontinuity pro náboj .....	17

## 3. ZOBECNĚNÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC DO 4-D PROSTORU

3.1. Rozšíření v relativistickém zápisu .....	18
a) Rozšíření pomocí potenciálů a zobecněných rotací .....	18
b) Tvar tenzoru elektromagnetického pole ve 4-D .....	19
3.2. Separace časové a prostorové části .....	20
3.3. Nástin zobecňování do dalších rozměrů .....	22

## 4. APLIKACE ČTYŘROZMĚRNÝCH MAXWELLOVÝCH ROVNIC

4.1. Coulombův zákon .....	23
4.2. Magnetické pole ve čtyřech rozměrech, výpočet magnetického pole přímkového vodiče .....	24

## 5. ZÁVĚR

5.1. Závěr .....	28
------------------	----

## 6. SEZNAM LITERATURY

6.1. Seznam literatury .....	29
------------------------------	----

# 1. ÚVOD

## 1.1. Úvod

Cílem mojí práce je seznámit čtenáře s Maxwellovými rovnicemi, které představují čtyři základní zákony elektromagnetismu. Chtěl bych je uvést v jejich diferenciální i integrální formě a poté ukázat, jak je lze převést do čtyřrozměrného prostoru (tzn. přidáním jednoho prostorového rozměru) a uvést hlavní rozdíly mezi těmito rovnicemi ve třírozměrném a čtyřrozměrném prostoru. Je to sice neaplikovatelné na náš vesmír, ale považuji to za zajímavé zobecnění, které by mohlo mít jisté využití. Z těchto čtyřrozměrných rovnic jsem poté odvodil analogie základních zákonů pro výpočet elektrického a magnetického pole jako je Coulombův zákon a Biot-Savartův zákon ve čtyřrozměrném tvaru. Poté bych chtěl ukázat aplikaci těchto odvozených vztahů na různých jednoduchých příkladech. V kapitolách jedna a dva je stručně shrnutí známých poznatků o Maxwellových rovnicích. Ve třetí kapitole pak začíná vlastní převod do 4-D prostoru. Pro pochopení práce je nutná znalost diferenciálního počtu.

## 1.2. Poděkování

Chtěl bych poděkovat studentovi MFF Janu Olšinovi, nejen za to, že u mě vzbudil zájem o toto téma, ale také za poskytnutou pomoc v průběhu psaní práce, která by bez něj zřejmě vůbec nevznikla.

## 1.3. Přehled použitého značení

Čtyřrozměrným prostorem myslím prostor, v němž má souřadnicový systém čtyři navzájem na sebe kolmé osy.

V celém textu budu pro vektorová pole psát místo  $\mathbf{A}(t, x_1, x_2, x_3, (x_4))$  pouze  $\mathbf{A}$  z důvodu úspory místa, kde osy  $ct, x, y, z$  jsou často značeny jako  $x_0, x_1, x_2, x_3$  a  $x_4$  značí čtvrtou prostorovou osu ve 4-D (čtyřrozměrném prostoru). Vektory jsou psány tučně, nebo s volným indexem, např.

$$A_i = (x_1, x_2, x_3, (x_4)).$$

Všechny indexy  $(i, j, k)$  jdou od jedné do tří ve 3-D a od jedné do čtyř ve 4-D, pouze řecké indexy  $(m, n, k)$  jdou vždy od nuly, kde nula je časová složka čtyřvektoru (tenzoru), tedy např.  $A_m = (A_0, A_1, A_2, A_3, (A_4))$ .

V celém textu je používána Einsteinova sumační konvence, pokud jsou v jednom výrazu v součinu dva stejné indexy, automaticky se přes ně sčítá např. ve 3-D

$$A_i B_i = \sum_{i=1}^3 A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 \quad \text{nebo}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3}.$$

Totéž platí i pro řecké indexy, jen se u nich sčítá od nuly. Pokud jsou však stejné indexy např.

u sčítání nebo odčítání, nesčítá se přes ně, např. ve výrazu  $\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i}$  jsou oba indexy,  $i$  a  $j$ ,

volné – nesčítá se přes ně.

## 2. ÚVOD DO PROBLEMATIKY

### 2.1. Úvod do vektorového a tenzorového počtu

Tato kapitola je výběrem z literatury a klade si za cíl shrnutí problematiky vektorového a tenzorového počtu, potřebné pro pochopení práce.

#### a) Vektorová analýza

Základním nástrojem pro popis elektromagnetismu jsou vektorová pole. Vektorové pole je funkce, která každému bodu prostoru přiřadí určitý vektor, např:  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x_1, x_2, x_3)$  je pole, které každému bodu 3-D prostoru přiřadí určitý vektor  $\mathbf{A}$ . Vektorová analýza se zabývá diferenciálním počtem těchto vektorových polí. Prvním důležitým nástrojem vektorové analýzy je tzv. gradient pole, který působí na skalární pole a vytváří z něj pole vektorové. Gradient pole  $S$  zapisujeme jako  $\text{grad } S$  nebo  $\nabla S$ , kde symbol  $\nabla$  „nabla“ je vektorový

operátor, definovaný jako  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)$ . Pro gradient pole  $S$  tedy platí

$$\text{grad } S = \nabla S = \left( \frac{\partial S}{\partial x_1}, \frac{\partial S}{\partial x_2}, \frac{\partial S}{\partial x_3} \right).$$

Gradient pole  $S$  nám tedy dá vektorové pole, kde jednotlivé vektory budou vždy ukazovat ve směru největšího růstu  $S$ . Pokud budeme mít např. vztah pro potenciál bodového náboje

umístěného v počátku  $\mathbf{j} = \frac{k}{r}$  kde  $k$  je určitá konstanta a  $r$  je vzdálenost od počátku a

spočítáme jeho záporný gradient, dostaneme

$$-\nabla j = -k \left( \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x_1}, \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x_2}, \frac{\partial \left( \frac{1}{r} \right)}{\partial x_3} \right) = \frac{k}{r^3} (x_1, x_2, x_3) = \frac{k}{r^3} \mathbf{r} = \mathbf{E},$$

což je vztah pro intenzitu elektrického pole. Z kulově symetrického skalárního pole, které klesalo podle  $1/r$  tedy dostaneme radiální vektorové pole, které míří ve směru růstu skalárního pole a klesá jako  $1/r^2$ . Tento vztah mezi potenciálem a elektr. polem je definicí potenciálu.

Další důležitá operace s poli se nazývá divergence pole. Působí vždy na vektorová pole a značí se  $\text{div } \mathbf{A}$  nebo také  $\nabla \cdot \mathbf{A}$ . Divergence pole se spočítá jako

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \frac{\partial A_i}{\partial x_i}.$$

Výsledkem divergence je tedy skalární pole, které říká, jak moc v daném místě vektorové pole vzniká. To je logické, pokud budou všechny tři derivace kladné, pak pole v daném místě musí vznikat (protože roste), na druhou stranu pokud je divergence pole nula, znamená to, že v daném bodě je buď pole ve všech směrech konstantní, nebo je jedna z derivací kladná a druhá stejně velká, ale záporná, tzn. že to co se ztratí ve směru jedné osy naopak přibude ve směru osy druhé. V obou těchto případech nemá pole v daném místě žádný zdroj, nic tam nevzniká.

S divergencí vektorového pole je spojena integrální věta, jež se nazývá Gaussova věta a říká, že

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dV = \iint_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.1)$$

To znamená, že všechno co vznikne v daném objemu  $V$ , vyteče ven uzavřenou plochou  $S$ , ohraničující tento objem. Také říká, že pokud se zdroj nenachází v objemu vyhraničeném plochou  $S$ , je jeho příspěvek k toku plochou  $S$  nulový. Např. pro bodový náboj, umístěný v počátku souřadnicové soustavy, platí, že divergence pole  $\mathbf{E}$  je všude nulová, kromě nuly, kde je nekonečná. To se dá snadno dokázat přímým výpočtem  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  jako

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \left( \frac{x_i}{r^3} \right)}{\partial x_i} = k \left( \frac{1}{r^3} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial \left( \frac{1}{r^3} \right)}{\partial x_i} \right) = k \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} \sum_{i=1}^3 x_i \frac{\partial r}{\partial x_i} \right) = k \left( \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right),$$

což je nula všude, kromě  $r = 0$ . Takže pole bodového náboje vzniká právě jenom tam, kde se nachází tento náboj, což dává smysl.

Dalším a zatím posledním základním nástrojem vektorové analýzy je rotace. Působí opět na vektorová pole a značí se  $\operatorname{rot} \mathbf{A}$  nebo také  $\nabla \times \mathbf{A}$ . Vektorové součiny obecně se často ve složkách zapisují takto:  $A_i = \epsilon_{ijk} B_j C_k$  kde  $\epsilon_{ijk}$  se nazývá Levi-Civitův symbol a nabývá hodnot nula, pokud jsou jakékoli dva indexy stejné, jedna, pokud jsou 123 a změní znaménko při každé výměně indexů.

Zapůsobením operátoru rotace na vektorové pole tedy dostaneme opět vektorové pole se složkami

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right).$$

Rotace vektorového pole určuje (jak už název napovídá) jak pole cirkuluje, jak rotuje, kolem daného bodu. Je vidět, že pokud jsou v nějakém bodě prostoru změny pole podle dvou os přesně stejné, je rotace ve směru zbývající osy nulová. S rotací je spojena další integrální věta, nazvaná Stokesova, která vypadá následovně

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_L \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l}. \quad (2.2)$$

Říká, že tok rotace vektorového pole skrz plochu  $S$  určuje jeho cirkulaci podél křivky  $L$ , ohraničující tuto plochu. Jako příklad rotace uvedu magnetické pole v okolí přímkového vodiče vedoucího elektrický proud. Pro velikost magnetického pole ve vzdálenosti  $r$  od

vodiče platí  $|\mathbf{B}| = \frac{k}{r}$ , kde vektor magnetického pole je všude kolmý na  $\mathbf{r}$ . Pro pole tedy platí:

$\mathbf{B} = \frac{k}{r} \mathbf{n}$ , kde  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = n_1 x_1 + n_2 x_2 = 0$  a zároveň platí  $n_1^2 + n_2^2 = 1$  z těchto podmínek určíme  $\mathbf{n}$  a

následně složky magnetického pole jako  $B_1 = -\frac{kx_2}{r^2}$  a  $B_2 = \frac{kx_1}{r^2}$ . Jediná nenulová složka

rotace je ta ve směru třetí osy (té, po které teče proud), protože v obou zbývajících je buď  $B_3$  nebo derivace podle  $x_3$  a ty jsou nulové.

Pro třetí složku rotace máme

$$(\text{rot } \mathbf{B})_3 = \frac{\partial B_2}{\partial x_1} - \frac{\partial B_1}{\partial x_2} = k \left( \frac{\partial \left( \frac{x_1}{r^2} \right)}{\partial x_1} + \frac{\partial \left( \frac{x_2}{r^2} \right)}{\partial x_2} \right) = k \left( \frac{2}{r^2} - \frac{2x_1}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x_1} - \frac{2x_2}{r^3} \frac{\partial r}{\partial x_2} \right) = k \left( \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \right).$$

Což je nulové všude, kromě místa, kde teče proud (nuly). Jak bude později vidět ze čtvrté Maxwellovy rovnice, jinak to ani být nemůže.

## b) Tenzory, pseudovektory

V této podkapitole bych chtěl shrnout problematiku tenzorů, v míře potřebné pro vlastní práci. Stejně jako vektor je sloupec (řádek)  $n$  čísel, který po zapůsobení na jiný vektor dá skalár (skalárním součinem), tak tenzor druhého řádu (vyšší řády nejsou v práci potřeba) je matice  $n \times n$ , která po zapůsobení na vektor dá jiný vektor. Je důležité říci, že pokud platí vektorová rovnice v jedné soustavě, pak platí i ve všech vztažných soustavách. Pokud indexem  $i$  značíme řádek matice a indexem  $j$  sloupec, vypadá součin tenzoru  $\mathbf{B}$  s vektorem  $\mathbf{A}$ , psán ve složkách, takto:  $B_{ij} A_j = C_i$

Prostě se nejprve skalárně vynásobí první řádek matice s vektorem a vznikne číslo, jež je první složkou vektoru  $\mathbf{C}$ , poté druhý řádek s vektorem atd. Tenzorové pole je tedy pole, které každému bodu prostoru přiřadí nějaký tenzor. Takové pole se reálně projeví, až když začne působit na nějaký vektor, stejně jako když např. magnetické pole nijak silově nepůsobí na náboj, dokud se náboj nezačne pohybovat rychlostí  $\mathbf{v}$ . V tu chvíli už má vektor, na který může působit a vytváří sílu. Tímto se dostávám k další věci, o které se chci zmínit a to je fakt, že magnetické pole je ve skutečnosti tenzorovým polem.

Vektorové rovnice by neměly měnit svůj tvar při transformaci souřadnic, např. při rotaci souřadnicového systému. Je to proto, že vektor by měl být z definice invariantní vůči právě třeba rotaci souřadnic. Pokud se však blíže podíváme na jakýkoliv vektorový součin, zjistíme, že tyto požadavky nesplňuje. Např. síla působící na jednotkový náboj, pohybující se rychlostí  $\mathbf{v} = (1, 0, 0)$  v homogenním magnetickém poli  $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$  se spočte jako

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} = (0, 1, 0).$$

To je v pořádku, síla působí jen ve směru osy  $y$ , je tedy kolmá na magnetické pole i na rychlost. Jenže problémy nastanou při transformaci. Řekněme, že otočíme všechny tři souřadnicové osy. Nové vektory v nové soustavě budu značit čárkovaně. Platí:

$$\mathbf{F}' = \mathbf{v}' \times \mathbf{B}' = (-\mathbf{v}) \times (-\mathbf{B}) = \mathbf{F}$$

Síla se tedy nezměnila, pořád míří stejným směrem, kladným. Jenže to je nesmysl, protože oba vektory  $\mathbf{B}$  i  $\mathbf{v}$  míří nyní záporným směrem. Síla měla změnit znaménko také, mířit záporným směrem. Problém je v tom, že magnetické pole není pravý vektor. Ve skutečnosti každý vektorový součin obsahuje jeden nepravý vektor, tzv. pseudovektor, protože vektorový součin, který by obsahoval samé pravé vektory se netransformuje správně. Magnetické pole se dá invariantně vyjádřit antisymetrickým tenzorem s devíti složkami a označujeme ho jako  $\vec{\mathbf{B}}$ .

Jeho složky dostaneme tak, že vynásobíme vektor magnetického pole Levi-Civitovým symbolem a počítáme pro stejné indexy (tomuto postupu se říká duální operace)

$$B_{ij} = e_{ijk} B_k = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 \\ -B_3 & 0 & B_1 \\ B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Antisymetrie tenzoru spočívá v tom že jeho diagonála je nulová a je podle ní symetrický, až na opačná znaménka. Nyní můžeme psát správný vztah pro sílu:

$$\mathbf{F} = -\mathbf{v} \cdot \overset{\nabla}{\mathbf{B}}$$

Pokud teď otočíme souřadnicové osy, výsledná síla bude mít opačné znaménko než původní, protože u rychlosti se znaménko změní, ale u tenzoru sudého řádu ne. Musí se totiž změnit ve směru každého z indexů, a protože indexy jsou dva, dvě mínuska dají plus. Proč tedy můžeme pracovat s magnetickým polem jako s vektorem, když se ve skutečnosti jedná o tenzor? Je to sice tenzor ale má pouze tři různé složky (další tři pouze s obráceným znaménkem), a proto si ve třírozměrném prostoru můžeme tyto tři složky představovat jako složky vektoru a také tak s nimi počítat.

### c) Zobecněné diferenciální operátory ve 4-D (klasickém) časoprostoru, čtyřvektory

Tyto operátory, stejně tak jako čtyřvektory, budou potřeba pro převod Maxwellových rovnic do relativistického tvaru, který je důležitý pro samotné přidání prostorového rozměru, je to jediná známá cesta, jak nový rozměr přidat. Někdy se dává záporné znaménko k časové souřadnici, někdy k prostorovým. Já je budu mít tak, jak jsou v literatuře [1]. Čtyřvektor je veličina, která se při Lorentzově transformaci transformuje jako vektor, a která má tři prostorové a jednu časovou složku a značí se  $a_m = (a_t, \mathbf{a})$ .

Lorentzova transformace pro rovnoměrný pohyb rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$  má tvar

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad y' = y,$$

$$z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Při Lorentzově transformaci je invariantní velikost prostoročasového intervalu  $(ds)^2$ , který má tvar:

$$(cdt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2 = (cdt')^2 - (dx')^2 - (dy')^2 - (dz')^2$$

Jelikož prostoročasový interval představuje příklad čtyřvektoru  $(cdt, -dx, -dy, -dz)$  a protože všechny čtyřvektory se z definice musí transformovat stejně, platí toto pro velikost jakéhokoli čtyřvektoru. Pokud budeme mít dvojici čtyřvektorů, budou se jejich složky transformovat stejně, jako

$$a_t b_t - a_x b_x - a_y b_y - a_z b_z.$$

To představuje skalární součin dvou čtyřvektorů, který se zapisuje takto

$$a_m b_m = a_t b_t - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Čtyřrozměrný gradient musí ze skalárního pole dělat čtyřvektorové pole a vypadá následovně

$$\nabla_m = \left( \frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla \right). \quad (2.4)$$

Mínus je u prostorových derivací proto, aby se vzniklé pole transformovalo správně podle Lorentzovy transformace. Pokud máme např. skalární pole  $S$  jako funkci  $x$  a  $t$  a vypočítáme jeho malou změnu  $\Delta S$  při malé změně času ( $x$  je konst.) z hlediska stojícího pozorovatele a pohybujícího se pozorovatele, dostaneme

$$\Delta S = -\frac{\partial S}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial S}{\partial t'} \Delta t' = \frac{\partial S}{\partial t} \Delta t,$$

kde čárkované souřadnice značí souřadnice pohybujícího se pozorovatele. Když nyní dosadíme za tyto čárkované souřadnice nečárkované pomocí Lor. transformace, dostaneme

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \left( \frac{\partial S}{\partial t'} + v \frac{\partial S}{\partial x'} \right),$$

což je přesně v souladu s Lorentzovou transformací. Protože jsme tedy přidali do vztahu pro  $\Delta S$  před prostorovou derivací mínus, dostali jsme složky čtyřvektorového pole.

Divergence čtyřvektoru je definována jako

$$\nabla_m a_m = \frac{1}{c} \frac{\partial a_t}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{a}, \quad (2.5)$$

mínusy u gradientu a skalárního součinu se vyruší a dostaneme plus.

Ve třírozměrném prostoru máme tzv. Laplaceův operátor, definovaný jako

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.6)$$

Pokud uděláme to samé s  $\nabla_m$  dostaneme d'Alembertův operátor  $\mathbf{W}$ , pro který platí

$$\mathbf{W} = \nabla_m \nabla_m = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2, \quad (2.7)$$

a který je také skalární a invariantní vůči Lorentzově transformaci.

## 2.2. Maxwellovy rovnice v trojrozměrném prostoru

Maxwellovy rovnice jsou jedním z pilířů teoretické fyziky a mají pro ni obrovský význam. Představují spojení elektrických, magnetických a optických jevů do jedné teorie elektromagnetického pole. Díky nim objevil H. A. Lorentz svoji transformaci a následně vznikla Speciální teorie relativity. V této kapitole bych chtěl ukázat, jak tyto rovnice vypadají a co nám říkají.

### a) Integrální a diferenciální tvar Maxwellových rovnic

1. Maxwellova rovnice, které se říká také Gaussův zákon elektrostatiky, vypadá v diferenciálním tvaru takto

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{e_0}, \quad (2.8)$$

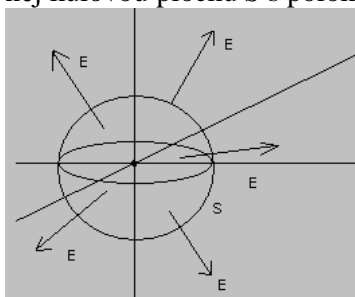
kde  $\mathbf{E}$  je intenzita elektrického pole,  $\mathbf{r}$  je prostorová hustota elektrického náboje a  $e_0$  je permitivita vakua. Tato rovnice ve stručnosti říká to, že elektrické pole vzniká tam, kde je přítomen elektrický náboj.

Aplikováním Gaussovy věty (2.1) dostaneme tuto rovnici v integrálním tvaru

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{Q}{\epsilon_0} = \oint_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.9)$$

kde  $\mathbf{n}$  je jednotkový normálový vektor na plochu  $S$  a náboj  $Q$  je celkový náboj v objemu ohraničeném touto plochou. Tedy tok intenzity elektrického pole uzavřenou plochou  $S$  nezáleží vůbec na rozložení náboje v objemu, který tato plocha ohraničuje, ale jen a pouze na jeho velikosti (a také na prostředí v němž se objem a plocha nachází).

Pokud se bude nacházet náboj  $Q$  v počátku souřadnicového systému a představíme si kolem něj kulovou plochu  $S$  s poloměrem  $r$ , jako na obrázku (obr. 2.1)



obr. 2.1

Jelikož pole  $\mathbf{E}$  je stejné všude po povrchu celé této plochy a také je na ni kolmé, přejde plošný integrál do tvaru

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = ES = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

A protože povrch koule o poloměru  $r$  je  $S = 4\pi r^2$  dostaneme po dosazení

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}.$$

A jelikož pole je radiální, tak ve vektorovém tvaru

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \mathbf{r}, \quad (2.10)$$

což je známý vztah pro intenzitu elektrického pole – Coulombův zákon.

## 2. Maxwellova rovnice zní

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.11)$$

neboli, že magnetické pole nikde nevzniká, nemá žádný zdroj – neexistují magnetické náboje.

Opět použitím Gaussovy věty (2.1) dostaneme tuto rovnici v integrálním tvaru

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Ať si tedy představíme jakoukoli libovolnou plochu, tok magnetického pole touto plochou bude nulový (protože uvnitř této plochy nemůže být žádný zdroj).

## 3. Maxwellova rovnice, která se též nazývá Faradayův indukční zákon, vypadá takto

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.12)$$

Říká, že časová změna magnetického pole způsobuje rotaci elektrického a naopak.

Důsledky této rovnice jsou lépe vidět v integrálním tvaru, který se dá odvodit použitím

Stokesovy věty (2.2) jako

$$\int_S \operatorname{rot} \mathbf{E} dS = -\int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}.$$

Pokud si zavedeme uzavřenou křivku  $L$  a označíme tok magnetického pole plochou ohraničenou touto křivkou jako  $\Omega$ , pak se integrální tvar této rovnice dá zapsat jako

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Omega}{dt}. \quad (2.13)$$

Takže budeme mít např. smyčku z drátu a tou budeme otáčet v homogenním magnetickém poli, vznikne na smyčce nenulový křivkový integrál intenzity el. pole a tedy napětí. To je elektromagnetická indukce.

4. Maxwellova rovnice, neboli Ampérův zákon, zní

$$\text{rot } \mathbf{B} = m_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (2.14)$$

kde  $m_0$  je permeabilita vakua, pro kterou platí vztah (odvozený právě z Maxwellových rovnic)

$$c^2 = \frac{1}{m_0 e_0}. \quad (2.15)$$

$c$  je rychlost světla ve vakuu a  $\mathbf{j}$  je plošná hustota proudu, která je definována vztahem

$$I = \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.16)$$

kde  $I$  je celkový proud. Tato rovnice říká, že magnetické pole vzniká v okolí proudů (pohybujících se nábojů) nebo tam, kde je časově proměnná intenzita elektrického pole. Právě díky tomuto členu se vakuem mohou šířit pole bez jakýchkoli zdrojů, která pouze někde vznikla – jak zaniká elektrické pole, vzniká magnetické a naopak, ze třetí Maxwellovy rovnice, jak zaniká magnetické, vzniká elektrické – navzájem se „drží při životě“.

Integrální tvar této rovnice dostaneme opět pomocí Stokesovy věty (2.2)

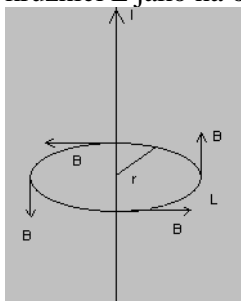
$$\int_S \text{rot } \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = m_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_L \vec{B} \cdot d\mathbf{l}.$$

Pokud označíme tok intenzity plochou  $S$ , kterou ohraničuje křivka  $L$ , jako  $\Phi$ , můžeme psát:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = m_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt} \quad (2.17)$$

Pokud budeme tedy mít časově proměnné elektrické pole, bude vznikat magnetické pole, pokud bude někde téct proud, bude vznikat magnetické pole.

Např. pokud budeme mít přímkový vodič, kterým poteče proud  $I$  a kolem něj naznačíme kružnici  $L$  jako na obrázku (obr. 2.2)



obr. 2.2

magnetické pole bude všude po kružnici stejné a také s ní bude všude rovnoběžné.

Proto se křivkový integrál přepíše jako

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\mathbf{l} = BL = m_0 I + \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dt}.$$

A jelikož časová změna toku intenzity elektrického pole skrz plochu vymezenou kružnicí  $L$  je při konstantním proudu nulová, můžeme pro velikost magnetického pole ve vzdálenosti  $r$  od proudu psát

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \quad (2.18)$$

což je známý vztah pro velikost magnetického pole v blízkosti vodiče s proudem.

### b) Vyjádření Maxwellových rovnic pomocí potenciálů

Často je výhodné přepsat Maxwellovy rovnice pomocí potenciálů. Protože platí  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ , můžeme magnetické pole napsat jako rotaci nějakého vektorového pole (protože divergence rotace je *vždy* nula, je to totiž obdobné jako např. výraz  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$ ). Toto

vektorové pole se jmenuje vektorový potenciál a značí se  $\mathbf{A}$ . Máme tedy

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.19)$$

Pokud tento výsledek dosadíme do třetí Maxwellovy rovnice (2.12), dostaneme

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

Dále po převedení na jednu stranu a záměně pořadí derivací dostaneme

$$\operatorname{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0$$

To znamená, že vnitřek závorky můžeme psát jako gradient nějakého skalárního pole (protože rotace gradientu je nula vždy, je to z podobných důvodů jako u výrazu  $\mathbf{a} \times \nabla \mathbf{a} = 0$ ). Je tedy

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla j \quad \Rightarrow \quad \mathbf{E} = -\nabla j - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad (2.20)$$

kde  $j$  je elektrický potenciál (Má fyzikální význam: pokud chceme přenést v elektrickém poli náboj z bodu A do bodu B, je vykonaná práce právě rozdíl potenciálů těchto bodů:

$$W = j(B) - j(A)$$

Protože magnetické pole je rotace vektorového potenciálu, můžeme si pro stejné magnetické pole vymyslet jiný vektorový potenciál  $\mathbf{A}'$ , který se bude od nečárkovaného lišit jen tím, že k němu přičteme gradient nějakého skalárního pole  $y$ . Magnetické pole se tím nezmění, protože rotace gradientu je nula. Můžeme tedy psát

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla y.$$

A také

$$\operatorname{div} \mathbf{A}' = \operatorname{div} \mathbf{A} + \nabla^2 y.$$

Jelikož naše pole  $y$  je naprosto libovolné, mohu si libovolně zvolit i divergenci vektorového potenciálu, protože pak vhodnou volbou  $y$  dostanu požadovanou hodnotu divergence. Volba divergence  $\mathbf{A}$  se nazývá kalibrace.

Pro další zjednodušení se volba divergence provádí většinou takto

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (2.21)$$

Pokud dosadíme výsledek (2.20) do 1. Maxwellovy rovnice, dostaneme

$$\nabla^2 j + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\mathbf{r}}{e_0}.$$

A po dosazení (2.21) za divergenci potenciálu dostaneme vlnovou rovnicí pro elektrický potenciál

$$\nabla^2 j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{e_0}. \quad (2.22)$$

Nakonec do 4. Maxwellovy rovnice (2.14) dosadíme z rovnic (2.19) a (2.20), dostaneme

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = m_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla j - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = m_0 \mathbf{j} - \frac{1}{c^2} \nabla \frac{\partial j}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}. \quad (2.23)$$

Levou stranu této rovnice s dvěmi rotacemi můžeme rozepsat podle známé algebraické identity  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ .

Po aplikování této identity na rovnici (2.23) a po úpravě dostaneme

$$\nabla \operatorname{div} \mathbf{A} - \nabla \left( -\frac{1}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t} \right) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = m_0 \mathbf{j}. \quad (2.24)$$

Vzhledem k tomu že vnitřek druhého gradientu na levé straně rovnice je přesně  $\operatorname{div} \mathbf{A}$ , tyto dva gradienty se odečtou a dostaneme vlnovou rovnicí pro vektorový potenciál

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -m_0 \mathbf{j}. \quad (2.25)$$

Tyto dvě rovnice:

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -m_0 \mathbf{j} \quad \text{a} \quad \nabla^2 j - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 j}{\partial t^2} = -\frac{r}{e_0}$$

představují zápis Maxwellových rovnic pro potenciály. Ještě k nim ovšem musíme přidat kalibrační podmínku

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}.$$

Vzhledem k rovnici (2.7) mohou tyto dvě vlnové rovnice přepsat do tvaru

$$\mathbf{W} j = \frac{r}{e_0} \quad \text{a} \quad \mathbf{W} \mathbf{A} = m_0 \mathbf{j}. \quad (2.26)$$

Pokud budou v těchto dvou rovnicích zdroje (hustoty proudů a nábojů) nulové, jsou možným řešením i nulová pole, ne však jediným. Druhým řešením je elektromagnetická vlna (proto vlnová rovnice), která se šíří prostorem rychlostí  $c$ .

### c) Rovnice kontinuity pro náboj, pohybová rovnice

Rovnice kontinuity představuje zákon zachování elektrického náboje. Pokud máme nějaký objem a z něj teče proud  $I$ , platí pro celkový náboj v objemu

$$I = -\frac{dQ}{dt}.$$

Pokud za proud dosadíme z rovnice (2.16) dostaneme

$$\oint_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{dQ}{dt}.$$

Nyní užitím Gaussovy věty (2.1) dostaneme rovnici kontinuity

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} dV = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V r dV \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial r}{\partial t} = 0. \quad (2.27)$$

Tuto rovnici lze také získat zdivergováním 4. Maxwellovy rovnice (2.14)

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{B}) = 0 = m_0 \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \operatorname{div} \mathbf{E}}{\partial t}$$

a nyní po dosazení za divergenci elektrického pole z rovnice (2.8)

$$\operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Pohybová rovnice pro náboj v elektromagnetickém poli zní

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (2.28)$$

Vzhledem k podkapitole 2.1 b) Tenzory a pseudovektory budu pohybovou rovnicí používat spíše ve tvaru

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{B}). \quad (2.29)$$

### 2.3. Relativistický zápis Maxwellových rovnic

Abych mohl přidat 1 prostorový rozměr, musím nejprve převést Maxwellovy rovnice do jejich relativistického zápisu. To budu dělat buď přes čtyřpotenciál, nebo z něj vycházející tenzor elektromagnetického pole. Na začátku této kapitoly bude  $c = 1$  (pouze pro následující důkaz).

#### a) Maxwellovy rovnice a tenzor elektromagnetického pole

Mezi hustotou náboje a plošnou hustotou proudu platí vztah

$$\mathbf{j} = \mathbf{v} r. \quad (2.30)$$

Pokud totiž někde teče proud, pak pro malou změnu náboje  $Q$  za čas  $\Delta t$  máme

$$\Delta Q = j S \Delta t = q v S \Delta t,$$

kde  $S$  je malá ploška, skrz kterou teče proud. Odtud už je vidět vztah (2.30).

Nyní, pokud budeme mít tyč délky  $L_0$  s celkovým nábojem  $Q$ , hustotou náboje  $r_0$  a průřezem  $S$ , platí pro velikost náboje samozřejmě vztah

$$Q = S L_0 r_0 = S L r,$$

kde  $L$  a  $r$  jsou délka a hustota náboje, když se tyč začne pohybovat rychlostí  $v$  ve směru svojí délky (ve směru osy  $x$ ). Odtud

$$r = \frac{L_0}{L} r_0 = \frac{r_0}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (2.31)$$

kde jsem využil vztah pro relativistickou kontrakci délek  $L = L_0 \sqrt{1-v^2}$ .

Pokud se na tyč bude dívat pozorovatel pohybující se rychlostí  $u$  ve směru osy  $x$ , bude se mu rychlost tyče jevit jako  $v'$ , pro kterou platí

$$v' = \frac{v-u}{1-uv}. \quad (2.32)$$

Abychom spočítali jakou hustotu náboje  $r'$  uvidí pohybující se pozorovatel, potřebujeme spočítat výraz

$$\frac{1}{\sqrt{1-v'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2+u^2-2uv}{1+u^2v^2-2uv}}} = \frac{1-uv}{\sqrt{(1-v^2)(1-u^2)}}.$$

Nyní už stačí vyjádřit  $\mathbf{r}'$  ze vztahu (2.31)

$$\mathbf{r}' = \frac{\frac{\mathbf{r}_0}{\sqrt{(1-v^2)}} - u \frac{\mathbf{r}_0 v}{\sqrt{(1-v^2)}}}{\sqrt{(1-u^2)}} = \frac{\mathbf{r} - u \mathbf{j}_x}{\sqrt{(1-u^2)}}, \quad (2.33)$$

což je přesně Lorentzova transformace. Pokud spočítáme ještě  $\mathbf{j}'_x$  podle

$$\mathbf{j}'_x = v' \mathbf{r}' = \frac{\mathbf{j}_x - u \mathbf{r}}{\sqrt{(1-u^2)}}, \quad (2.34)$$

vidíme, že to je opět Lorentzova transformace. A pokud se nějaké čtyři veličiny transformují podle L. transformace, pak tvoří čtyřvektor.

Hustota náboje a proudu se tedy transformují jako čtyřvektor, který se nazývá čtyřvektor proudu a značí se

$$J_m = (c\mathbf{r}, \mathbf{j}).$$

Hustota náboje je tedy časová složka čtyřvektoru proudu. Z vlnových rovnic (2.26) je vidět, že pokud jsou hustoty proudu a náboje složkami čtyřvektoru, musí jimi být i elektrický potenciál a vektorový potenciál, d' Alembertián je totiž invariantní operátor, a proto to nijak neovlivní. Proto můžeme zavést tzv. čtyřpotenciál  $A_m$ , který má tvar

$$A_m = \left( \frac{\mathbf{j}}{c}, \mathbf{A} \right). \quad (2.35)$$

V zápise přes čtyřpotenciál lze shrnout Maxwellovy rovnice do jedné časoprostorové rovnice

$$\mathbf{W}^{\mu} A_m = m_0 J_m. \quad (2.36)$$

Já použiji pro přidání čtvrtého rozměru relativistické rovnice s tenzorem elektromagnetického pole, který mám definován jako

$$F_{mn} = \nabla_n A_m - \nabla_m A_n. \quad (2.37)$$

Odtud je vidět, že  $F_{mm} = 0$  a  $F_{mm} = -F_{mm}$ . Další složky tohoto tenzoru získáme z rovnice (2.37)

$$F_{01} = -\frac{1}{c} \frac{\partial A_1}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial x_1} = -\frac{1}{c} \left( \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1}{\partial t} \right) = \frac{E_1}{c} \text{ podobně}$$

$$F_{02} = \frac{E_2}{c} \text{ a } F_{03} = \frac{E_3}{c} \text{ a dále}$$

$$F_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = B_3, \quad F_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} = -B_2 \text{ a } F_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} = B_1.$$

Nyní už můžu tenzor napsat jako matici

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Prostorové složky tohoto tenzoru jsou tedy shodné s tenzorem magnetického pole, platí

$$F_{ij} = B_{ij}.$$

První a čtvrtá Maxwellova rovnice se dá pomocí tohoto tenzoru zapsat takto

$$\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_n} = m_0 J_m. \quad (2.39)$$

Pokud nyní položíme  $m=0$ , dostaneme první Maxwellovu rovnici jako

$$\frac{\partial F_{0n}}{\partial x_n} = m_0 J_0 = c m_0 r = \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial x_i} \Rightarrow \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{r}{e_0}.$$

Pokud položíme  $m=i$ , dostaneme čtvrtou Maxwellovu rovnici

$$\frac{\partial F_{in}}{\partial x_n} = m_0 J_i = m_0 \mathbf{j} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} \Rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{B} = m_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Protože  $\frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}$  má přesně složky rotace, např. pro  $i=1$  je to  $\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3}$ , což přesně odpovídá

$x$ -ové složce rotace.

Tento postup je vlastně separace časové a prostorové složky časoprostorové rovnice. Druhá časoprostorová rovnice obsahující tenzor elektromagnetismu, ze které odseparováním časové a prostorové složky dostaneme druhou a třetí Maxwellovu rovnici, je následující

$$\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x_m} = 0. \quad (2.40)$$

Pokud se v této rovnici budou dva indexy rovnat, např.  $m=n$ , rovnice se vynuluje automaticky

$$\frac{\partial F_{mm}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_m} + \frac{\partial F_{mk}}{\partial x_m} = \frac{\partial F_{km}}{\partial x_m} - \frac{\partial F_{km}}{\partial x_m} = 0.$$

Pokud položíme  $m=0$ , zbývají tedy pro zbylé dva indexy jen prostorové složky tj.  $n=i$  a  $k=j$ , dostaneme tedy

$$0 = \frac{\partial F_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{j0}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_0} = \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \frac{\partial B_{ij}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial B_{ij}}{\partial t}. \text{ To je tenzorová rovnice, protože má dva volné indexy.}$$

Pokud se ale vynásobí  $e_{kji}$  změní se na rovnici vektorovou a to následujícím způsobem

$$-\frac{\partial}{\partial t} e_{kji} B_{ij} = e_{kji} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - e_{kji} \frac{\partial E_j}{\partial x_i}.$$

Pokud nyní vybereme volný index  $k$ , zbylé indexy  $i$  a  $j$  se mu nesmí rovnat. Na levé straně rovnice v epsilonu při sčítání tyto indexy prohodíme, čímž změníme jeho znaménko, jenže to se prohozením indexů změní i u  $B_{ij}$  (kvůli antisymetrii tenzoru) a tak se vždy tyto dvě složky  $\mathbf{B}$  sečtou a dají výraz  $2B_k$  (protože pokud vybereme v našem tenzoru složku  $B_{ij}$ , vždy je buď

$$B_k \text{ nebo } -B_k \text{ (} k \neq i \neq j \text{)). Na levé straně rovnice tedy dostaneme } -2 \frac{\partial B_k}{\partial t}.$$

Na pravé straně rovnice se také  $i$  ani  $j$  nesmí rovnat  $k$ . První člen se dá přepsat jako

$$\mathbf{e}_{kji} \frac{\partial E_i}{\partial x_j} = \mathbf{e}_{kji} \nabla_j E_i = (\text{rot } \mathbf{E})_k, \text{ zatímco ten druhý je úplně stejný, akorát má opačné znaménko}$$

a jelikož ho od toho prvního odčítám, sečtou se a dají  $2(\text{rot } \mathbf{E})_k$ . Rovnice tedy přešla do tvaru třetí Maxwellovy rovnice

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Pokud chci dostat z rovnice (2.40) druhou Maxwellovu rovnici, musím položit všechny tři indexy pouze prostorové. Prostorové indexy mohou nabývat tři hodnot a jelikož se žádné dva nesmí rovnat, je  $m=1 \quad n=2 \quad k=3$ , po dosažení:

$$0 = \frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} = \text{div } \mathbf{B}$$

Máme tedy dvě časoprostorové rovnice

$$\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_n} = m_0 J_m \text{ a } \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x_m} = 0 \text{ které po odseparování časové a prostorové složky dají}$$

čtyři Maxwellovy rovnice.

#### **b) Kalibrační podmínka, rovnice kontinuity pro náboj**

Vlnová rovnice (2.36) mohla být odvozena pouze za položení kalibrační podmínky ve tvaru

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t},$$

která má v relativistickém zápisu velmi jednoduchý tvar

$$\nabla_m A_m = 0. \tag{2.41}$$

Rovněž rovnice kontinuity se dá velmi jednoduše napsat pomocí čtyřvektoru proudu

$$J_m = (c\mathbf{r}, j_i) \text{ jako}$$

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} + \frac{\partial r}{\partial t} = \nabla_m J_m = 0. \tag{2.42}$$

Nyní když mám rovnice zapsány v relativistickém tvaru, mohu přistoupit k přidání jednoho prostorového rozměru a následně separaci časových a prostorových složek vzniklých čtyřrozměrných rovnic.

# 3. ZOBECNĚNÍ MAXWELLOVÝCH ROVNIC DO 4-D PROSTORU

## 3.1. Rozšíření v relativistickém zápisu

### a) Rozšíření pomocí potenciálů a zobecněných rotací

Základní úvahou při rozšiřování rovnic o jeden rozměr je, že vektorový potenciál zůstane vektorovým polem a tudíž že čtyřpotenciál bude mít nyní pět složek. Vektorový potenciál nyní vypadá takto:  $A_i = (A_1, A_2, A_3, A_4)$ .

Největším rozdílem oproti třírozměrnému prostoru je fakt, že magnetické pole už se *nedá nahradit vektorem*. Tenzor magnetického pole měl ve 3-D tři různé složky a tak se s ním dalo pracovat jako s (pseudo)vektorem, ve čtyřrozměrném prostoru má různých složek šest a je jasné, že šest složek nemůže tvořit vektor ve 4-D, prostě se tam nevejdou. Ve třírozměrném prostoru jsme rotací vektorového potenciálu dostali nepravý vektor. Abychom z něj získali skutečné magnetické pole, museli jsme ho ještě jednou vynásobit epsilonem a počítat přes shodné indexy. Těto operaci se říká Hodgeova dualita. Jak už jsem řekl, magnetické pole je ve 4-D tenzor  $4 \times 4$ , který vypadá následovně

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ -B_{12} & 0 & B_{23} & B_{24} \\ -B_{13} & -B_{23} & 0 & B_{34} \\ -B_{14} & -B_{24} & -B_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Jeho složky určí pomocí stejného vztahu, jako byl ve 3-D, pouze ve čtyřech rozměrech má epsilon čtyři indexy  $ijkl$ . Pomocí prvního epsilonu získám z vektorového potenciálu výše zmíněné nepravé magnetické pole, něco jako (pseudo)vektor magnetické indukce ve 3-D, které značím hvězdičkou

$$B_{kl}^* = \epsilon_{klij} \nabla_i A_j. \quad (3.2)$$

A nyní z něj analogickým postupem jako ve 3-D získám tenzor magnetického pole (ovšem sčítám od jedné do čtyř)

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \epsilon_{ijkl} B_{kl}^*, \quad (3.3)$$

kde jedna polovina je zde kvůli tomu, že složky  $B_{ij}$  se sčítají a jsou tam vždy dvakrát.

Nyní mohu postupně určit složky  $B_{ij}$  a vyjádřit je pomocí vektorového potenciálu

$$B_{12} = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}, \quad B_{14} = \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}, \quad B_{24} = \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4},$$

$$B_{13} = \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3}, \quad B_{23} = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \quad B_{34} = \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}.$$

Nyní mohu napsat tenzor magnetického pole v celé jeho kráse

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_3} & \frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} & \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} & \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} & \frac{\partial A_3}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_3} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Vektorový potenciál je nyní v jistém smyslu reálnější pole (nebo alespoň lépe představitelné) než to magnetické, je to normální vektorové pole. Magnetické pole je nyní tenzorové, působí pouze na vektory (rychlost pohybujícího se náboje).

### b) Tvar tenzoru elektromagnetického pole ve 4-D

Jak je vidět ze vztahu (3.4) odpovídá magnetické pole opět prostorové části  $F_{mn}$ , má totiž stejné složky jako  $F_{ij} = \nabla_j A_i - \nabla_i A_j$ . Tenzor elektromagnetického pole se tedy spočítá ze stejného vztahu jako předtím (2.37) a vypadá následovně

$$F_{mn} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} & \frac{E_4}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ -\frac{E_2}{c} & -B_{12} & 0 & B_{23} & B_{24} \\ -\frac{E_3}{c} & -B_{13} & -B_{23} & 0 & B_{34} \\ -\frac{E_4}{c} & -B_{14} & -B_{24} & -B_{34} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Opět tedy platí  $F_{ij} = B_{ij}$ .

I ve 4-D samozřejmě platí stejné relativistické rovnice (jen čtyřvektory mají pět složek), jako vlnová rovnice pro potenciál

$$\mathbf{W}^2 A_m = m_0 J_m,$$

tak dvě rovnice pro tenzor  $F_{mn}$

$$\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_n} = m_0 J_m \text{ a } \frac{\partial F_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x_m} = 0.$$

Tyto dvě rovnice nyní využiji pro zpětné získání čtyř Maxwellových rovnic, ovšem nyní s tenzorem (3.5), takže čtyřrozměrných.

### 3.2. Separace časové a prostorové části

Nejprve vezmu rovnici  $\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_n} = m_0 J_m$  a budu postupovat stejně jako ve 3-D.

První Maxwellovu rovnici ve 4-D získáme tak, že položíme  $m = 0$ , dostaneme

$$\frac{\partial F_{0n}}{\partial x_n} = c m_0 \mathbf{r} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_i}{\partial x_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\mathbf{r}}{e_0}.$$

$i$  nyní běží od 1 do 4, a tak levá strana rovnice je prostě divergence čtyřrozměrného vektoru  $\mathbf{E}$

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} + \frac{\partial E_4}{\partial x_4} = \text{div } \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{e_0}. \quad (3.6)$$

První Maxwellova rovnice se tedy nezměnila, pouze elektrické pole je čtyřrozměrné a hustota náboje je ve čtyřrozměrném prostoru.

Čtvrtou Maxwellovu rovnici dostaneme, položíme-li  $m = i$ , máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{in}}{\partial x_n} &= m_0 j_i = \frac{\partial F_{i0}}{\partial x_0} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_j} \quad \text{a po dosazení za složky } F_{ij} \\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} &= m_0 j_i + \frac{1}{c^2} \frac{\partial E_i}{\partial t}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

což ve složkovém zápisu představuje čtvrtou Maxwellovu rovnici ve 4-D. Tato rovnice se dá přepsat jako

$$-\nabla \cdot \overset{\mathbf{s}}{\mathbf{B}} = m_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.8)$$

neboť  $-\nabla \cdot \overset{\mathbf{s}}{\mathbf{B}}$  je ve složkách:  $-\nabla_j B_{ji} = \nabla_j B_{ij} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j}$ . Levá strana rovnice (3.8) je tedy jakýsi

analog rotace v trojrozměrném prostoru (ve 3-D platilo  $-\nabla \cdot \overset{\mathbf{s}}{\mathbf{B}} = \nabla \times \mathbf{B}$ , kde ovšem vektor magnetického pole byl pseudovektor, což zde platí také, v upravené formě, s naším novým „pseudovektorem“ (který je nyní ovšem tenzorem)  $B_{kl}^*$ , mohu psát

$$-\nabla \cdot \overset{\mathbf{s}}{\mathbf{B}} = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j} = \frac{1}{2} e_{ijkl} \nabla_j B_{kl}^* = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} e_{ijkl} B_{kl}^* \right) = \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_j},$$

s ohledem na vztah (3.3). Jedna polovina tu opět musí být, protože tenzory jsou antisymetrické, tudíž, když obrátím hodnoty indexů  $k$  a  $l$ , otočí se mi znaménko i u  $B_{kl}^*$  i u  $e_{ijkl}$  složky se sečtou a jsou tam dvakrát).

Třetí Maxwellovu rovnici dostanu z rovnice  $\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x_m} = 0$  tak, že opět položím

$m = 0$ . I nadále platí, že žádný z indexů se nesmí rovnat jinému, a tak pro zbylé dva indexy zbývají jen prostorové složky:  $n = i \quad k = j$  dostanu

$$\frac{\partial F_{0i}}{\partial x_j} + \frac{\partial F_{j0}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_0} = 0$$

a po dosazení za  $F_{mn}$  z (3.5)

$$\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = -\frac{\partial B_{ij}}{\partial t}. \quad (3.9)$$

To je tenzorová rovnice, která se ve 3-D dala převést na vektorovou vynásobením obou stran  $e_{kij}$ . Ve 4-D se na vektorovou už převést nedá, protože bychom ji museli násobit  $e_{ijkl}$  a tím bychom dosáhli jen přejmenování indexů z  $ij$  na  $kl$ . Rovnice (3.9) tedy představuje třetí Maxwellovu rovnici ve 4-D.

Abychom dostali druhou Maxwellovu rovnici ve 4-D, musíme do rovnice

$$\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{km}}{\partial x_n} + \frac{\partial F_{nk}}{\partial x_m} = 0 \quad \text{dosadit jen prostorové indexy, jakmile totiž dosadíme jeden nulový,}$$

dostaneme rovnici (3.9). Ve třírozměrném prostoru byla jedna kombinace jak dosadit indexy, nyní máme kombinace čtyři: 123, 124, 134, 234. Jejich dosazením dostaneme čtyři rovnice:

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial B_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{24}}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial B_{31}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_1} &= 0, \\ \frac{\partial B_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_2} &= 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Tyto čtyři rovnice představují jistou analogii divergence vektoru, která určuje jak moc vektorové pole v nějakém místě vzniká a pokud je všude nulová, pak vektor nikde nevzniká. To funguje tak, že jsou buď všechny derivace nulové (a pole je tedy všude stejné) nebo to co přibude ve směru jedné osy se zase ztratí ve směru druhé a derivace se odečtou. Tyto čtyři rovnice fungují stejně, s tím rozdílem, že popisují, jak se ve směru jednotlivých os mění složky tenzoru  $B_{ij}$ . Je vidět, že počet tří prvků pro jednu rovnici je zcela dostatečný, protože pokud bychom chtěli například doplnit nějakou složku ze zbylých rovnic do první rovnice, musela by tato doplněná být derivovaná podle čtvrté osy (1. tři už tam jsou) a jediné tři derivace podle čtvrté osy ve zbylých třech rovnicích mají zase stejné složky  $B_{ij}$  jako jsou ty v první rovnici a tudíž to opět pro divergenci nemá význam. Dalším důvodem, proč tyto čtyři rovnice představují jakousi zobecněnou divergenci tenzoru (zobecněnou proto, že kdyby tento tenzor měl složky vektoru, jako tomu bylo ve 3-D, přešly by rovnice (3.10) do obyčejné divergence vektoru (jako tomu bylo ve 3-D) je to, že ve 4-D jsem tenzor magnetického pole určil pomocí zobecněné rotace vektorového potenciálu. Jde o to, že díky tomu že ve 3-D platilo  $\text{div } \mathbf{B} = 0$  jsme mohli psát magnetické pole jako rotaci něčeho, co dostalo jméno vektorový potenciál. Jelikož složky  $B_{ij}$  jsou odvozeny ze zobecněné rotace, musí být analog divergence automaticky nulový po dosazení složek vektorového potenciálu za složky  $B_{ij}$ .

Pokud do první rovnice z rovnic (3.10) dosadíme za  $B_{ij}$  vektorový potenciál, dostaneme:

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) = 0$$

Protože platí  $\frac{\partial^2 A_2}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_3 \partial x_1}$  (pro „rozumný“, spojitý průběh  $\mathbf{A}$ ).

Podobně pro zbylé tři rovnice z rovnic (3.10) dostaneme:

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{24}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right) = 0$$

$$\frac{\partial B_{31}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial A_1}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) = 0$$

a

$$\frac{\partial B_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_4} \left( \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{\partial A_2}{\partial x_4} - \frac{\partial A_4}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right) = 0$$

Po dosazení vektorového potenciálu jsou tedy rovnice (3.10) automaticky nulové – představují tedy zobecněnou divergenci tenzoru a říkají, že tenzor magnetického pole (jeho složky) nemají žádná zřídla, nikde nevznikají. Což je logické, pokud neexistovaly magnetické náboje ve třírozměrném, neexistují tedy ani ve čtyřrozměrném prostoru.

Maxwellovy rovnice ve 4-D tedy zní:

$$\text{I. } \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\mathbf{r}}{e_0} \qquad \text{III. } \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} = - \frac{\partial B_{ij}}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{23}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial B_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial B_{24}}{\partial x_1} = 0$$

$$\text{II. } \frac{\partial B_{31}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial B_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial B_{42}}{\partial x_3} + \frac{\partial B_{34}}{\partial x_2} = 0$$

$$\text{IV. } -\nabla \cdot \mathbf{B} = m_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

### 3.3. Nástin zobecňování do dalších rozměrů

V této kapitole bych chtěl poukázat na to, že při zobecnění do vyšších rozměrů zůstane magnetické pole tenzorem druhého řádu. Např. v pětirozměrném prostoru by měl vektorový potenciál pět složek a pseudovektor  $B^*$  bude nyní tenzor třetího řádu – bude mít tři volné indexy. Získáme ho jako  $B_{ijk}^* = e_{ijklm} \nabla_l A_m$ .

Jenže stejně jako ve 3-D a 4-D, pravý tenzor magnetického pole dostaneme Hodgeovým duálem  $B_{ij} = \frac{1}{3!} e_{ijklm} B_{klm}^*$ , kde ve 4-D byla jedna polovina, je nyní jedna šestina, a to proto, že nyní je 3! možných kombinací jak zvolit indexy a ty se ze stejných důvodů jako ve 4-D všechny sečtou.

Magnetické pole je tedy opět tenzor druhého řádu, elektrické je pětirozměrný vektor a Maxwellovy rovnice získáme z relativistických rovnic (2.39) a (2.40).

## 4. APLIKACE ČTYŘROZMĚRNÝCH MAXWELLOVÝCH ROVNIC

### 4.1. Coulombův zákon

Ve 3-D se dá odvodit závislost intenzity elektrického pole na vzdálenosti od bodového náboje velikost  $Q$  pomocí Gaussovy věty (2.1) a 1. Maxwellovy rovnice (2.8). Výsledkem je Coulombův zákon (2.10). Totéž lze učinit i ve čtyřrozměrném prostoru tak, že vyjdeme ze zobecněné Gaussovy věty pro čtyři rozměry, která má tvar (zde ovšem  $\mathbf{A}$  není vekt. pot.)

$$\int_{V_4} \operatorname{div} \mathbf{A} dV_4 = \int_V \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dV, \quad (4.1)$$

kde vektorové pole  $\mathbf{A}$  je čtyřrozměrné,  $V_4$  je čtyřrozměrný objem a  $\mathbf{n}$  je opět normálový vektor na objem  $V$ . Pokud tuto větu aplikujeme na 1. Maxwellovu rovnici ve 4-D, dostaneme

$$\frac{Q}{e_0} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dV. \quad (4.2)$$

Pokud uzavřený objem  $V$  na pravé straně položíme jako povrch čtyřrozměrné koule s poloměrem  $r$ , dostaneme pro intenzitu vztah

$$E = \frac{1}{S_4} \frac{Q}{e_0}, \quad (4.3)$$

kde symbolem  $S_4$  značím právě povrch této 4-D koule. Nyní musíme vyjádřit  $S_4$  jako funkci  $r$ . Pokud si vezmu čtyřrozměrný polohový vektor  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  a dosadím ho do Gaussovy věty (4.1) tak, že za uzavřený objem  $V$  beru povrch 4-D koule  $S_4$ , dostanu

$$\int_{V_4} \operatorname{div} \mathbf{r} dV_4 = \int_{S_4} \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS_4 = 4V_4 = rS_4, \text{ protože } \operatorname{div} \mathbf{r} = 4 \text{ a } \mathbf{r} \text{ je všude rovnoběžný s } \mathbf{n}. \text{ Po úpravě}$$

$$S_4 = 4 \frac{V_4}{r} = \frac{dV_4}{dr}. \quad (4.4)$$

Protože  $V_4$  je přímo úměrné  $r^4$ . Stačí tedy spočítat objem 4-D koule a máme i povrch.

Pro výpočet objemu použiji analogii s výpočtem objemu 3-D koule. Při tom vezmu objem 2-D koule, tedy kruhu, a zintegruji podle  $dx$  od 0 do  $r$ , kde proměnná  $r'$  (poloměr okamžitého sčítaného kruhu) závisí na  $x$  vztahem:  $r' = \sqrt{r^2 - x^2}$ . Jelikož tímto postupem dostanu jen polovinu objemu, vynásobím integrál ještě dvěma. Pro objem 3-D koule tedy máme

$$V = 2p \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{4}{3} pr^3 \text{ a analogicky pro objem 4-D koule dostanu}$$

$$V_4 = 2 \int_0^r V(\sqrt{r^2 - x^2}) dx = \frac{8}{3} p \int_0^r (r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx. \quad (4.5)$$

Zavedu substituci  $x = rt$ , po níž se mi integrál (4.5) prepíše do tvaru

$$V_4 = \frac{8}{3} pr^4 \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{3}{2}} dt. \quad (4.6)$$

A nyní další substituci  $t = \sin x$ , po které dostanu

$$V_4 = \frac{8}{3} p r^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx. \quad (4.7)$$

Potřebuji tedy spočítat integrál z cosinu na čtvrtou. V následujícím výpočtu integrálu nebudu opisovat ani  $dx$  ani integrační meze. Integrál vypočítám metodou per partes, podle které platí:

$$\int fg = Fg - \int Fg', \text{ kde } f \text{ a } g \text{ jsou funkce, } g' \text{ je funkce } g \text{ derivovaná a } F \text{ je } f \text{ integrovaná.}$$

Pro můj integrál z  $\cos^4 x$  mám

$$\int \cos^3 x \cos x = \sin x \cos^3 x - \int \sin x \frac{d \cos^3 x}{dx} = \sin x \cos^3 x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x$$

Pokud sinus rozepíšu podle  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , dostanu:

$$\int \cos^4 x = \sin x \cos^3 x + 3 \int \cos^2 x - 3 \int \cos^4 x \text{ a po úpravě a vypočtení integrálu z } \cos^2 x$$

$$\int \cos^4 x = \frac{\sin x \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4} \left( \frac{\cos x \sin x}{2} + \frac{x}{2} \right) \text{ Pokud dáme tento výsledek do našich}$$

integračních mezí a doplníme do vztahu (4.7), dostaneme pro objem 4-D koule

$$V_4 = \frac{1}{2} p^2 r^4 \text{ a pro povrch: } S_4 = \frac{dV_4}{dr} = 2p^2 r^3. \quad (4.8)$$

A po dosazení tohoto vzorce do rovnice (4.3) dostaneme pro velikost intenzity elektrického pole vztah

$$E = \frac{1}{2p^2 e_0} \frac{Q}{r^3} \text{ a jelikož je intenzita pole radiální, můžeme psát}$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2p^2 e_0} \frac{Q}{r^4} \mathbf{r}. \quad (4.9)$$

Což je Coulombův zákon ve čtyřrozměrném prostoru. Intenzita pole tu tedy klesá s  $1/r^3$  a také konstanta je odlišná. Pole více nábojů pak získáme jako superpozici polí jednotlivých nábojů.

## 4.2. Magnetické pole ve čtyřech rozměrech, výpočet magnetického pole přímkového vodiče

V této kapitole bych chtěl uvést srovnání výpočtu magnetického pole ve 3-D prostoru a 4-D prostoru. Proto se nejprve vrátím do 3-D prostoru, kvůli obecnému výpočtu magnetického pole. Pokud za předpokladu časově neměnných elektrických polí provedu divergenci výrazu (2.20) pro výpočet elektrického pole pomocí potenciálů, dostanu:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\nabla^2 j \quad (4.10)$$

A s ohledem na první Maxwellovu rovnici

$$\nabla^2 j = -\frac{\mathbf{r}}{e_0}. \quad (4.11)$$

Pro potenciál platí vztah:

$$j = \frac{1}{4pe_0} \frac{Q}{r}. \quad (4.12)$$

A potenciál od více nábojů je superpozicí potenciálů od jednotlivých nábojů.

Pokud chci spočítat potenciál v bodě 1, a mám určité rozložení náboje v objemu  $V$ , mohu potenciál spočítat jako

$$\mathbf{j}(1) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\mathbf{r}(2) dV_2}{r_{12}^2}, \quad (4.13)$$

kde  $dV_2$  je objemový element v bodě 2,  $\mathbf{r}(2)$  je hustota náboje v tomto elementu a  $r_{12}$  je vzdálenost bodů 1 a 2,  $\mathbf{r}_{12} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$ .

Pokud nyní vezmeme čtvrtou Maxwellovu rovnici (2.14), dosadíme za  $\mathbf{B}$  vektorový potenciál a upravíme podle identity  $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$  (to vše za elektrického pole konstantního v čase), dostaneme

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{m}_0 \mathbf{j}, \quad (4.14)$$

což je, až na konstantu, stejná rovnice jako (4.11) a jelikož stejné rovnice mají stejná řešení, máme pro vektorový potenciál vztah

$$\mathbf{A}(1) = \frac{\mathbf{m}_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(2) dV_2}{r_{12}}. \quad (4.15)$$

Vztah přímo pro magnetické pole se dá potom odvodit z definice vektorového potenciálu.

Např. pro  $x$ -ovou složku magnetického pole (ve 3-D) platí

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y_1} - \frac{\partial A_y}{\partial z_1} \quad \text{a po dosazení za složky potenciálu z rovnice (4.15) dostaneme}$$

$$B_x = \frac{\mathbf{m}_0}{4\pi} \int_V \left( j_z \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) - j_y \frac{\partial}{\partial z_1} \left( \frac{1}{r_{12}} \right) \right) dV_2 = \frac{\mathbf{m}_0}{4\pi} \int_V \left( j_y \frac{z_1 - z_2}{r_{12}^3} - j_z \frac{y_1 - y_2}{r_{12}^3} \right) dV_2,$$

a protože výraz v závorce je přesně  $x$ -ová složka vektorového součinu  $\mathbf{j}$  a  $\mathbf{r}_{12}$ , lze psát

$$\mathbf{B}(1) = \frac{\mathbf{m}_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{j}(2) \times \mathbf{r}_{12}}{r_{12}^3} dV_2, \quad (4.16)$$

což je tzv. Biot-Savartův zákon. Z tohoto jednoho integrálu lze tedy při známých hustotách proudu hned vypočítat magnetické pole v nějakém bodě.

Nyní se přesuneme opět do čtyřrozměrného prostoru. Při polích konstantních v čase i zde platí

$$\mathbf{E} = -\nabla j, \quad (4.17)$$

$$\text{a také: } \nabla^2 j = -\frac{r}{e_0}. \quad (4.18)$$

Ze vztahu (4.17) jsem určil vztah pro potenciál (s ohledem na (4.9)) jako:

$$\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi^2 e_0} \frac{\mathbf{Q}}{r^2}. \quad (4.19)$$

A pokud označím element čtyřrozměrného objemu v bodě 2  $dV_{42}$ , mohu analogicky se vztahem (4.13) psát

$$\mathbf{j}(1) = \frac{1}{4\pi^2 e_0} \int_{V_4} \frac{\mathbf{r}(2) dV_{42}}{r_{12}^2}. \quad (4.20)$$

Pokud si napíšu ve složkách čtvrtou Maxwellovu rovnici ve 4-D (3.8) následujícím způsobem (vše je stále konst. v čase):

$$-\nabla_i B_{ij} = \mathbf{m}_0 j_j \quad (4.21)$$

A za  $B_{ij}$  dosadím vektorový potenciál ze vztahu  $B_{ij} = \nabla_j A_i - \nabla_i A_j$ , dostanu

$$(\nabla_i \nabla_i) A_j - \nabla_j (\nabla_i A_i) = m_0 j_j. \quad (4.22)$$

A jelikož je všechno konstantní v čase, je  $\nabla_i A_i = \text{div } \mathbf{A} = 0$ , proto mám z (4.22) rovnici

$$\nabla^2 \mathbf{A} = m_0 \mathbf{j}. \quad (4.23)$$

A to je opět, jako ve 3-D, až na konstantu stejná rovnice jako ta pro potenciál (4.18).

A protože, jak už bylo řečeno, stejné rovnice mají stejná řešení, mohu s ohledem na vztah (4.20) ve složkách psát

$$A_i(1) = -\frac{m_0}{4p^2} \int_V \frac{j_i(2)}{r_{12}^2} dV_{42}. \quad (4.24)$$

Platí  $B_{ij}(1) = \frac{\partial A_i(1)}{\partial x_{j1}} - \frac{\partial A_j(1)}{\partial x_{i1}}$  nyní mohu do této rovnice dosadit potenciál ze vztahu (4.24),

dostanu

$$B_{ij}(1) = \frac{m_0}{4p^2} \int_{V_4} \left( j_j(2) \frac{\partial}{\partial x_{i1}} \left( \frac{1}{r_{12}^2} \right) - j_i(2) \frac{\partial}{\partial x_{j1}} \left( \frac{1}{r_{12}^2} \right) \right) dV_{42} \quad (4.25)$$

a po úpravě:

$$B_{ij}(1) = \frac{m_0}{2p^2} \int_{V_4} \left( \frac{j_i(2)(r_{12})_j - j_j(2)(r_{12})_i}{r_{12}^4} \right) dV_{42}, \quad (4.26)$$

což je právě Biot-Savartův zákon, zobecněný do čtyřrozměrného prostoru. Má oproti tomu ve 3-D jinou konstantu před integrálem a také magn. pole klesá s vyšší mocninou vzdálenosti. Člen v čitateli představuje zobecněný čtyřrozměrný vektorový součin. Nyní nám opět stačí znát hustoty proudu a můžeme složky tenzoru magnetického pole spočítat přímo z jednoho integrálu. Teď mohu přistoupit k jednoduchým aplikacím těchto čtyřrozměrných rovnic.

Ve trojrozměrném prostoru platí pro magnetické pole ve vzdálenosti  $r$  od nekonečně dlouhého přímkového vodiče (osa  $z$ ) kterým teče proud  $I$ ,  $B_i = \left( -\frac{m_0 I x_2}{2p r^2}, \frac{m_0 I x_1}{2p r^2}, 0 \right)$

Nyní spočítám podobu tenzoru magnetického pole ve vzdálenosti  $r$  od podobného vodiče ve čtyřrozměrném prostoru, právě pomocí zobecněného Biot-Savartova zákona. Vodič, který byl předtím válec s průřezem  $S$  (který byl nekonečně malý), bude nyní čtyřrozměrný válec s průřezem  $V$  (jeho průřez bude koule). Proudovou hustotu si ve čtyřrozměrném prostoru definuji jako hustotu proudu protékajícího ne plochou, ale objemem (protože právě ten je nyní průřez 4-D těles). Pokud umístím tento 4-D vodič na třetí osu, mohu pro proudovou hustotu psát:  $j_i = (0, 0, j, 0)$  a pro  $r_{12}$ :  $(r_{12})_i = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ . Jediné nenulové složky  $B_{ij}$  tedy budou takové, u kterých jeden z indexů nabývá hodnoty 3. Např. složku  $B_{13}$  spočteme ze 4-D Biot-Savartova zákona (4.26) jako

$$B_{13}(1) = -\frac{m_0}{2p^2} \int_{V_4} \frac{j_3(2) x_1}{r_{12}^4} dV_{42} = -\frac{m_0 x_1 I}{2p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r_{12}^4} dx_3, \quad (4.27)$$

protože platí:  $dV_{42} = V dx_3$  a také  $jV = I$ , pokud  $r$  označím kolmou vzdálenost od bodu 1 k proudu, mohu psát:  $r_{12}^4 = (r^2 + x_3^2)^2$ .

S tímto vztahem se integrál (4.27) přepíše jako

$$B_{13} = -\frac{m_0 x_1 I}{2p^2} \int_{-\infty}^{\infty} (r^2 + x_3^2)^{-2} dx_3 = -\frac{m_0 x_1 I}{2p^2} \left[ \frac{\frac{rx}{r^2 + x^2} + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{r}\right)}{2r^3} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{m_0 x_1 I}{4pr^3}, \quad (4.28)$$

kde pro výpočet integrálu  $\int \frac{1}{(r^2 + x^2)^2} dx$  a následné limity jsem použil program Mathematica

5.0. Naprosto analogickým postupem dostaneme

$$B_{23} = -\frac{m_0 x_2 I}{4pr^3} \text{ a } B_{34} = \frac{m_0 x_4 I}{4pr^3}. \quad (4.29)$$

Nyní mohu tedy napsat tvar tenzoru mag. pole v okolí čtyřrozměrného vodiče s proudem (mířícím ve směru třetí osy) jako:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{m_0 x_1 I}{4pr^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{m_0 x_2 I}{4pr^3} & 0 \\ \frac{m_0 x_1 I}{4pr^3} & \frac{m_0 x_2 I}{4pr^3} & 0 & \frac{m_0 x_4 I}{4pr^3} \\ 0 & 0 & -\frac{m_0 x_4 I}{4pr^3} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

Je celkem intuitivní, že magnetické pole klesá ve 4-D s druhou mocninou vzdálenosti, protože stejně jako elektrické pole je odvozeno z toku plochou, která má ve 4-D tři rozměry, je magnetické pole odvozeno z cirkulace po křivce, nyní dvourozměrné.

Tímto způsobem (i když integrály by byly mnohem složitější) bychom mohli dostat ze zobecněného Biot-Savartova zákona tenzor magnetického pole za libovolného rozložení proudů.

## 5. ZÁVĚR

### 5.1. Závěr

Cílem této práce bylo ukázat čtenáři metodu rozšíření Maxwellových rovnic o jeden prostorový rozměr a hlavní rozdíly mezi elektromagnetismem v našem, třírozměrném prostoru a ve čtyřrozměrném prostoru. Výsledkem je sedm zobecněných Maxwellových rovnic a z nich odvozené zobecněné zákony Coulombův a Biot-Savartův. Někdo by mohl říci, že jsou tyto rovnice z praktického hlediska naprosto bezvýznamné, neboť nežijeme ve 4-D prostoru a nemůžeme je v reálném světě tedy využít. Já si však myslím, že pátrání po tom, jak by fyzika vypadala v prostorech s jinou dimenzí, není zbytečné. Za prvé, člověk se vždy snažil, aby jeho poznatky byly co nejobsáhlejší a nejúplnější, i když některé z nich neměly žádné okamžité využití. Za druhé, jsou teorie, které říkají, že fakt, že náš prostor má tři dimenze, je pouze náhoda. Studium toho, jak vypadají fyzikální zákony ve vícerozměrných prostorech, by mohlo přinést odpověď na otázku, zda je to pravda.

## **6. SEZNAM LITERATURY**

### **6.1. Seznam literatury**

- [1] Feynman, Richard P.: Přednášky z fyziky 2. 1. vydání, Havlíčkův Brod, 2001.  
ISBN 80-7200-420-4
- [2] Rektorys, Karel: Přehled užití matematiky. 4. vydání, Praha, SNTL, 1981