

TEORIE MÍRY A INTEGRÁLU
UČEBNÍ TEXT PRO MAA068
VERZE 8.7.2003

JAN MALÝ

OBSAH

1. Pojem míry	2
2. Měřitelné funkce	4
3. Abstraktní Lebesgueův integrál	6
4. Lebesgueův integrál na přímce	11
5. Záměna limity a integrálu	13
6. Integrál závislý na parametru	14
7. Konstrukce měr	17
8. Lebesgueova míra	21
9. Součin měr a Fubiniova věta	23
10. Věta o substituci	26
11. Prostory L^p	31
12. Věty o konvergenci	33
13. Znaménkové míry	35
14. Derivování a rozklad měr	38
15. Věty o aproximaci	41
16. Měřitelná zobrazení a obraz míry	42
17. Lebesgue-Stieltjesovy míry a distribuční funkce	43
Rejstřík	46

Děkuji Prof. Dr. Ludkovi Zajíčkovi, DrSc. za cenné připomínky. Děkuji všem studentům, kteří se podíleli na ladění předchozích verzí.

1. POJEM MÍRY

1.1. **Množinové funkce.** Necht X je abstraktní množina a $\mathcal{G} \subset 2^X$. Značíme

$$\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty].$$

Jakákoli funkce

$$\tau : \mathcal{G} \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$$

se nazývá *množinová funkce*. Množinové funkce se většinou používají k “měření” množin. Někdy budeme používat pro množinovou funkci značení (\mathcal{G}, τ) , abychom současně uvedli i znak pro její definiční obor.

1.2. **Rozšíření a zúžení množinové funkce.** Necht X je abstraktní množina, $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset 2^X$, μ je množinová funkce na \mathcal{U} a ν je množinová funkce na \mathcal{V} . Říkáme, že ν je *rozšíření* μ , jestliže $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ a $\mu(A) = \nu(A)$ pro každou $A \in \mathcal{U}$. Naopak, množinovou funkci μ v tomto případě nazýváme *zúžením* množinové funkce ν z \mathcal{V} na \mathcal{U} a značíme ji $\nu|_{\mathcal{U}}$.

Mějme třídu \mathcal{Z} množinových funkcí. Množinovou funkci (\mathcal{G}, τ) budeme nazývat *nejuzším prvkem* třídy \mathcal{Z} , jestliže je zúžením všech ostatních prvků třídy \mathcal{Z} . Nejužší prvek třídy množinových funkcí nemusí obecně existovat, ale pokud existuje, je určen jednoznačně (to je okamžitě vidět z definice).

1.3. **Délka intervalu.** Necht $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \leq b$. Množinu

$$I \in \{[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)\}$$

nazveme (*jednorozměrným*) *intervalem* a přiřadíme jí

$$(1.1) \quad \ell_1(I) = \begin{cases} b - a, & a < b, \\ 0, & a = b \end{cases}$$

(druhý případ uvažujeme zvlášť, abychom se vyhnuli nepříjemnostem s rozdílem $\infty - \infty$). Index “1” zde značí jednorozměrnost a budeme jej zatím vynechávat. Předpis (1.1) definuje na systému \mathcal{I} všech intervalů $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ množinovou funkci, která se nazývá *délka intervalu*. Jedním z prvních cílů teorie míry je najít vhodné rozšíření této množinové funkce.

1.4. **σ -algebra.** Necht X je abstraktní množina. Systém \mathcal{S} podmnožin X se nazývá *σ -algebra*, jestliže

- (SA-1) $\emptyset \in \mathcal{S}$,
- (SA-2) $A \in \mathcal{S} \implies X \setminus A \in \mathcal{S}$,
- (SA-3) $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots \implies \bigcup_j A_j \in \mathcal{S}$.

Dvojice (X, \mathcal{S}) se nazývá *měřitelný prostor*. Množiny $A \in \mathcal{S}$ se nazývají \mathcal{S} -měřitelné množiny. Nehrozí-li nedorozumění, budeme mluvit krátce o *měřitelných množinách*.

1.5. **Vlastnosti σ -algebry.**

- (a) $X \in \mathcal{S}$,
- (b) $A, B \in \mathcal{S} \implies B \setminus A \in \mathcal{S}$,
- (c) $A_j \in \mathcal{S}, j = 1, 2, \dots \implies \bigcap_j A_j \in \mathcal{S}$.

1.6. **Příklady σ -algeber.**

- (a) $\{\emptyset, X\}$
- (b) Systém 2^X všech podmnožin množiny X .
- (c) Borelovské množiny na topologickém prostoru, viz. 1.8.
- (d) Lebesgueovské měřitelné množiny, viz. 1.16, 8.1
- (e) Systém všech uzavřených (resp. otevřených) podmnožin topologického prostoru netvoří obecně σ -algebru, například protože není splněn požadavek (SA-2)

1.7. **Generování σ -algeber.** Je-li \mathcal{F} libovolný systém podmnožin X , potom existuje nejmenší σ -algebra obsahující \mathcal{F} . Tuto σ -algebru dostaneme jako průnik všech σ -algeber obsahujících \mathcal{F} .

1.8. **Borelovské množiny.** Necht X je topologický prostor a \mathcal{G} je systém všech jeho otevřených podmnožin. Potom definujeme $\mathcal{B}(X)$ jako nejmenší σ -algebru obsahující \mathcal{G} (viz. 1.7).

σ -algebra $\mathcal{B}(X)$ obsahuje kromě otevřených množin též všechny uzavřené množiny. V \mathbf{R} jsou borelovské všechny intervaly, množina všech racionálních čísel, atd. Příklady neborelovských množin se konstruují velmi těžko.

1.9. **Míra.** Necht (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor. Množinová funkce $\mu : \mathcal{S} \rightarrow [0, \infty]$ se nazývá *míra*, jestliže splňuje

$$(Mi-1) \quad \mu(\emptyset) = 0,$$

(Mi-2) (σ -additivita) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, potom

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \sum_j \mu(A_j).$$

Trojice (X, \mathcal{S}, μ) se nazývá *prostor s mírou*.

Zdůrazněme, že definice míry zahrnuje, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je σ -algebra.

1.10. Příklady měř.

(a) Diracova míra δ_a : X je libovolná množina, $a \in X$, $\mathcal{S} = 2^X$,

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

- (b) *Počítací míra* X je libovolná množina, $\mathcal{S} = 2^X$. Počítací míra přiřadí každé množině $A \subset X$ počet jejích prvků. Nekonečným množinám přiřadí prostě ∞ , nerozlišuje nekonečné mohutnosti.
 (c) *Lebesgueova míra* zobecňuje pojem délky intervalu, obsahu "obrazce" či objemu "tělesa", viz. 1.16, 8.1.
 (d) *Hausdorffova míra* je druh d -rozměrné míry v \mathbf{R}^d . Zobecňuje pojem délky křivky ($n = 1$), a povrchu zakřivené plochy ($n = 2$, $d = 3$).

1.11. **Terminologie teorie míry.** Míra μ na měřitelném prostoru (X, \mathcal{S}) se nazývá

- (a) *konečná*, jestliže $\mu(X) < \infty$,
 (b) *σ -konečná*, jestliže existují $X_1, X_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(X_j) < \infty$ a $X = \bigcup_j X_j$,
 (c) *pravděpodobnostní*, jestliže $\mu(X) = 1$,
 (d) *úplná*, jestliže každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná (a tudíž také míry nula).

Fráze *skoro všude* nebo *μ -skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X . Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{S}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$. Používá se zejména pro rovnost a nerovnosti mezi funkcemi a pro bodovou konvergenci posloupnosti funkcí.

1.12. **Zúplnění míry.** Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Potom existuje nejvyšší rozšíření míry (\mathcal{S}, μ) na úplnou míru. Výsledná míra se nazývá *zúplněním* míry μ a značí $(\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mu})$. Konstruuje se jako

$$\overline{\mathcal{S}} := \{E \subset X : \exists E', E'' \in \mathcal{S} : E' \subset E \subset E'', \mu(E'' \setminus E') = 0\},$$

$$\overline{\mu}(E) := \mu(E') (= \mu(E'')).$$

(Dokažte jako cvičení!)

1.13. **Trik zdisjunktnění.** Nechť $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{S}$. Potom existují po dvou disjunktní $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{S}$ tak, že

$$A_1 \cup \dots \cup A_k = E_1 \cup \dots \cup E_k \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

Tuto vlastnost mají

$$E_1 = A_1, \quad E_2 = A_2 \setminus A_1, \quad E_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2) \dots$$

1.14. **Vlastnosti míry.** Nechť $A_j \in \mathcal{S}$.

- (a) $A_1 \subset A_2 \implies \mu(A_1) \leq \mu(A_2)$.
 (b) Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, $A_1 \subset A_2 \subset \dots$, potom

$$\mu\left(\bigcup_j A_j\right) = \lim_j \mu(A_j).$$

(c) Jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, $A_1 \supset A_2 \supset \dots$, a jestliže $\mu(A_1) < \infty$, potom

$$\mu\left(\bigcap_j A_j\right) = \lim_j \mu(A_j).$$

Důkaz. (a) je snadné. K důkazu (b) použijeme trik zdisjunktnění 1.13. (c): Použijeme (b) na $A_1 \setminus A_j$. \square

1.15. **Příklad.** Nechť $X = \mathbf{R}$, $\mathcal{S} = \mathcal{B}(\mathbf{R})$ a μ je Lebesgueova míra (viz. níže). Nechť $A_j = [j, \infty)$. Potom $A_j \searrow \emptyset$, a přesto $\mu(A_j) \rightarrow \infty$. Je to tím, že v 1.14 (c) není splněn předpoklad o konečnosti $\mu(A_1)$.

1.16. **Lebesgueova míra v \mathbf{R}^n .** Množinu $Q \subset \mathbf{R}^n$ nazveme n -rozměrným intervalem, jestliže existují jednorozměrné intervaly $I_1, \dots, I_n \subset \mathbf{R}$ tak, že

$$Q = I_1 \times \dots \times I_n.$$

Množinu všech n -rozměrných intervalů budeme značit \mathcal{I}_n . Každému n -rozměrnému intervalu Q přiřadíme jeho *objem* předpisem

$$\ell_n(Q) = \ell_1(I_1) \dots \ell_1(I_n),$$

kde $\ell_1(I)$ je jako v 1.3.

Lebesgueovu míru v \mathbf{R}^n definujeme jako nejužší úplnou míru, která každému intervalu přiřadí jeho objem (v jednorozměrném případě délku, v dvourozměrném obsah). Budeme ji značit $(\mathfrak{M}_n, \lambda_n)$. Množiny náležející \mathfrak{M}_n budeme nazývat *lebesgueovskými měřitelnými množinami*. Index “ n ” označující dimenzi budeme většinou vynechávat.

Důkaz, že (\mathcal{I}_n, ℓ_n) lze rozšířit na úplnou míru a mezi takovými rozšířeními opravdu existuje nejužší prvek, není úplně lehký a odložíme jej na později (viz. 8.5).

1.17. **Lebesgueovskými neměřitelnými množinami.** Ačkoli Lebesgueova míra je definována jako “nejužší”, je dostatečně široká. Existují sice Lebesgueovskými neměřitelné množiny, ale důkaz jejich existence není konstruktivní. Filosoficky vzato, z hlediska výpočtů v aplikacích nemůže mít vliv na výsledek, zda neměřitelné množiny existují nebo ne. Vynechat důkaz měřitelnosti množiny, je-li její měřitelnost požadována, je však hrubou matematickou chybou.

2. MĚŘITELNÉ FUNKCE

2.1. **Značení.** Je-li X abstraktní množina a $A \subset X$, značíme χ_A charakteristickou funkci množiny A , neboli

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Symbol ∞ může být užit pro $+\infty$. Na $\overline{\mathbf{R}}$ zavádíme algebraické operace a nerovnosti přirozeným způsobem. Součet $a + b$ má smysl pokud $a \in \mathbf{R}$ nebo $b \in \mathbf{R}$ nebo a a b jsou nekonečna stejného znaménka. Součet $\infty + (-\infty)$ smysl nemá. Součin ab má smysl vždy (důležité !!), ve “sporném případě” zavádíme

$$(2.1) \quad 0 \cdot \pm\infty = 0.$$

Podíl a/b má smysl s výjimkou případů $a/0$ a $a \pm\infty / \pm\infty$.

Intervaly typu (a, b) , $[-\infty, b)$ a $(a, +\infty]$ budeme nazývat *topologicky otevřené*. Řekneme, že množina $G \subset \overline{\mathbf{R}}$ je *otevřená*, jestliže ji lze vyjádřit jako sjednocení topologicky otevřených intervalů. Snadno nahlédneme, že každé takové sjednocení lze upravit na sjednocení spočetné. Množinu $M \subset \overline{\mathbf{R}}$ nazveme ve shodě s 1.8 *borelovskou*, jestliže náleží do nejmenší σ -algebry generované otevřenými podmnožinami $\overline{\mathbf{R}}$. Systém všech borelovských podmnožin $\overline{\mathbf{R}}$ značíme $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$.

Je-li $f : D \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ funkce, definujeme $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$. (Maximum či minimum dvou funkcí se definuje bod po bodu.) Tedy

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Je-li f funkce na D a $M \subset \overline{\mathbf{R}}$, značíme

$$\{f \in M\} = \{x \in D : f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako $\{f > a\}$, $\{f = a\}$.

Symbolem $\varphi \circ f$ značíme složenou funkci $x \mapsto \varphi(f(x))$. Značení f^{-1} používáme pro inverzní funkci k f .

V celé kapitole (s výjimkou zavedení jednoduchých funkcí) budeme uvažovat měřitelný prostor (X, \mathcal{S}) .

2.2. **Měřitelné funkce.** Nechť $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že funkce $f : D \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ je \mathcal{S} -měřitelná, jestliže pro každý interval $I \subset \overline{\mathbf{R}}$ je $\{f \in I\} \in \mathcal{S}$. Bude-li z kontextu jasné, v jaké σ -algebře pracujeme, budeme mluvit prostě o “měřitelných funkcích”.

2.3. **Pozorování.** Nechť $D, D_j \in \mathcal{S}$.

(a) Je-li f měřitelná na D a $D_1 \subset D$, pak f je měřitelná na D_1 .

(b) Je-li funkce $f : D \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ \mathcal{S} -měřitelná na D_1 a D_2 a $D = D_1 \cup D_2$, pak f je měřitelná na D .

2.4. **Ověřování měřitelnosti.** Uvažujme $D \in \mathcal{S}$ a funkci $f : D \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$. Předpokládejme, že víme např., že

(*) Pro všechna $q \in \mathbf{Q}$ je $\{f > q\} \in \mathcal{S}$.

Ukážeme, že (*) stačí k ověření měřitelnosti funkce f .

1. Necht $a < \infty$, najdeme racionální čísla $q_j \searrow a$. Pak

$$\{f > a\} = \bigcup_j \{f > q_j\}.$$

2. Necht $a > -\infty$, najdeme racionální čísla $r_j \nearrow a$. Pak

$$\{f \geq a\} = \bigcap_j \{f > r_j\}.$$

3. Necht $b \in \overline{\mathbf{R}}$, pak

$$\{f \leq b\} = D \setminus \{f > b\}, \quad \{f < b\} = D \setminus \{f \geq b\}.$$

4. Necht $a, b \in \overline{\mathbf{R}}$, $a \leq b$. Potom

$$\{f \in [a, b]\} = \{f \geq a\} \cap \{f \leq b\}$$

a podobně pro ostatní typy intervalů.

2.5. Měřitelnost vzorů borelovských množin. Necht $M \subset \overline{\mathbf{R}}$ je borelovská množina a f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom $\{f \in M\} \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Systém množin $\mathcal{F} := \{M \subset \overline{\mathbf{R}} : \{f \in M\} \in \mathcal{S}\}$ je zřejmě σ -algebra obsahující všechny topologicky otevřené intervaly, a tudíž i všechny otevřené podmnožiny $\overline{\mathbf{R}}$. Jelikož $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}})$ je nejmenší σ -algebra s takovou vlastností, je nutně $\mathcal{B}(\overline{\mathbf{R}}) \subset \mathcal{F}$. \square

2.6. Měřitelnost složené funkce. Necht f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a φ je spojitá funkce na otevřené nebo uzavřené množině $G \subset \overline{\mathbf{R}}$. Potom množina $D' := \{f \in G\}$ je měřitelná a složená funkce $\varphi \circ f$ je měřitelná na D' .

Důkaz. Je-li $a \in \mathbf{R}$, potom $G \cap \varphi^{-1}((a, \infty])$ je borelovská podmnožina $\overline{\mathbf{R}}$ a tudíž podle věty 2.5 je $\{\varphi \circ f > a\} = \{f \in G \cap \varphi^{-1}((a, \infty])\}$ měřitelná množina. Funkce f je tedy měřitelná podle 2.4. \square

2.7. Varování. Budeme-li skládat spojitou a měřitelnou funkci v opačném pořadí, výsledek nemusí být měřitelný. Také není obecně pravda, že inverzní funkce k měřitelné funkci by byla měřitelná funkce.

2.8. Operace s měřitelnými funkcemi. Necht funkce f, f_j jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Pak platí následující:

- (a) Funkce $|f|, f^+, f^-, f^2$ jsou měřitelné na D , $1/f$ je měřitelná na $\{f \neq 0\}$.
- (b) Funkce $f_1 + f_2, f_1 - f_2, f_1 f_2, f_1/f_2$ jsou měřitelné vždy na množině, kde učiněná operace dává smysl podle 2.1.
- (c) Funkce $\sup_j f_j, \inf_j f_j, \limsup_j f_j, \liminf_j f_j$ jsou měřitelné na D .
- (d) Množina D' všech bodů, kde existuje $\lim_j f_j$ je měřitelná a $\lim_j f_j$ je měřitelná na D' .

Důkaz. (a) je důsledek věty 2.6.

(b): Je výhodné "odpreparovat" diskusí množiny, kde jedna z funkcí nebo obě nabývají nevlastních hodnot a zaměřit se na množinu $\{f_1 \in \mathbf{R}\} \cap \{f_2 \in \mathbf{R}\}$. Máme

$$\{f_1 + f_2 > a\} = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbf{Q} \\ p+q > a}} \{f_1 > p\} \cap \{f_2 > q\}.$$

Dále

$$f_1 f_2 = \frac{1}{4} \left((f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2 \right).$$

Ostatní je snadné.

(c): Je

$$\{\sup_j f_j > a\} = \bigcup_j \{f_j > a\}$$

a odtud odvodíme i zbytek.

(d) Máme

$$\begin{aligned} \{\lim f_j \text{ existuje}\} &= \{\limsup f_j = \liminf f_j\} \\ &= D \setminus \left(\bigcup_{p \in \mathbf{Q}} \left\{ \liminf_j f_j < p < \limsup_j f_j \right\} \right). \end{aligned}$$

□

2.9. Jednoduché funkce. Necht $\mathcal{S} \subset 2^X$ je množinový systém (ne nutně σ -algebra). Funkci f na $D \in \mathcal{S}$ nazveme \mathcal{S} -jednoduchou, jestliže f je lineární kombinace charakteristických funkcí množin z \mathcal{S} , tj. existují-li množiny $A_j \in \mathcal{S}$ a $\alpha_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, \dots, m$, tak, že

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Pokud bude jasné, jaký množinový systém máme na mysli, budeme mluvit prostě o jednoduchých funkcích.

2.10. Aproximace jednoduchými funkcemi. Necht (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor. Necht f je nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom existují nezáporné jednoduché funkce $f_k \nearrow f$. Navíc, f lze vyjádřit ve tvaru

$$(2.2) \quad f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde $E_j \in \mathcal{S}$.

Důkaz. Položme

$$P_j = \bigcup_i \{ [i2^{-j}, (i+1)2^{-j}) : i \text{ je liché celé} \}.$$

Potom

$$f = \sum_{j=-\infty}^{\infty} 2^{-j} \chi_{E_j},$$

kde

$$E_j := \{f \in P_j\}.$$

Jelikož P_j jsou borelovské, $\{f \in P_j\}$ jsou měřitelné podle věty 2.5. Jedná se vlastně o dyadickou expanzi $f(x)$; $x \in E_j$ právě když $f(x)$ má na j -tém místě v dyadickém rozvoji jedničku. Jednoduché funkce f_k můžeme definovat vzorcem

$$f_k = \sum_{j=-k}^k 2^{-j} \chi_{E_j}.$$

□

3. ABSTRAKTNÍ LEBESGUEŮV INTEGRÁL

Necht (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. V této kapitole zavedeme *abstraktní Lebesgueův integrál* z μ -měřitelné funkce.

Lebesgueovo pojetí nabízí alternativní cestu k definici integrálu přes interval (viz. kapitola 4), takto vybudovaný integrál dává použitelnější teorii než integrál Newtonův nebo Riemannův. Značně široká třída integrovatelných funkcí je jen jednou z mnoha výhod. V moderní matematické literatuře se integrálem bez přívlastku rozumí vždy integrál Lebesgueův. Význam Newtonova a Riemannova integrálu zůstává ve sféře didaktiky.

Při Lebesgueovském integrování se však nemusíme omezovat na funkce reálné proměnné. Obecné pojetí abstraktního Lebesgueova integrálu na libovolném prostoru s mírou má mnoho aplikací v analýze, teorii pravděpodobnosti a v matematice vůbec, v této obecnosti Riemannova i Newtonova metoda nenabízejí ani částečné řešení problému.

3.1. Dělení. Konečný soubor množin $\{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathcal{S}$ nazveme *dělením* množiny $D \in \mathcal{S}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a

$$\bigcup_{j=1}^m A_j = D.$$

3.2. Charakteristika jednoduchých funkcí. Necht f je nezáporná měřitelná funkce na D . Pak je ekvivalentní

- (i) f je jednoduchá,
- (ii) f nabývá jen konečně mnoha hodnot,

(iii) existuje dělení $\{A_j\}_{j=1}^m$ množiny D a nezáporná čísla α_j , $j = 1, \dots, m$ tak, že

$$f = \sum_j \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Důkaz. Implikace (i) \implies (ii) a (iii) \implies (i) jsou zřejmé. Pro (ii) \implies (iii), necht' $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ jsou hodnoty, kterých nabývá funkce f a položme $A_j = \{f = \alpha_j\}$. \square

3.3. Konstrukce integrálu. Necht' f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ (s hodnotami v $\overline{\mathbf{R}}$). Integrál $\int_D f d\mu$ vybudujeme ve třech krocích.

1. Je-li f nezáporná měřitelná funkce, definujeme

$$(3.1) \quad \int_D f d\mu = \sup \left\{ \sum_{j=1}^m \alpha_j \mu(A_j) : \{A_j\} \text{ je dělení } D, \right. \\ \left. 0 \leq \alpha_j \leq f \text{ na } A_j, j = 1, \dots, m \right\}.$$

Součty vyskytující se v (3.1) nazýváme *dolními součty* k funkci f . Integrál z nezáporné měřitelné funkce je definován *vždy*, může ovšem nabývat nekonečné hodnoty.

2. V obecném případě, kdy f je měřitelná funkce na D , definujeme

$$(3.2) \quad \int_D f d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu,$$

pokud rozdíl v (3.2) má smysl. Pokud

$$\int_D f^+ d\mu = \int_D f^- d\mu = \infty,$$

zůstává integrál funkce f nedefinován.

3. Je-li f měřitelná (přesně: \mathcal{S} -měřitelná) funkce na $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$, je účelné definovat

$$\int_D f d\mu = \int_{D'} f d\mu.$$

Smysl takového integrálu a výsledek samozřejmě v tom případě nezávisí na volbě D' .

V některých případech je účelné používat podrobnější zápis

$$\int_D f(x) d\mu(x) \quad \text{pro} \quad \int_D f d\mu.$$

Je-li integrál $\int_D f d\mu$ definován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_D f d\mu$ *konverguje* nebo že f je *integrovatelná*.

3.4. μ -měřitelné funkce. Je-li f měřitelná (přesně: \mathcal{S} -měřitelná) funkce na $D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$ (to je situace, která se naskytla v třetím kroku definice integrálu), nazveme funkci f μ -měřitelnou na D . V dalším budeme jako "měřitelnou" označovat každou funkci na $D \in \mathcal{S}$ která je μ -měřitelná. V kontextu integrálu podle Lebesgueovy míry bude měřitelná funkce znamenat λ -měřitelnou funkci.

3.5. Různé vlastnosti Lebesgueova integrálu. Necht' $D \in \mathcal{S}$ a f, g jsou měřitelné funkce na D .

(a) Je-li $f \geq 0$, $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$ a $D_1 \subset D_2 \subset D$, pak

$$\int_{D_1} f d\mu \leq \int_{D_2} f d\mu.$$

(b) Jestliže $D_1, D_2 \in \mathcal{S}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ a $D_1 \cup D_2 = D$, pak

$$\int_D f d\mu = \int_{D_1} f d\mu + \int_{D_2} f d\mu.$$

(c) Je-li $\int_D |f| d\mu < \infty$, pak $|f| < \infty$ skoro všude.

(d) Je-li $\int_D |f| d\mu = 0$, pak $f = 0$ skoro všude.

(e) (monotonie) Jestliže f, g mají integrál a $f \leq g$ skoro všude, pak

$$\int_D f d\mu \leq \int_D g d\mu.$$

(f) Je-li $\int_D g d\mu < \infty$ a $|f| \leq g$ skoro všude, pak f je integrovatelná.

Důkaz. (a), (b), (c) jsou snadné. (d): Jestliže množiny $E_j := \{|f| > 2^{-j}\}$ mají míru nula, pak $f = 0$ skoro všude. Pokud jedna z nich má kladnou míru, pak $2^{-j}\mu(E_j)$ je dolní součet k $|f|$ a tudíž integrál $|f|$ je kladný. (e): Tvrzení je snadné, pokud $0 \leq f \leq g$ na D . V obecném případě se důkaz provede rozdělením na množiny $\{f \leq 0 \leq g\}$, $\{f \leq g < 0\}$, $\{0 < f \leq g\}$, $\{g < f\}$ a diskusí. (f) plyne z (e) a definice integrálu. \square

3.6. Lemma o monotonii. *Nechť $D \in \mathcal{S}$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^m$ jsou dělení D a*

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$$

jsou nezáporná reálná čísla. Jestliže

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i} \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

potom

$$(3.3) \quad \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

Důkaz. Je-li $A_j \cap B_i \neq \emptyset$, potom z předpokladů plyne $\beta_i \leq \alpha_j$ a tudíž

$$(3.4) \quad \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \leq \alpha_j \mu(A_j \cap B_i).$$

Pokud $A_j \cap B_i = \emptyset$, pak $\mu(A_j \cap B_i) = 0$ a zase dostáváme (3.4). Sečtením přes i, j a záměnou pořadí sumace dostáváme

$$(3.5) \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_i).$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap B_i) = \mu(B_i), \quad \sum_{i=1}^m \mu(A_j \cap B_i) = \mu(A_j),$$

z (3.5) dostáváme (3.4). \square

3.7. Integrál jednoduché funkce. *Nechť $D \in \mathcal{S}$. Nechť $\{A_j\}_{j=1}^n$ je dělení D a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom*

$$\int_D \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j} \right) d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

Důkaz. Označme

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}.$$

Je-li

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i)$$

dolní součet k f , podle lemmatu 3.6 dostáváme

$$\sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i) \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

a přechod k supremu přes všechny dolní součty dává

$$\int_D f d\mu \leq \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j).$$

Jelikož

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

je též dolní součet k f , máme i obrácenou nerovnost. \square

3.8. Důsledek. Je-li f nezáporná měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$, potom

$$\int_D f = \sup \left\{ \int_D s : 0 \leq s \leq f, s \text{ je jednoduchá.} \right\}$$

3.9. Leviho věta. Necht' $\{f_j\}$ je posloupnost měřitelných funkcí na $D \in \mathcal{S}$, $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots$, a $f = \lim f_j$. Potom

$$(3.6) \quad \int_D f d\mu = \lim_j \int_D f_j d\mu.$$

Důkaz. Necht'

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

je dolní součet k f . Označme

$$s = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j},$$

zvolme $\tau > 1$ a položme

$$E_k = \{\tau f_k \geq s\}.$$

Snadno ověříme, že $\bigcup_k E_k = D$. Podle 1.14 (b),

$$\mu(A_j) = \lim_k \mu(A_j \cap E_k),$$

tedy (záměna limity a konečné sumy není žádný problém)

$$(3.7) \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \lim_k \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E_k).$$

Každý součet

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E_k)$$

je dolní součet k τf_k , tedy limitu na pravé straně (3.7) můžeme shora odhadnout limitou

$$\lim_k \int_D \tau f_k d\mu.$$

Tedy (vytknutí konstanty před integrál není problém, srov. 3.11(b))

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \leq \lim_k \tau \int_D f_k d\mu.$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k f dostáváme

$$\int_D f d\mu \leq \tau \lim_k \int_D f_k d\mu$$

a přechodem pro $\tau \searrow 1$ máme

$$\int_D f d\mu \leq \lim_k \int_D f_k d\mu.$$

Opačná nerovnost je zřejmá. □

3.10. Spojitá závislost na integračním oboru. Necht' $D, E_k \in \mathcal{S}$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$, $\bigcup_k E_k = D$. Necht' f je nezáporná měřitelná funkce na D . Potom

$$\int_D f = \lim_k \int_{E_k} f.$$

Důkaz. Stačí aplikovat Leviho větu na $f_k = f \chi_{E_k}$. □

3.11. **Linearita integrálu.** (a) *Nechť f, g jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom*

$$\int_D (f + g) d\mu = \int_D f d\mu + \int_D g d\mu,$$

má-li pravá strana smysl. (b) *Nechť f je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $\gamma \in \mathbf{R}$. Pokud f má integrál, pak*

$$\int_D \gamma f d\mu = \gamma \int_D f d\mu.$$

Důkaz. Tvrzení (b) je zřejmé.

(a): Nejprve předpokládejme, že funkce f a g jsou nezáporné a jednoduché. Podle věty 3.2 najdeme vyjádření

$$f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}, \quad g = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_i},$$

kde $\{A_j\}_{j=1}^n, \{B_i\}_{i=1}^m$ jsou dělení D a $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m$ jsou nezáporná reálná čísla. Potom také $\{A_j \cap B_i : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ je dělení D a

$$f + g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_i) \chi_{A_j \cap B_i}.$$

Podle věty 3.7

$$\int_D f d\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j),$$

$$\int_D g d\mu = \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i)$$

a

$$\int_D (f + g) d\mu = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i).$$

Máme

$$\begin{aligned} \int_D (f + g) d\mu &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_i) \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m \alpha_j \mu(A_j \cap B_i) + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \beta_i \mu(A_j \cap B_i) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) + \sum_{i=1}^m \beta_i \mu(B_i). \end{aligned}$$

Tím je důkaz proveden pro jednoduché funkce.

Nechť f a g jsou nezáporné měřitelné funkce. Podle věty 2.10 existují nezáporné jednoduché funkce $f_j \nearrow f, g_j \nearrow g$. Pak také $(f_j + g_j) \nearrow (f + g)$. Podle předchozí části důkazu

$$\int_D (f_j + g_j) \mu = \int_D f_j \mu + \int_D g_j \mu$$

a na obou stranách rovnosti použijeme Leviho větu k limitnímu přechodu. To nám dá důkaz pro nezáporné měřitelné funkce. V případě, že f a g jsou integrovatelné funkce na D , buď

$$D' = \{|f| + |g| < \infty\}.$$

Potom $D' \in \mathcal{S}, D' \subset D$ a $\mu(D \setminus D') = 0$. Na D' platí

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = (f + g)^- + f^+ + g^+.$$

Podle předchozího kroku máme

$$\begin{aligned} \int_D (f + g)^+ d\mu + \int_D f^- d\mu + \int_D g^- d\mu &= \int_D [(f + g)^+ + f^- + g^-] d\mu \\ &= \int_D [(f + g)^- + f^+ + g^+] d\mu \\ &= \int_D (f + g)^- d\mu + \int_D f^+ d\mu + \int_D g^+ d\mu. \end{aligned}$$

Vhodným přeskupením sčítanců dostaneme

$$\int_D (f+g)^+ d\mu - \int_D (f+g)^- d\mu = \int_D f^+ d\mu - \int_D f^- d\mu + \int_D g^+ d\mu - \int_D g^- d\mu,$$

což je dokazovaný vzorec. \square

4. LEBESGUEŮV INTEGRÁL NA PŘÍMCE

Integrál podle Lebesgueovy míry λ budeme nazývat (klasickým) *Lebesgueovým integrálem*. V této kapitole dokážeme, že pro každou spojitou funkci f na intervalu $[a, b]$ splývá

$$\int_{[a,b]} f d\lambda$$

s Newtonovým integrálem funkce f přes $[a, b]$. Pro klasický Lebesgueův integrál funkce f přes interval (a, b) budeme též používat tradiční značení

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Používání klasického Lebesgueova integrálu je mnohem výhodnější než používání Riemannova či Newtonova integrálu, neboť vede k “úplnější” třídě integrovatelných funkcí.

Lze dokázat, že každá Riemannovsky integrovatelná funkce je Lebesgueovsky integrovatelná a Lebesgueův integrál v tomto případě splývá s Riemannovým. Opačná inkluze neplatí, lebesgueovsky integrovatelných funkcí je víc.

Lebesgueův integrál nepokrývá tzv. neabsolutně konvergentní integrály, např.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx,$$

které v jednoduchých případech zachycuje Newtonův integrál. Pro hlubší studium neabsolutně konvergentních integrálů se hodí pojem Perronova nebo Kurzweilova integrálu. Neabsolutně konvergentní integrály využívají eukleidovskou strukturu a nemají rozumný protějšek na obecných prostorech s mírou.

4.1. Neurčitý Lebesgueův integrál. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a_0, b_0) a F je primitivní funkce k f . Potom*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

pro každý interval $[a, b] \subset (a_0, b_0)$.

Důkaz. Zvolme libovolně $c \in (a_0, a)$ a položme

$$G(\xi) = \int_c^\xi f(x) dx, \quad \xi \in (c, b_0).$$

Snadno ověříme, že $G' = f$ na (c, b_0) . G a F jsou tedy primitivní funkce k f na (c, b_0) , a tudíž se liší jen o aditivní konstantu. Proto

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

\square

4.2. Kritérium konvergence Lebesgueova integrálu. *Nechť f je spojitá funkce na intervalu (a, b) . Nechť F je primitivní funkce k f a G je primitivní funkce k $|f|$. Případné jednostranné limity funkce F v krajních bodech intervalu (a, b) značíme*

$$F(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad F(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} F(x).$$

(a) Jestliže funkce G je omezená, potom konverguje i $\int_a^b f(x) dx$ a platí

$$(4.1) \quad \int_a^b f(x) dx = F(b-) - F(a+).$$

(b) Jestliže funkce G je neomezená, potom Lebesgueův integrál $\int_a^b f(x) dx$ diverguje.

Důkaz. (a) Zvolme $c \in (a, b)$ a najděme intervaly $[a_j, b_j]$ tak, že $a < a_j < c < b_j < b$, $a_j \searrow a$, $b_j \nearrow b$. Podle vět 4.1 a 3.10 je

$$\int_c^b |f(x)| dx = \lim_j \int_c^{b_j} |f(x)| dx = \lim_j (G(b_j) - G(c)) < \infty.$$

Tedy podle věty 3.5 (f) integrál f přes (c, b) konverguje a pro $\xi \in (c, b)$ máme s pomocí věty 4.1

$$|F(\xi) - F(c) - \int_c^b f(x) dx| = \left| \int_\xi^b f(x) dx \right| \leq \int_\xi^b |f(x)| dx.$$

Jelikož podle 3.10 je

$$\lim_{\xi \rightarrow b^-} \int_\xi^b |f(x)| dx = 0,$$

máme

$$F(b-) = \lim_{\xi \rightarrow b^-} F(\xi) = F(c) + \int_c^b f(x) dx.$$

Podobně

$$F(a+) = F(c) - \int_c^a f(x) dx.$$

Odečtením dostaneme (4.1).

(b) Nechť F je primitivní funkce k f , G je primitivní funkce k $|f|$. Potom funkce G je neklesající, neboť $|f| \geq 0$. Podobně jako v případě (a) ukážeme za pomoci vět 4.1 a 3.10, že

$$\int_a^b |f(x)| dx = \lim_j \int_{a_j}^{b_j} |f(x)| dx = \lim_j (G(b_j) - G(a_j)) = \infty.$$

Tedy podle věty 3.5 (f) Lebesgueův integrál funkce f přes (a, b) diverguje. \square

4.3. Vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem. Předchozí větu lze číst jako tvrzení o vztahu mezi Newtonovým a Lebesgueovým intervalem. Připomeňme, že *Newtonův integrál* funkce f od a do b je definován výrazem $F(b-) - F(a+)$ v případě, že existuje primitivní funkce F k f na (a, b) a její vlastní limity $F(b-)$ a $F(a+)$. V takové situaci říkáme, že *Newtonův integrál* funkce f od a do b *konverguje*. Pokud konverguje Newtonův integrál od a do b z funkcí f a $|f|$, říkáme, že *Newtonův integrál* funkce f od a do b *konverguje absolutně*.

Za společného předpokladu, že f je spojitá funkce na intervalu (a, b) , dostáváme z věty 4.2 dostáváme tato tvrzení:

- (a) *Jestliže konverguje Lebesgueův integrál z f od a do b , konverguje i Newtonův a to absolutně.*
- (b) *Jestliže Newtonův integrál z f od a do b konverguje absolutně, pak konverguje i Lebesgueův.*
- (c) *Pokud konverguje jak Lebesgueův, tak Newtonův integrál z funkce f , pak oba mají stejnou hodnotu.*

Tvrzení (b) a (c) platí i bez předpokladu spojitosti, ale důkaz je složitější. Tvrzení (a) naopak spojitost vyžaduje. Jinak neplatí žádná inkluze mezi třídou všech lebesgueovsky integrovatelných funkcí a třídou všech newtonovsky integrovatelných funkcí.

4.4. Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem. *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

Důkaz. Nechť R je Riemannův integrál funkce f od a do b . Z definice Riemannova integrálu plyne, že existují po částech konstantní funkce g_j, h_j tak, že

$$g_j \leq f \leq h_j, \quad \int_a^b g_j(x) dx \nearrow R, \quad \int_a^b h_j(x) dx \searrow R.$$

Funkce $g = \sup_j g_j$ a $h = \inf_j h_j$ jsou měřitelné podle věty 2.8. Máme

$$R \leq \sup_j \int_a^b g_j \leq \int_a^b g \leq \int_a^b h \leq \inf_j \int_a^b h_j \leq R.$$

Tedy funkce $h - g$ je nezáporná měřitelná a $\int (h - g) = \int h - \int g = 0$. Podle věty 3.5 je $h = g$ s.v., tedy i $h = f$ s.v. Tím je dokázána měřitelnost funkce f . Protože f je omezená na $[a, b]$, je Lebesgueovsky integrovatelná a

$$\int f = \int h = R.$$

□

5. ZÁMĚNA LIMITY A INTEGRÁLU

Vzorec

$$\int_D \lim_j f_j = \lim_j \int_D f_j$$

platí pro Lebesgueův integrál za značně obecných předpokladů. Na druhé straně je snadné sestrojít protipříklady (např. pro klasický Lebesgueův integrál $f_j(x) = j^2 e^{-jx}$, $D = (0, \infty)$), a tudíž je zapotřebí tyto předpoklady hlídat.

V dalším budeme uvažovat prostor s mírou (X, \mathcal{S}, μ) .

5.1. Fatouovo lemma. *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $\{f_j\}$ je posloupnost nezáporných měřitelných funkcí na D . Potom*

$$(5.1) \quad \int_D \liminf_j f_j \, d\mu \leq \liminf_j \int_D f_j \, d\mu.$$

Důkaz. Pro $k = 1, 2, \dots$ máme

$$\int_D \inf_{j \geq k} f_j \, d\mu \leq \inf_{j \geq k} \int_D f_j \, d\mu$$

Limitní přechod pro $k \rightarrow \infty$ s použitím Leviho věty na posloupnost $\{\inf_{j \geq k} f_j\}_k$ dává (5.1). □

5.2. Lebesgueova věta. *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $f, f_j, j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D . Nechť posloupnost $\{f_j\}$ konverguje skoro všude k f . Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná majoranta) tak, že*

$$(5.2) \quad |f_j(x)| \leq g(x), \quad j = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

Potom

$$(5.3) \quad \int_D f = \lim_j \int_D f_j.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že uvažované funkce jsou konečné a konvergence nastává všude, jinak bychom z D odstranili množinu míry nula. Použijeme additivitu integrálu a Fatouovo lemma na funkce $g + f_j, g - f_j$. Dostaneme

$$\int_D f \leq \liminf_j \int_D f_j \leq \limsup_j \int_D f_j \leq \int_D f,$$

což je (5.3). □

5.3. Lebesgueova věta pro řady. *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $g_j, j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na D . Nechť řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude. Nechť existuje integrovatelná funkce g (takzvaná majoranta) tak, že*

$$(5.4) \quad \left| \sum_{j=1}^k g_j(x) \right| \leq g(x), \quad k = 1, 2, \dots, \quad x \in D.$$

Potom

$$(5.5) \quad \int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu.$$

Důkaz. Stačí použít additivitu integrálu a Lebesgueovu větu na částečné součty. □

Předpoklad (5.4) se těžko ověřuje, protože málokdy umíme spočítat částečné součty řady. Výjimku tvoří geometrické řady, ale i tam jsou jednodušší cesty k cíli. Následující věty obsahují praktická kritéria pro záměnu řady a integrálu.

5.4. Leviho věta pro řady. *Nechť $D \in \mathcal{S}$ a $g_j, j = 1, 2, \dots$, jsou nezáporné měřitelné funkce na D . Potom*

$$(5.6) \quad \int_D \sum_j g_j \, d\mu = \sum_j \int_D g_j \, d\mu.$$

Důkaz. Stačí použít Leviho větu 3.9 na částečné součty. □

5.5. Záměna řady a integrálu. Necht $D \in \mathcal{S}$ a $g_j, j = 1, 2, \dots$ jsou měřitelné funkce na D . Předpokládejme, že je splněna aspoň jedna z následujících podmínek:

- (a) $g_j = aq^j$, kde a, q jsou měřitelné funkce, $|q| < 1$, a $\int_D \frac{a}{1-q} d\mu$ konverguje (geometrická řada),
- (b) $\sum_j \int_D |g_j| d\mu < \infty$,
- (c) $\int_D \sum_j |g_j| d\mu < \infty$,
- (d) $g_j = (-1)^j h_j, h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \dots \geq 0, h_j \rightarrow 0, h_1$ je integrovatelná (alternující řada).

Potom řada $\sum_j g_j$ konverguje skoro všude a platí vzorec

$$\int_D \sum_j g_j d\mu = \sum_j \int_D g_j d\mu,$$

Důkaz. (a) odvodíme z formule pro částečné součty geometrické řady. Záměnu lze provést podle Lebesgueovy věty 5.3, majoranta $\frac{2a}{1-q}$. Použijeme-li Leviho větu 5.4 na $|g_j|$, zjistíme, že podmínky (b) a (c) jsou ekvivalentní. Předpokládejme tedy (b) nebo (c). Funkce $g := \sum_j |g_j|$ je integrovatelná, a tudíž podle věty 3.5 konečná skoro všude. V bodech x , kde je $g(x)$ konečná, konverguje řada $\sum_j g_j(x)$, neboť konverguje absolutně. Můžeme tedy použít Lebesgueovu větu 5.3 s majorantou g . V případě (d) řada $\sum_j g_j$ konverguje podle Leibnitzova kritéria a částečné součty mají majorantu h_1 , tudíž můžeme provést záměnu podle Lebesgueovy věty 5.3. \square

5.6. Varování. Všimněte si dobře pořadí operátorů $\sum, \int, |\dots|$ v podmínkách 5.5 (b), (c) ! Jen velmi slabý student se může radovat, když ověří třeba

$$\int_D \left| \sum_j g_j d\mu \right| < \infty.$$

6. INTEGRÁL ZÁVISLÝ NA PARAMETRU

V této kapitole uvažujeme prostor s mírou (X, \mathcal{S}, μ) a $D \in \mathcal{S}$. Cílem je studovat chování funkce

$$F(t) := \int_D f(t, x) d\mu(x),$$

kde t je další proměnná ("parametr"). Je-li f funkce dvou proměnných t a x , zavedeme funkce $f(\cdot, x)$ proměnné t a $f(t, \cdot)$ proměnné x předpisem

$$\begin{aligned} f(t, \cdot) &: x \mapsto f(t, x), \\ f(\cdot, x) &: t \mapsto f(t, x). \end{aligned}$$

6.1. Limita integrálu závislého na parametru I. Necht P je metrický prostor a $A \subset P$. Bud' $a \in \overline{A} \setminus A$. Necht funkce $f : A \times D \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ má následující vlastnosti:

- (Li-1) Pro skoro všechna $x \in D$ existuje $\lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x)$.
- (Li-2) pro všechna $t \in A$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,
- (Li-3) existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in A$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.

Potom

$$(6.1) \quad \int_D \lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x) d\mu(x) = \lim_{t \rightarrow a, t \in A} \int_D f(t, x) d\mu(x).$$

speciálně výrazy vyskytující se v (6.1) mají smysl.

Důkaz. Připomeňme, že v metrických prostorech lze použít ekvivalentní tzv. Heineovu definici limity: K důkazu tvrzení

$$\lim_{t \rightarrow a} \int_D f(t, \cdot) d\mu = \int_D \lim_{t \rightarrow a} f(t, \cdot) d\mu$$

stačí ověřit, že pro každou posloupnost $t_j \rightarrow a$ bodů množiny A platí

$$\lim_j \int_D f(t_j, \cdot) d\mu = \int_D \lim_j f(t_j, \cdot) d\mu.$$

To je však zřejmé z Lebesgueovy věty 5.2. Poznamenejme, že aspoň jedna taková posloupnost $\{t_j\}$ existuje, a tudíž funkce

$$\lim_{t \rightarrow a} f(t, \cdot) = \lim_j f(t_j, \cdot)$$

je měřitelná. \square

6.2. Limita integrálu závislého na parametru II. Nechť P je metrický prostor a $A \subset P$. Buď $a \in \overline{A} \setminus A$. Nechť funkce $f : A \times D \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$ splňuje (Li-1) a (Li-2) z věty 6.1. Nechť funkce f je nezáporná a

$$\int_D \lim_{t \rightarrow a, t \in A} f(t, x) d\mu(x) = \infty.$$

Potom

$$\lim_{t \rightarrow a, t \in A} \int_D f(t, x) d\mu(x) = \infty.$$

Důkaz. Důkaz probíhá jako u věty 6.1, pouze místo Lebesgueovy věty použijeme Fatouovo lemma. \square

6.3. Poznámka. Tvrzení 6.1 a 6.2 o záměně limity a integrálu platí též v situaci, kdy např. $A = (0, +\infty)$ a $a = +\infty$. Substituce $t \mapsto 1/t$ převádí problém na limitu v nule zprava, která už zřejmě spadá do kontextu metrických prostorů.

6.4. Spojitost integrálu závislého na parametru. Nechť P je metrický prostor. Buď $a \in P$ a U okolí bodu a v P . Nechť funkce $f : U \times D \rightarrow \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:

- (Sp-1) Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ spojitá v a ,
- (Sp-2) pro všechna $t \in U$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,
- (Sp-3) existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in D$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.

Potom pro všechna $t \in U$ je $f(t, \cdot)$ integrovatelná a funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x) d\mu(x)$$

je spojitá v bodě a .

Důkaz. Věta je zřejmým důsledkem věty 6.1, kterou aplikujeme na $A = U \setminus \{a\}$ \square

6.5. Derivace integrálu závislého na parametru. Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou a $I \subset \mathbf{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times D \rightarrow \mathbf{R}$ má následující vlastnosti:

- (De-1) Pro skoro všechna $x \in D$ je funkce $f(\cdot, x)$ diferencovatelná na I ,
- (De-2) pro všechna $t \in I$ je funkce $f(t, \cdot)$ měřitelná,
- (De-3) existuje integrovatelná funkce g na D tak, že pro všechna $t \in I$ a $x \in D$ je

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| \leq g(x),$$

- (De-4) existuje $t_0 \in I$ tak, že $f(t_0, \cdot)$ je integrovatelná na D .

Potom pro všechna $t \in I$ je $f(t, \cdot)$ integrovatelná na D , funkce

$$F : t \mapsto \int_D f(t, x) d\mu(x)$$

je diferencovatelná na I a platí vzorec

$$F'(t) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) d\mu(x).$$

Důkaz. Nechť $a, b \in I$, $b \neq a$. Podle věty o střední hodnotě pro skoro každé $x \in D$ existuje ξ mezi a a b tak, že

$$\left| \frac{f(b, x) - f(a, x)}{b - a} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\xi, x) \right| \leq g(x).$$

Odtud plyne, že funkce

$$x \mapsto \frac{f(b, x) - f(a, x)}{b - a}$$

je integrovatelná, tudíž, volíme-li $a = t_0$, i funkce $f(b, \cdot)$ je integrovatelná. Zvolme znovu $a \in I$. Uvažujme funkci

$$h(t, x) = \begin{cases} \frac{f(t, x) - f(a, x)}{t - a}, & t \neq a, \\ \frac{\partial f}{\partial t}(a, x), & t = a. \end{cases}$$

Z předpokladů a výše dokázaného je jasné, že funkce $h(t, x)$ splňuje předpoklady věty 6.4 pro spojitost v bodě a (s majorantou g), tedy

$$\begin{aligned} F'(a) &= \lim_{t \rightarrow a} \frac{\int_D f(t, x) d\mu(x) - \int_D f(a, x) d\mu(x)}{t - a} \\ &= \lim_{t \rightarrow a} \int_D \frac{f(t, x) - f(a, x)}{t - a} d\mu(x) = \int_D \frac{\partial f}{\partial t}(a, x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Tím je věta dokázána. □

6.6. Příklad. Uvažujme funkci

$$F(t) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} e^{-tx} dx.$$

Potom F je spojitá na $[0, \infty)$ (majoranta $x^{-2}(1 - \cos x)$) a pro $t \in (0, \infty)$ je

$$\begin{aligned} F'(t) &= - \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x} e^{-tx} dx, \\ F''(t) &= \int_0^\infty (1 - \cos x) e^{-tx} dx. \end{aligned}$$

Zde již nemůžeme najít majorantu najednou pro $t \in (0, \infty)$, poslouží

$$\begin{aligned} x &\mapsto \frac{1 - \cos x}{x} e^{-ax}, \\ x &\mapsto (1 - \cos x) e^{-ax} \end{aligned}$$

pro $t \in (a, \infty)$. Jelikož pro $p > 0, q \in \mathbf{R}$ je

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-px} \cos qx dx &= \operatorname{Re} \int_0^\infty e^{-px - iqx} dx = -\operatorname{Re} \left[\frac{e^{-px - iqx}}{p + iq} \right]_{x=0}^\infty = \operatorname{Re} \frac{1}{p + iq} \\ &= \frac{p}{p^2 + q^2}, \end{aligned}$$

máme

$$F''(t) = \frac{t}{t^2} - \frac{t}{t^2 + 1} = \frac{1}{t(t^2 + 1)}.$$

Jelikož

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} F'(t) = 0,$$

snadno ověříme

$$\begin{aligned} F'(t) &= \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right), \quad t \in (0, \infty), \\ F(t) &= \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} t - \frac{1}{2} t \ln \left(1 + \frac{1}{t^2} \right), \quad t \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Speciálně dostáváme

$$(6.2) \quad \int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = F(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Buď

$$G(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx.$$

Potom integrováním per partes dostaneme

$$G(a) = \frac{1 - \cos a}{a} + \int_0^a \frac{1 - \cos x}{x^2} dx.$$

Limitní přechod s využitím (6.2) dává

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{a \rightarrow \infty} G(a) = \frac{\pi}{2}.$$

6.7. Zavedení Gamma a Beta funkce a rekurentní formule. Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$(6.3) \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx.$$

(Ověřte samostatně konvergenci integrálu!) Integrováním per partes zjistíme pro $s > 0$

$$(6.4) \quad \Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} x^s e^{-x} dx = \int_0^{\infty} s x^{s-1} e^{-x} dx = s \Gamma(s).$$

Funkci *Beta* dvou proměnných $p > 0, q > 0$ definujeme předpisem

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx.$$

(Ověřte samostatně konvergenci integrálu!) Integrováním per partes odvodíme pro $p, q > 0$

$$(6.5) \quad pB(p, q+1) = \int_0^1 p x^{p-1} (1-x)^q dx = \int_0^1 x^p q (1-x)^{q-1} dx = qB(p+1, q).$$

6.8. Derivování funkce Γ . Formálním derivováním za integračním znaméním dostaneme rekurentně

$$\Gamma^{(k)}(s) = \int_0^{\infty} x^{s-1} (\ln x)^k e^{-x} dx.$$

Vzorec lze odůvodnit použitím věty o derivování podle parametru pro $s \in (p, q)$, kde $0 < p < q < \infty$, s majorantou

$$g(x) = (x^{p-1} + x^{q-1}) e^{-x}.$$

Funkce Gamma je tedy nekonečně diferencovatelná, tím spíš spojitá na $(0, \infty)$.

6.9. Průběh funkce Gamma. Zřejmě $\Gamma(s) > 0$ pro $s > 0$. Druhá derivace je zřejmě kladná, tedy Gamma je striktně konvexní na $(0, \infty)$. Máme

$$\int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow 0+} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} dx}{x} = \infty$$

a tudíž podle věty 6.2 je

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \Gamma(s) = \lim_{s \rightarrow 0+} \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx = +\infty.$$

Podobně se ukáže

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \Gamma(s) = \int_0^{\infty} \lim_{s \rightarrow \infty+} x^{s-1} e^{-x} dx = \int_1^{+\infty} \infty = \infty.$$

7. KONSTRUKCE MĚR

V této kapitole uvedeme obecné schéma používané ke konstrukci měr. Motivem jsou aplikace na konstrukce měr v analýze, zvláště Lebesgueovy míry, a aplikace v teorii pravděpodobnosti.

7.1. Vnější míra. *Vnější mírou* na množině X rozumíme množinovou funkci $\gamma : 2^X \rightarrow [0, \infty]$ (tedy definovanou na všech podmnožinách X) splňující následující požadavky:

$$(VM-1) \quad \gamma(\emptyset) = 0,$$

$$(VM-2) \quad A \subset B \implies \gamma(A) \leq \gamma(B),$$

$$(VM-3) \quad \gamma(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(A_j) \quad (\sigma\text{-subadditivita}).$$

S vnějšími měrami se budeme setkávat především jako s mezistupněm při konstrukci míry.

7.2. Z výchozí množinové funkce k vnější míře. Nechť $\mathcal{G} \subset 2^X$ a $\tau : \mathcal{G} \rightarrow [0, \infty]$ je množinová funkce na X splňující

$$(7.1) \quad \emptyset \in \mathcal{G}, \quad \tau(\emptyset) = 0.$$

Podmínce (7.1) budeme říkat *počáteční podmínka*. Pro $A \subset X$ položme

$$\tau^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j) : G_j \in \mathcal{G}, \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A \right\}$$

(uvědomte si, že $\inf \emptyset = +\infty$). Každý součet

$$\sum_{j=1}^{\infty} \tau(G_j),$$

kde

$$G_j \in \mathcal{G}, \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j \supset A,$$

nazveme *horním součtem* k $\tau^*(A)$. Užitečnost konstrukce dokládá následující věta.

7.3. Věta o τ^* . *Nechť \mathcal{G} , τ a τ^* jsou jako v 7.2. Potom τ^* je vnější míra.*

Důkaz. (VM-1) a (VM-2) jsou zřejmé. (VM-3): Chceme-li dokázat

$$\tau^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j),$$

zřejmě se stačí omezit na případ, kdy na pravé straně máme konečné číslo. Volme $\varepsilon > 0$ a nalezneme $G_j^i \in \mathcal{G}$, $i, j = 1, 2, \dots$, tak, aby

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_j^i \supset A_j \text{ a } \sum_{i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) < \tau^*(A_j) + 2^{-j}\varepsilon.$$

Potom

$$\bigcup_{j,i=1}^{\infty} G_j^i \supset \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \text{ a } \sum_{j,i=1}^{\infty} \tau(G_j^i) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

Tedy

$$\tau^*\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \tau^*(A_j) + \varepsilon.$$

□

7.4. γ -měřitelné množiny. Nechť γ je abstraktní vnější míra na X . Množinu $M \subset X$ nazveme γ -měřitelnou (podle Carathéodoryho), jestliže pro každou “testovací” množinu $T \subset X$ platí

$$\gamma(T) = \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M)$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\gamma)$ a množinovou funkci $\gamma|_{\mathfrak{M}(\gamma)}$ značíme γ° .

K důkazu γ -měřitelnosti množiny M stačí ověřit pouze nerovnost

$$\gamma(T) \geq \gamma(T \cap M) + \gamma(T \setminus M),$$

a to ještě samozřejmě jen v případech, kdy $\gamma(T) < +\infty$.

7.5. Carathéodoryova věta. *Nechť γ je abstraktní vnější míra na X . Pak systém $\mathfrak{M}(\gamma)$ tvoří σ -algebru a γ° je úplná míra.*

Důkaz. Ihned je vidět, že $\emptyset, X \in \mathfrak{M}(\gamma)$, a jestliže $M \in \mathfrak{M}(\gamma)$, potom i $X \setminus M \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Buďte $A, B \in \mathfrak{M}(\gamma)$, chceme ukázat, že i $A \cup B \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Volme tedy testovací množinu $T \subset X$. Použijeme postupně T pro testování měřitelnosti A a $T \cap A$, $T \setminus A$ pro testování měřitelnosti B . Dostaneme (symbolem M^c budeme značit $X \setminus M$)

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \gamma(T \cap A) + \gamma(T \cap A^c), \\ \gamma(T \cap A) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c), \\ \gamma(T \cap A^c) &= \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c), \end{aligned}$$

takže (použijeme také subaditivitu γ)

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \gamma(T \cap A \cap B) + \gamma(T \cap A \cap B^c) + \gamma(T \cap A^c \cap B) + \gamma(T \cap A^c \cap B^c) \\ &\geq \gamma(T \cap (A \cup B)) + \gamma(T \cap (A \cup B)^c). \end{aligned}$$

Kombinací operací doplňku a sjednocení lze také odvodit měřitelnost rozdílů a konečných sjednocení. Mějme nyní posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních γ -měřitelných množin. Indukcí dostaneme z předchozího, že pro každé $m = 1, 2, \dots$ a pro každou testovací množinu $T \subset X$ je

$$(7.2) \quad \gamma(T) = \sum_{j=1}^m \gamma(T \cap E_j) + \gamma\left(T \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j\right)$$

Podrobněji: pro $m = 1$ je to měřitelnost E_1 . Platí-li (7.2) pro m , použijeme testovací množinu $T \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j$ na měřitelnost E_{m+1} a dostaneme

$$(7.3) \quad \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^m E_j) = \gamma(T \cap E_{m+1}) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{m+1} E_j).$$

Sečtením (7.2) a (7.3) dostaneme (7.2) pro $m + 1$. Z (7.2) máme hned

$$\gamma(T) \geq \sum_{j=1}^m \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j)$$

a odtud limitním přechodem pro $m \rightarrow \infty$

$$(7.4) \quad \gamma(T) \geq \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j).$$

Nyní dokážeme, že pro $A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$ je $\bigcup_j A_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$. Vyrobitíme po dvou disjunktní E_j z A_j podle 1.13. Potom $E_j \in \mathfrak{M}(\gamma)$ podle první části důkazu. Použijeme σ -subaditivitu γ na (7.4) a dostaneme

$$\begin{aligned} \gamma(T) &= \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(T \cap E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) \\ &\geq \gamma(T \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j) + \gamma(T \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j), \end{aligned}$$

což dává γ -měřitelnost množiny

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j.$$

Zbývá dokázat, že γ° je míra. Víme, že $\gamma(\emptyset) = 0$. Buď $\{E_j\}$ posloupnost po dvou disjunktních γ -měřitelných množin. Potom použijeme (7.4) na

$$T = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

(pro \geq) a σ -subaditivitu γ (pro \leq) a dostaneme

$$\gamma\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma(E_j).$$

Úplnost míry γ° je snadná. □

7.6. Základní konstrukce. Základní schéma konstrukce míry probíhá ve dvou krocích. Vyjdeme z nezáporné množinové funkce (\mathcal{G}, τ) , od které nechceme téměř nic – předpokládáme jen počáteční podmínku (7.1). V prvním kroku vytvoříme podle 7.2 a 7.3 vnější míru τ^* , v druhém kroku pak podle 7.4 a 7.5 (úplnou) míru $(\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ})$. Pro výslednou míru zavedeme zkrácené značení

$$(7.5) \quad (\mathcal{G}', \tau') := (\mathfrak{M}(\tau^*), \tau^{*\circ}).$$

Konstrukci obvykle považujeme za úspěšnou, jestliže (\mathcal{G}', τ') je rozšířením (\mathcal{G}, τ) . Tento případ nastane při konstrukci Lebesgueovy míry, což uvidíme v následujících kapitolách.

7.7. Test měřitelnosti. Necht (\mathcal{G}, τ) je nezáporná množinová funkce na X splňující počáteční podmínku (7.1) a $H \subset X$ je libovolná množina. Necht H splňuje podmínku

$$\forall G \in \mathcal{G}: \quad G \cap H \in \mathcal{G}, \quad G \setminus H \in \mathcal{G}, \quad \tau(G) = \tau(G \cap H) + \tau(G \setminus H).$$

Potom $H \in \mathcal{G}'$.

Důkaz. Necht $T \subset X$ je libovolná “testovací” množina. Necht $\sum_j \tau(G_j)$ je horní součet k $\tau^*(T)$. Potom $\sum_j \tau(G_j \cap H)$ je horní součet k $\tau^*(T \cap H)$ a $\sum_j \tau(G_j \setminus H)$ je horní součet k $\tau^*(T \setminus H)$. Tedy

$$\tau^*(T \cap H) + \tau^*(T \setminus H) \leq \sum_j \tau(G_j \cap H) + \sum_j \tau(G_j \setminus H) = \sum_j \tau(G_j).$$

Přechodem k infimu přes všechny horní součty dostaneme

$$\tau^*(T \cap H) + \tau^*(T \setminus H) \leq \tau^*(T).$$

Tedy H je τ^* -měřitelná množina. □

7.8. Dynkinův systém. Nechť X je abstraktní množina. Systém množin $\mathcal{D} \subset 2^X$ se nazývá *Dynkinův systém*, je-li splněno

$$(D-1) \quad \emptyset, X \in \mathcal{D},$$

$$(D-2) \quad A, B \in \mathcal{D}, B \subset A \implies A \setminus B \in \mathcal{D}.$$

$$(D-3) \quad \text{Jestliže } A_j \in \mathcal{D} \text{ jsou po dvou disjunktní, pak } \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{D}.$$

Každá σ -algebra je Dynkinův systém.

Důležitost Dynkinových systémů spočívá v tom, že jsou li μ, ν dvě míry na (X, \mathcal{S}) , $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, potom systém množin $\{A \in \mathcal{S} : \mu(A) = \nu(A)\}$ je Dynkinův systém (obecně ne σ -algebra: uvažujte např. míry $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x > 0\})$ a $A \mapsto \lambda(\{x \in A : x < 0\})$ na intervalu $[-1, 1]$).

7.9. Generování Dynkinových systémů. Je-li \mathcal{F} libovolný systém podmnožin X , potom existuje nejmenší Dynkinův systém obsahující \mathcal{F} . Tento Dynkinův systém dostaneme jako průnik všech Dynkinových systémů obsahujících \mathcal{F} ů budeme jej značit $\delta(\mathcal{F})$. Dále budeme značit $\sigma(\mathcal{F})$ nejmenší σ -algebru obsahující \mathcal{F} .

7.10. Věta o Dynkinových systémech. *Nechť \mathcal{F} je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky. Potom $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$.*

Důkaz. Nechť $A \in \sigma(\mathcal{F})$. Označme $\mathcal{F}_A = \{B \in \sigma(\mathcal{F}) : A \cap B \in \delta(\mathcal{F})\}$. Jestliže $A \in \mathcal{F}$, pak \mathcal{F}_A je Dynkinův systém obsahující \mathcal{F} , tedy $\mathcal{F}_A \supset \delta(\mathcal{F})$. Nechť nyní $A \in \delta(\mathcal{F})$, potom podle předchozího kroku je \mathcal{F}_A Dynkinův systém a obsahuje \mathcal{F} . Pak ale podobně jako v předchozím kroku je $\mathcal{F}_A \supset \delta(\mathcal{F})$. Dokázali jsme, že systém $\delta(\mathcal{F})$ je uzavřený na průniky. Každý Dynkinův systém uzavřený na průniky je však zřejmě σ -algebra, tedy $\delta(\mathcal{F})$ je σ -algebra obsahující \mathcal{F} . Z minimality obou systémů plyne, že $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$. □

7.11. Věta o jednoznačnosti. *Nechť \mathcal{F} je systém podmnožin X uzavřený na konečné průniky. Nechť μ a ν jsou míry na $\sigma(\mathcal{F})$, které se shodují na \mathcal{F} . Jestliže existují $X_k \in \mathcal{F}$ tak, že $\mu(X_k) < \infty$ a $\bigcup_{k \in \mathbf{N}} X_k = X$, pak $\mu = \nu$ na $\sigma(\mathcal{F})$.*

Důkaz. Pro každé $k \in \mathbf{N}$ je systém množin $\{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \mu(A \cap X_k) = \nu(A \cap X_k)\}$ Dynkinův systém obsahující \mathcal{F} a tudíž $\delta(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F})$ (rovnost nastává podle věty 7.10). Každou množinu $A \in \sigma(\mathcal{F})$ můžeme napsat jako pod dvou disjunktní sjednocení

$$A = \bigcup_j A_j,$$

kde

$$A_1 = A \cap X_1, \quad A_2 = (A \setminus X_1) \cap X_2, \quad A_3 = (A \setminus (X_1 \cup X_2)) \cap X_3, \dots$$

Protože podle výše dokázaného je $\mu(A_j) = \nu(A_j)$ pro všechna $j \in \mathbf{N}$, dostáváme $\mu(A) = \nu(A)$. □

7.12. Okruh. Nechť X je abstraktní množina. Systém množin $\mathcal{O} \subset 2^X$ se nazývá *okruh*, je-li splněno

$$(O-1) \quad \emptyset \in \mathcal{O},$$

$$(O-2) \quad A, B \in \mathcal{O} \implies A \cup B \in \mathcal{O}, A \setminus B \in \mathcal{O}.$$

Zřejmě $A, B \in \mathcal{O}$ má též za následek $A \cap B \in \mathcal{O}$. Každá σ -algebra je okruh, ale pojem okruhu je mnohem obecnější.

7.13. Pramíra. Nechť X je abstraktní množina a $\mathcal{O} \subset 2^X$ je okruh. Množinová funkce $\pi : \mathcal{O} \rightarrow [0, \infty]$ se nazývá *pramíra*, jestliže splňuje

$$(Pr-1) \quad \pi(\emptyset) = 0,$$

$$(Pr-2) \quad \text{jestliže } A \in \mathcal{O}, A_j \in \mathcal{O}, j = 1, 2, \dots, A_j \text{ jsou po dvou disjunktní a } A = \bigcup_j A_j, \text{ potom}$$

$$\pi(A) = \sum_j \pi(A_j).$$

Požadavek, že hodnoty jsou nezáporné a definiční obor je okruh, je součástí definice pramíry. V případě pramíry se může stát, že sjednocení po dvou disjunktních množin z \mathcal{O} neleží v \mathcal{O} , což není v rozporu s (Pr-2).

Řekneme, že pramíra π na \mathcal{O} je σ -konečná, jestliže existují $X_j \in \mathcal{O}$ tak, že

$$\pi(X_j) < \infty, \quad j = 1, 2, \dots, \quad \text{a} \quad X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j.$$

7.14. Hopfova věta. *Nechť \mathcal{O} je okruh podmnožin X a π je pramíra na \mathcal{O} . Nechť \mathcal{S}_0 je nejmenší σ -algebra obsahující \mathcal{O} . Potom existuje míra μ_0 na \mathcal{S}_0 , která rozšiřuje π . Jestliže π je σ -konečná, pak je taková míra μ_0 na \mathcal{S}_0 určena jednoznačně.*

Důkaz. Nejprve ukážeme, že π' je rozšíření π . Zvolme $A \in \mathcal{O}$. Potom podle tvrzení 7.7 je $A \in \mathfrak{M}(\pi^*) = \mathcal{O}'$. Potřebujeme ukázat, že

$$\pi(A) = \pi^*(A) (= \pi'(A)).$$

Jelikož $\pi(A)$ je horní součet k $\pi^*(A)$, máme

$$\pi^*(A) \leq \pi(A).$$

Nechť $A_j \in \mathcal{O}$, $j = 1, 2, \dots$, $\bigcup_j A_j \supset A$. Vytvořme z $\{A_j\}$ po dvou disjunktní systém $\{E_j\}$ podle 1.13. Pak podle (Pr-2)

$$\pi(A) = \sum_j \pi(A \cap E_j) \leq \sum_j \pi(E_j) \leq \sum_j \pi(A_j).$$

Přejdeme-li na pravé straně k infimu přes všechny horní součty, dostaneme

$$\pi(A) \leq \pi^*(A).$$

Tím jsme dokázali, že π' je rozšíření π . Míra $\pi'|_{\mathcal{S}_0}$ je hledané rozšíření π na \mathcal{S}_0 . Je-li navíc π σ -konečná, pak z věty 7.11 plyne jednoznačnost takového rozšíření. \square

8. LEBESGUEOVA MÍRA

V této kapitole splatíme dluh z prvé kapitoly a ukážeme, že existuje Lebesgueova míra.

8.1. Lebesgueova míra v \mathbf{R}^n . V 1.16 jsme zadefinovali Lebesgueovu míru $(\mathfrak{M}, \lambda) = (\mathfrak{M}_n, \lambda_n)$ jako nejužší úplnou míru v \mathbf{R}^n , která každému n -rozměrnému intervalu Q přiřadí jeho *objem*, tedy rozšiřuje množinovou funkci $(\mathcal{I}, \ell) = (\mathcal{I}_n, \ell_n)$.

Problém této definice tkví v tom, že existence Lebesgueovy míry není zřejmá. Abychom ji dokázali, pomocí základní konstrukce sestrojíme míru $(\mathcal{I}', \ell') = (\mathcal{I}'_n, \ell'_n)$ (značení jako v 7.6) a ověříme v několika příštích tvrzeních, že tato míra má požadované vlastnosti.

8.2. Měřitelnost borelovských množin. *Každá borelovská podmnožina \mathbf{R}^n je ℓ^* -měřitelná.*

Důkaz. Nechť H je poloprostor tvaru $\{x \in \mathbf{R}^n : x_i < a\}$, kde $a \in \mathbf{R}$. Potom pro každý interval $Q \in \mathcal{I}_n$ je

$$Q \cap H \in \mathcal{I}_n, \quad Q \setminus H \in \mathcal{I}_n \quad \text{a} \quad \ell(Q \cap H) + \ell(Q \setminus H) = \ell(Q).$$

Tedy $H \in \mathfrak{M}_n$ podle tvrzení 7.7. Jelikož borelovská σ -algebra je zřejmě generovaná takovými poloprostory a $\mathfrak{M}(\ell^*)$ je σ -algebra, je $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n) \subset \mathfrak{M}(\ell^*)$. \square

8.3. Vnější míra intervalu. *Je-li $Q \in \mathcal{I}$, pak $\ell^*(Q) = \ell(Q)$.*

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že interval Q je kompaktní, tj. uzavřený a omezený, a meze jsou racionální. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme posloupnost $\{G_k\}$ intervalů tak, že

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(G_k) < \ell^*(Q) + \varepsilon.$$

Můžeme předpokládat, že G_k jsou otevřené a jejich meze jsou racionální, neboť každý interval G je obsažen v otevřeném intervalu G' s racionálními mezemi, jehož objem se od objemu G libovolně málo liší. Potom ovšem z kompaktnosti Q plyne, že existuje m přirozené tak, že

$$Q \subset \bigcup_{k=1}^m G_k.$$

Máme vyjádření

$$Q = [a^1, b^1] \times \cdots \times [a^n, b^n],$$

$$G_k = (a_k^1, b_k^1) \times \cdots \times (a_k^n, b_k^n), \quad k = 1, 2, \dots, m,$$

kde všechna čísla a^i, b^i, a_j^i, b_j^i jsou racionální. Buď q jejich nejmenší společný jmenovatel. Uvažujme množinu krychlí

$$Q = \left\{ \left(\frac{z_1}{q}, \frac{z_1+1}{q} \right) \times \cdots \times \left(\frac{z_n}{q}, \frac{z_n+1}{q} \right) : z \in \mathbf{Z}^n \right\}$$

a pro $K \in \mathcal{Q}$ označme

$$\beta_k^K = \begin{cases} 1, & \text{když } K \subset G_k, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Máme

$$\ell(Q) = \sum_{K \in \mathcal{Q}, K \subset Q} \ell(K) \leq \sum_{K \in \mathcal{Q}} \sum_{k=1}^m \beta_k^K \ell(K) = \sum_{k=1}^m \sum_{K \in \mathcal{Q}} \beta_k^K \ell(K) = \sum_{k=1}^m \ell(G_k).$$

Tím je důkaz hotov pro kompaktní interval s racionálními mezemi. V obecném případě dokončíme důkaz tak, že Q budeme aproximovat posloupností kompaktních intervalů s racionálními mezemi. \square

8.4. Struktura měřitelných množin. Nechť $E \in \mathcal{I}'$. Potom

(a) existuje posloupnost $\{G_j\}$ otevřených množin tak, že

$$G_j \supset E \text{ a } \ell'(G_j \setminus E) \rightarrow 0,$$

(b) existuje posloupnost $\{F_j\}$ uzavřených množin tak, že

$$F_j \subset E \text{ a } \ell'(E \setminus F_j) \rightarrow 0,$$

(c) existuje posloupnost $\{K_j\}$ kompaktních množin tak, že

$$K_j \subset E \text{ a } \ell' \left(E \setminus \bigcup_j K_j \right) = 0.$$

Naopak, každá množina $E \subset \mathbf{R}^n$ mající některou z vlastností (a), (b), (c) leží v \mathcal{I}' .

Důkaz. (a) Jde vlastně o to dokázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina $G \supset E$ tak, že $\ell'(G \setminus E) < \varepsilon$. To dokážeme ve dvou krocích.

1. krok. Budeme předpokládat, že $\ell'(E) < \infty$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle definice ℓ' existuje posloupnost $\{Q_i\}$ otevřených intervalů tak, že

$$E \subset \bigcup_i Q_i, \quad \sum_i \ell(Q_i) < \ell'(E) + \varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} Q_i.$$

Potom G je zřejmě otevřená nadmnožina E a

$$\begin{aligned} \ell'(G \setminus E) &\leq \ell' \left(\bigcup_i Q_i \setminus E \right) \\ &= \ell' \left(\bigcup_i Q_i \right) - \ell'(E) \\ &\leq \sum_i \ell(Q_i) - \ell'(E) \leq \ell'(E) + \varepsilon - \ell'(E) = \varepsilon. \end{aligned}$$

2. krok. V obecném případě napíšeme množinu E ve tvaru po dvou disjunktního sjednocení množin z \mathcal{I}' jako $E = \bigcup_{k \in \mathbf{N}} E_k$, kde $\ell'(E_k) < \infty$. Pro každé $k \in \mathbf{N}$ najdeme podle prvního kroku otevřenou množinu

$G^k \supset E_k$ tak, že $\ell'(G^k \setminus E_k) < 2^{-k}\varepsilon$. Potom pro $G = \bigcup_k G^k$ platí $G \supset E$ a $\ell'(G \setminus E) < \varepsilon$.

(b) dostaneme z (a) přechodem k doplňkům.

(c) Podle (b) existuje posloupnost $\{F_k\}$ uzavřených množin tak, že

$$F_k \subset E \text{ a } \ell' \left(E \setminus \bigcup_k F_k \right) = 0.$$

Množiny $F_k \cap [-m, m]^n$, $k, m = 1, 2, \dots$, jsou kompaktní a lze je uspořádat do posloupnosti.

Pokud E má některou z vlastností (a), (b), (c), pak se liší od borelovské množiny o množinu míry nula. Borelovské množiny jsou ℓ' -měřitelné podle věty 8.2, měřitelnost ℓ^* -nulových množin plyne z úplnosti míry ℓ' . Tudíž $E \subset \mathcal{I}'$. \square

8.5. Věta o existenci Lebesgueovy míry. *Lebesgueova míra v \mathbf{R}^n existuje. Každá borelovská množina je λ -měřitelná.*

Důkaz. Podle vět 8.2 a 8.3 je ℓ' rozšíření ℓ na úplnou míru. Je-li μ rozšíření ℓ na úplnou míru, určitě se shoduje s ℓ' na ℓ^* -nulových množinách. Jelikož systém \mathcal{F} všech množin, které jsou buď intervaly nebo ℓ^* -nulové, je uzavřený na konečné průniky a \mathbf{R}^n lze napsat jako sjednocení spočetně mnoha intervalů konečné míry, podle věty (7.11) je $\mu = \ell'$ na $\sigma(\mathcal{F})$. Podle věty 8.4 je $\mathcal{I}' \subset \sigma(\mathcal{F})$, tedy z minimality dostáváme $\mathcal{I}' = \sigma(\mathcal{F})$. Tedy (\mathcal{I}', ℓ') je nejužší rozšíření ℓ na úplnou míru. \square

9. SOUČIN MĚR A FUBINIOVA VĚTA

9.1. Součin měr. Nechť (X, \mathcal{S}, μ) , a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ -konečné. Uvažujme systém $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ všech podmnožin $X \times Y$ tvaru $A \times B$, kde $A \in \mathcal{S}, B \in \mathcal{T}$. Takovým množinám budeme říkat *měřitelné obdélníky*. Na $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ definujeme množinovou funkci $\mu \times \nu$ předpisem

$$\mu \times \nu (A \times B) = \mu(A) \nu(B).$$

Definujeme *součin měr* $\mu \otimes \nu$ jako nejužší míru na $X \times Y$, která každému měřitelnému obdélníku $Q \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ přiřadí $\mu \times \nu (Q)$. Dále definujeme *úplný součin měr* $\overline{\mu \otimes \nu}$ jako nejužší rozšíření $\mu \times \nu$ na úplnou míru. Podobně jako u Lebesgueovy míry je třeba ukázat existenci nejužšího prvku ve třídě možných rozšíření.

9.2. Měřitelnost měřitelných obdélníků. *Nechť (X, \mathcal{S}, μ) , a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Potom každý měřitelný obdélník je $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelný.*

Důkaz. Uvažujme množinu $E \in \mathcal{S}$. Chceme dokázat $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelnost množiny $E \times Y$. Buď $A \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$ měřitelný obdélník. Potom

$$(A \times B) \cap (E \times Y) = (A \cap E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}, \quad (A \times B) \setminus (E \times Y) = (A \setminus E) \times B \in \mathcal{S} \times \mathcal{T}$$

a

$$(\mu \times \nu)((A \times B) \cap (E \times Y)) + (\mu \times \nu)((A \times B) \setminus (E \times Y)) = (\mu \times \nu)(A \times B).$$

Tedy $E \times Y$ je $(\mu \times \nu)^*$ -měřitelná podle tvrzení 7.7. Podobně bychom dostali měřitelnost $X \times F$ pro každou $F \in \mathcal{T}$. Tedy

$$E \times F = (E \times Y) \cap (X \times F) \in \mathfrak{M}((\mu \times \nu)^*).$$

\square

9.3. Vnější míra měřitelného obdélníku. *Je-li $A \in \mathcal{S}$ a $B \in \mathcal{T}$, pak*

$$(\mu \times \nu)^*(A \times B) = \mu \times \nu (A \times B).$$

Důkaz. Nechť

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu \times \nu (A_j \times B_j)$$

je horní součet k $(\mu \times \nu)^*(A \times B)$. Potom pro každý bod $x \in X$ je

$$\nu(B)\chi_A(x) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j}(x).$$

Podle věty 5.5 (a) je

$$\begin{aligned} (\mu \times \nu)(A \times B) &= \int_X \nu(B)\chi_A d\mu \leq \int_X \sum_{j=1}^{\infty} \nu(B_j)\chi_{A_j} d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_X \nu(B_j)\chi_{A_j} d\mu \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} (\mu \times \nu)(A_j \times B_j). \end{aligned}$$

\square

9.4. Existence součinu měř. *Nechť (X, \mathcal{S}, μ) , a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Nechť míry μ, ν jsou σ -konečné. Nechť \mathcal{U} je nejmenší σ -algebra obsahující $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ a $\overline{\mathcal{U}}$ je nejmenší σ -algebra obsahující $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ a všechny $(\mu \times \nu)^*$ -nulové množiny. Potom $(\mu \times \nu)'[\mathcal{U}]$ je součin měř μ a ν a $(\mu \times \nu)'[\overline{\mathcal{U}}]$ je úplný součin měř μ a ν .*

Důkaz. Podle vět 9.2 a 9.3 je $(\mu \times \nu)'$ rozšíření $\mu \times \nu$ na úplnou míru. Je-li ρ rozšíření $\mu \times \nu$ na úplnou míru, určitě se shoduje s $(\mu \times \nu)'$ na $(\mu \times \nu)^*$ -nulových množinách. Jelikož systém \mathcal{F} všech množin, které jsou buď intervaly nebo $(\mu \times \nu)^*$ -nulové, je uzavřený na konečné průniky a $X \times Y$ lze napsat jako sjednocení spočetně mnoha měřitelných obdélníků konečné míry, podle věty (7.11) je $\rho = (\mu \times \nu)'$ na $\overline{\mathcal{U}} = \sigma(\mathcal{F})$. Tedy $(\mu \times \nu)'[\overline{\mathcal{U}}]$ je nejužší rozšíření $\mu \times \nu$ na úplnou míru. Podobně lze dokázat, že $(\mu \times \nu)'[\mathcal{U}]$ je nejužší rozšíření $\mu \times \nu$ na míru. \square

9.5. Poznámky. Podobnou metodou jako v důkazu věty 8.4 bychom mohli dokázat, že $\overline{\mathcal{U}} = (\mathcal{S} \times \mathcal{T})'$ a tedy úplný součin měř μ a ν není nic jiného než $(\mu \times \nu)'$.

Z vět 9.2, 9.3 vidíme, že rozšíření $\mu \times \nu$ na (úplnou) míru můžeme provést bez omezujících předpokladů, avšak pokud míry μ a ν nejsou σ -konečné, mohli bychom ztratit jednoznačnost, kterou potřebujeme k nalezení *nejužšího* rozšíření.

9.6. Řezy. Nechť $M \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} M^{x,*} &= \{y \in Y : (x, y) \in M\}, & x \in X, \\ M^{*,y} &= \{x \in X : (x, y) \in M\}, & y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy*.

9.7. Výpočet součinné míry množiny. *Nechť (X, \mathcal{S}, μ) a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou σ -konečné. Bud' (\mathcal{R}, ρ) součin měř μ a ν . Nechť M je ρ -měřitelná množina. Potom pro každé $x \in X$ je množina $M^{x,*}$ ν -měřitelná, funkce $x \mapsto \nu(M^{x,*})$ je měřitelná a*

$$\rho(M) = \int_X \nu(M^{x,*}) d\mu.$$

Důkaz. Předpokládejme nejprve, že míry μ a ν jsou konečné. Potom systém všech množin M , pro které tvrzení platí, je Dynkinův systém obsahující všechny měřitelné obdélníky. Tudiž podle věty 7.10 tvrzení platí pro každou ρ -měřitelnou množinu. Přejít k obecným σ -konečným měřám představuje nezáživný technický detail. \square

9.8. Fubiniova věta. *Nechť (X, \mathcal{S}, μ) a (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou. Nechť míry μ a ν jsou úplné a σ -konečné. Bud' (\mathcal{R}, ρ) součin měř μ a ν a $(\overline{\mathcal{R}}, \overline{\rho})$ jejich úplný součin. Nechť f je $\overline{\rho}$ -měřitelná funkce na $\overline{\rho}$ -měřitelné množině $M \subset X \times Y$. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y)$$

má smysl. Potom pro μ -skoro všechna x má smysl integrál

$$g(x) := \int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y),$$

funkce g má integrál

$$\int_X g d\mu$$

a

$$(9.1) \quad \int_M f(x, y) d\overline{\rho}(x, y) = \int_X g d\mu = \int_X \left(\int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x).$$

Důkaz. 1. krok. Podle věty 9.7 tvrzení platí pro $f = \chi_A$, kde A leží v σ -algebře \mathcal{R} .

2. krok. Je-li N $(\mu \times \nu)^*$ -nulová, pak existuje $E \in \mathcal{R}$ tak, že $E \supset N$ a $\rho(E) = 0$. Z platnosti tvrzení pro χ_E snadno odvodíme platnost tvrzení pro χ_N .

3. krok. Obecnou množinu $M \in \overline{\mathcal{R}}$ můžeme napsat ve tvaru disjunktního sjednocení $M = A \cup N$, kde $A \in \mathcal{R}$ a N je $(\mu \times \nu)^*$ -nulová. Důkaz tvrzení pro $f = \chi_M$ dostaneme z prvního a druhého kroku.

4. krok. Víme-li, že tvrzení platí pro charakteristické funkce množin z $\overline{\mathcal{R}}$, rutinním postupem přes jednoduché funkce a nezáporné měřitelné funkce odvodíme obecný případ. \square

9.9. Poznámka. Role prostorů X a Y ve Fubiniově větě je symetrická. Proto také platí Fubiniova věta ve tvaru

$$(9.2) \quad \int_M f(x, y) d\bar{\rho}(x, y) = \int_Y \left(\int_{M^{y,*}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

a je-li splněn předpoklad existence integrálu

$$\int_M f(x, y) d\bar{\rho}(x, y),$$

můžeme ospravedlnit záměnu pořadí integrace

$$\int_X \left(\int_{M^{x,*}} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x) = \int_Y \left(\int_{M^{y,*}} f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y)$$

9.10. Součiny konečně mnoha měř. Zcela stejně bychom “vynásobili” konečně mnoho prostorů s měrami $(X_i, \mathcal{S}_i, \mu_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, pouze výklad by byl méně přehledný pro velké množství indexů. Také můžeme převést úlohu na předchozí rekurentním násobením, např.

$$\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n = (\mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n.$$

9.11. Lebesgueova míra a součin měř. $n + m$ -rozměrná Lebesgueova míra je úplným součinem n -rozměrné a m -rozměrné Lebesgueovy míry.

Důkaz. Nechť $A \subset \mathbf{R}^n$ je měřitelná. Podle věty 8.4 (a) existují otevřené množiny $G_j \subset \mathbf{R}^n$ a λ_{n+m} -nulová množina $N \subset \mathbf{R}^n$ tak, že

$$A = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \right) \setminus N$$

Potom

$$A \times \mathbf{R}^m = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} G_j \times \mathbf{R}^m \right) \setminus (N \times \mathbf{R}^m),$$

tedy $A \times \mathbf{R}^m$ je λ_{n+m} -měřitelná. Podobně $\mathbf{R}^n \times B$ je λ_{n+m} -měřitelná pro každou λ_m měřitelnou B . Tedy “měřitelné obdélníky” jsou λ_{m+n} -měřitelné. Odtud plyne, že jak λ_{n+m} je nejužší úplná míra, v níž jsou všechny měřitelné obdélníky měřitelné a je to tedy úplný součin měř λ_n a λ_m . \square

9.12. Příklad. Nechť $N \subset \mathbf{R}$ je neměřitelná množina. Potom $N \times \{0\}$ je λ_2 -nulová v \mathbf{R}^2 , tudíž λ_2 -měřitelná, ale není $\lambda_1 \otimes \lambda_1$ -měřitelná. Předchozí věta tedy ztratí platnost, nahradíme-li úplný součin obyčejným součinem.

9.13. Příklad. Počítejme

$$\begin{aligned} \frac{\pi^2}{4} &= [\operatorname{arctg}^2 x]_{x=0}^{\infty} = \int_0^{\infty} \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{2}{1+x^2} [\operatorname{arctg}(yx)]_{y=0}^1 dx \\ &= \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)} dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\infty} \frac{2x}{(1+x^2)(1+y^2x^2)} dx \right) dy \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1-y^2} \left[\ln \frac{1+x^2}{1+x^2y^2} \right]_{x=0}^{\infty} dy \\ &= -2 \int_0^1 \frac{\ln y}{1-y^2} dy = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 y^{2n} \ln y dy \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \end{aligned}$$

(odůvodněte samostatně použití Fubiniovy věty a záměnu řady a integrálu). Označme

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \dots, \\ L &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots, \\ V &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \end{aligned}$$

Potom máme

$$V = L + S, \quad V = 2^2 S, \quad L = \frac{\pi^2}{8},$$

a odtud

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = V = \frac{4}{3} L = \frac{\pi^2}{6}.$$

9.14. Příklad (Ratajovy dlaždičky). Rozdělme \mathbf{R}^2 na čtverce $Q_{ij} = [i, i+1) \times [j, j+1)$. Nechť funkce $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ je definována předpisem

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x \in Q_{i,j}, \quad 0 < j = i + 1, \\ -1, & x \in Q_{i,j}, \quad 0 < i = j + 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Pak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx = 1 \neq -1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy.$$

10. VĚTA O SUBSTITUCI

10.1. Diferencovatelné zobrazení. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_m) : G \rightarrow \mathbf{R}^m$ je zobrazení diferencovatelné v bodě $x \in G$. Matice lineárního zobrazení $\varphi'(t)$ se nazývá *Jacobiho matice* zobrazení φ v bodě t . Je to tedy matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial t_j}(t) \right)_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}}.$$

Zobrazení $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^m$ nazveme *regulární*, jestliže má spojitou derivaci (tj. spojitě všechny parciální derivace) a jeho Jacobiho matice má všude v G hodnost n .

10.2. Jakobián. V této kapitole se budeme zabývat možností záměny proměnných v integrálu prostřednictvím zobrazení $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^n$. Budeme tedy vyšetřovat jen případ $m = n$. Pak je Jacobiho matice čtvercová a její determinant nazveme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t .

10.3. Věta o substituci. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť u je funkce na $M \subset \varphi(G)$. Potom

$$\int_M u(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(M)} u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl. (Připomeňme, že aby integrál mohl mít smysl, je mj. nutné, aby integrační obor byl měřitelná množina a integrovaná funkce byla měřitelná)

Důkaz. Důkaz uvedeme ke konci kapitoly. □

10.4. Polární souřadnice. Nechť

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 : r > 0, -\pi < \alpha < \pi \right\}.$$

Zobrazení $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ dané předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(r, \alpha) &:= \begin{pmatrix} x(r, \alpha) \\ y(r, \alpha) \end{pmatrix}, \\ x(r, \alpha) &:= r \cos \alpha, \\ y(r, \alpha) &:= r \sin \alpha \end{aligned}$$

se nazývá *zobrazení polárních souřadnic*.

10.5. Věta o polárních souřadnicích. Necht' $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ je zobrazení polárních souřadnic. Potom φ je prosté regulární zobrazení a $J\varphi(r, \alpha) = r$. Je-li $M \subset \mathbf{R}^2$ a u funkce na M , potom

$$(10.1) \quad \int_M u(x, y) dx dy = \int_{G \cap \varphi^{-1}(M)} u(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r dr d\alpha,$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r \cos \alpha &= x, \\ r \sin \alpha &= y \end{aligned}$$

s podmínkou $\begin{pmatrix} r \\ \alpha \end{pmatrix} \in G$ má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \alpha &= 2 \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{aligned}$$

pokud $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\}$. Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost. Vzorec (10.1) dostaneme z věty o substituci 10.3, uvážíme-li, že $\lambda(N) = 0$. \square

10.6. Sférické souřadnice. Necht' tentokrát

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 : r > 0, -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}, -\pi < \beta < \pi \right\}.$$

Zobrazení $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ dané předpisem

$$\begin{aligned} \varphi(r, \alpha, \beta) &:= \begin{pmatrix} x(r, \alpha, \beta) \\ y(r, \alpha, \beta) \\ z(r, \alpha, \beta) \end{pmatrix}, \\ x(r, \alpha, \beta) &:= r \cos \alpha \cos \beta, \\ y(r, \alpha, \beta) &:= r \cos \alpha \sin \beta, \\ z(r, \alpha, \beta) &:= r \sin \alpha \end{aligned}$$

se nazývá zobrazení sférických souřadnic.

10.7. Věta o sférických souřadnicích. Necht' $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ je zobrazení sférických souřadnic. Potom φ je prosté regulární zobrazení a $J\varphi(r, \alpha, \beta) = -r^2 \cos \alpha$. Je-li $M \subset \mathbf{R}^3$ a u funkce na M , potom

$$(10.2) \quad \begin{aligned} &\int_M u(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_{G \cap \varphi^{-1}(M)} u(r \cos \alpha \cos \beta, r \cos \alpha \sin \beta, r \sin \alpha) r^2 \cos \alpha dr d\alpha d\beta, \end{aligned}$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Soustava rovnic

$$\begin{aligned} r \cos \alpha \cos \beta &= x, \\ r \cos \alpha \sin \beta &= y, \\ r \sin \alpha &= z \end{aligned}$$

s podmínkou $\begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in G$ má právě jedno řešení

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \alpha &= \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \\ \beta &= 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \end{aligned}$$

pokud $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \notin N := (-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbf{R}$. Ověření hladkosti a výpočet jakobiánu je rutinní záležitost.

Vzorec (10.2) dostaneme z věty o substituci 10.3, uvážíme-li, že $\lambda(N) = 0$. \square

V dalším se budeme zabývat důkazem věty o substituci.

10.8. Lemma o míře lineárního obrazu. *Nechť $L : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ je lineární zobrazení. Potom pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbf{R}^n$ je $L(E)$ měřitelná a platí*

$$\lambda(L(E)) = |JL|\lambda(E).$$

Důkaz. Jestliže L je singularní, pak $L(\mathbf{R}^n)$ je lineární podprostor \mathbf{R}^n dimenze $< n$ a tudíž $\lambda(L(E)) = 0 = |JL|\lambda(E)$ pro každou množinu $E \subset \mathbf{R}^n$. Můžeme tedy předpokládat, že zobrazení L je regulární. Potom inverzní zobrazení je spojitě a obraz $L(E)$ každé borelovské množiny je borelovská množina. Nejprve dokážeme, že existuje konstanta $\alpha > 0$ tak, že pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}^n$ je

$$(10.3) \quad \lambda(L(E)) = \alpha\lambda(E).$$

Položme

$$\alpha = \lambda(L([0, 1]^n)) > 0.$$

Definujeme množinovou funkci μ na $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$ předpisem

$$\mu(E) = \lambda(L(E))/\alpha.$$

Především, jelikož L a L^{-1} jsou měřitelné, množinová funkce μ je míra. Předpokládejme, že q je přirozené číslo a Q je krychle $[0, 1/q]^n$. Potom každá posunutá kopie Q má stejnou míru μ a $[0, 1]^n$ lze disjunktně rozložit na q^n takových kopií. Proto

$$\mu(Q) = q^{-n} = \lambda(Q).$$

Pomocí aditivity měr nahlédneme, že

$$\mu(I) = \lambda(I)$$

pro každý interval o racionálních mezích. Protože systém takových intervalů je uzavřený na konečné průniky a generuje Dynkinův systém $\mathcal{B}(\mathbf{R}^n)$, podle věty o jednoznačnosti 7.11 je $\mu = \lambda$ na borelovských množinách. Zúplněním dostaneme (10.3) pro každou λ -měřitelnou množinu. Zbývá dokázat, že $\alpha = JL$.

Nejprve dokážeme tvrzení pro zobrazení

$$Lx = (d_1x^1, \dots, d_nx^n), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

kde d_1, \dots, d_n jsou nezáporná reálná čísla. Potom matice L je diagonální matice, která má diagonální prvky d_1, \dots, d_n . Pro každý n -rozměrný interval Q je $L(Q)$ také n -rozměrný interval a

$$\ell(L(Q)) = d_1 \dots d_n \ell(Q) = JL \ell(Q).$$

Ve stejném poměru dopadají také horní součty k libovolné množině, tedy pro měřitelné množiny máme

$$\lambda(L(E)) = |JL| \lambda(E).$$

Je-li L izometrické lineární zobrazení, potom zobrazuje jednotkovou kouli $\{x : |x| \leq 1\}$ na sebe a tudíž $\alpha = 1$. Konečně, je-li L libovolné lineární zobrazení, pak lineární algebra tvrdí, že existují izometrická lineární zobrazení P, Q (reprezentovaná ortogonálními maticemi) a "diagonální" lineární zobrazení D tak, že $L = QDP$. (Označme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ kanonickou bázi prostoru \mathbf{R}^n . Matice zobrazení L^*L je symetrická pozitivně definitní a tudíž existuje ortonormální báze $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ prostoru \mathbf{R}^n složená z vlastních vektorů matice L^*L . Existují tedy $\lambda_i > 0$ tak, že

$$L^*L\vec{f}_i = \lambda_i^2\vec{f}_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

Potom Q, D and P se konstruují jako lineární zobrazení trnsformující báze na báze: $P(\vec{f}_i) = \vec{e}_i$, $D(\vec{e}_i) = \lambda_i\vec{e}_i$, $Q(\lambda_i\vec{e}_i) = L(\vec{f}_i)$. Máme

$$\begin{aligned} (Q\vec{e}_i) \cdot (Q\vec{e}_j) &= \frac{L\vec{f}_i}{\lambda_i} \cdot \frac{L\vec{f}_j}{\lambda_j} = \frac{L^*L\vec{f}_i}{\lambda_i\lambda_j} \cdot \vec{f}_j \\ &= \begin{cases} \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = 1, & i = j, \\ \frac{\lambda_i^2}{\lambda_i\lambda_j} \vec{f}_i \cdot \vec{f}_j = 0, & i \neq j. \end{cases} \end{aligned}$$

tedy Q je ortogonální.) S využitím věty o součinu determinantů dostáváme pro každou měřitelnou množinu $E \subset \mathbf{R}^n$, že $L(E)$ je měřitelná a

$$\begin{aligned}\lambda(L(E)) &= \lambda(D(P(E))) = \det D \lambda(P(E)) = \det D \lambda(E) \\ &= |\det Q \det D \det P| \lambda(E) = |\det(QDP)| \lambda(E) \\ &= |\det L| \lambda(E).\end{aligned}$$

□

10.9. Značení. V dalším budeme značit

$$B(z, r) = \{x \in \mathbf{R}^n : |x - z| < r\}$$

(tedy $B(z, r)$ je koule o středu z a poloměru r), a pro danou množinu $X, Y \subset \mathbf{R}^n$ bude

$$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\}.$$

Norma lineárního zobrazení L je

$$\|L\| := \sup\{Lx : x \in \mathbf{R}^n, |x| \leq 1\}.$$

10.10. Klíčový odhad. Nechť L je lineární zobrazení, $\rho > 0$, $0 < r < \rho\|L\|$ a $Q = [-\rho, \rho]^n$. Potom

$$\lambda((L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q)) \leq C_n \rho^{n-1} \|L\|^{n-1} r,$$

kde

$$C_n = 2^{2n+1}(n+2)^{n+1}$$

Důkaz. Nechť S je stěna krychle Q , S' je $(n-1)$ -rozměrná krychle rovnoběžná s S se středem v počátku a u je jednotkový vektor kolmý na $L(S')$. Najdeme přirozené číslo k tak, aby bylo

$$kr \leq \rho\|L\| \leq (k+1)r.$$

Uvažujme vrstvy

$$A_i = (L(S) + B(2iru, r)) \quad i = 0, 1, \dots, k.$$

Nechť $x_i, x_j \in L(S)$, $y_i \in B(2iru, r)$, $y_j \in B(2jru, r)$. Jestliže $x_i + y_i = x_j + y_j$, pak z kolmosti u a $x_j - x_i$ a trojúhelníkové nerovnosti dostáváme

$$\begin{aligned}|2jru - 2iru| &\leq |(2jru - 2iru) + (x_j - x_i)| \leq |(2jru - 2iru) + (x_j - x_i)| = |(2jru - 2iru) + (y_i - y_j)| \\ &\leq |y_i - 2iru| + |y_j - 2jru| < 2r,\end{aligned}$$

což je možné pouze jen když $i = j$. Tedy systém množin $\{A_i\}$ je po dvou disjunktní. Buď $t \in S$ a $y \in B(2iru, r)$. Potom

$$\begin{aligned}|t| &\leq \delta\sqrt{n} \leq \delta n, \\ |Lt| &\leq \delta n \|L\|, \\ |y - 2iru| &\leq r, \\ |2iru| &= 2ir.\end{aligned}$$

Tedy

$$|Lt + y| \leq (2i+1)r + \delta n \|L\| \leq (2k+1)r + n(k+1)r \leq (n+2)kr + (n+1)r \leq 2(n+2)kr,$$

neboli

$$\bigcup_i A_i \subset B(0, 2(n+2)kr) \subset (-2(n+2)kr, 2(n+2)kr)^n.$$

Jelikož počet vrstev je $k+1$ a každá z nich má stejnou míru, je

$$\lambda(A_i) \leq (4(n+2)kr)^n / (k+1) < 2^{2n}(n+2)^n k^{n-1} r^n \leq 2^{2n}(n+2)^n \rho^{n-1} \|L\|^{n-1} r$$

Nechť $x \in (L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q)$. Potom existuje $z \in Q$ tak, že $|x - Lz| < r$. Na úsečce spojující $L^{-1}x$ a z najdeme bod z' , který leží na hranici Q . Můžeme předpokládat $z = z'$. Tedy

$$(L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q) \subset \bigcup_S (L(S) + B(z, r)),$$

kde S probíhá všechny stěny krychle Q , kterých je $2n$. Tedy

$$\lambda((L(Q) + B(0, r)) \setminus L(Q)) \leq 2^{2n+1}(n+2)^{n+1} \rho^{n-1} \|L\|^{n-1} r.$$

□

10.11. Věta o substituci-nerovnost. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení. Nechť $E \subset G$ je měřitelná množina. Potom*

$$\ell^*(\varphi(E)) \leq \int_E |J\varphi(t)| dt.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že E je omezená a $\overline{E} \subset G$, jinak bychom E rozložili na spočetný systém disjunktích množin, pro které by dodatečný předpoklad platil. Zvolme $\varepsilon > 0$. Najdeme omezenou otevřenou množinu $U \subset G$ tak, že $\overline{U} \subset G$ a

$$(10.4) \quad \int_U |J\varphi(t)| dt \leq \int_E |J\varphi(t)| dt + \varepsilon.$$

Funkce $J\varphi$ a φ' jsou stejnoměrně spojitě na U . Najdeme tedy konstantu C a poloměr $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $s, t \in U$ platilo

$$(10.5) \quad \begin{aligned} |s - t| < \delta &\implies |J\varphi(s) - J\varphi(t)| < \varepsilon, \\ |s - t| < \delta &\implies \|\varphi'(s) - \varphi'(t)\| < \varepsilon, \\ &\|\varphi'(t)\| \leq C. \end{aligned}$$

Rozdělíme U na po dvou disjunktí sjednocení krychlí

$$U = \bigcup_j Q_j,$$

kde každá krychle Q_j má průměr menší než δ . Označme z_j střed krychle Q_j , ρ_j poloviční délku její hrany a $L_j = \varphi'(z_j)$. Nechť $t \in Q_j$. Potom

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(z_j) - L(t - z_j)| &\leq \left| \int_0^1 \frac{d}{d\xi} \left(\varphi(z_j + \xi(t - z_j)) - \varphi(z_j) - L_j(\xi(t - z_j)) \right) d\xi \right| \\ &= \left| \int_0^1 \varphi'(z_j + \xi(t - z_j))(t - z_j) - L_j(t - z_j) d\xi \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\varphi'(z_j + \xi(t - z_j)) - L_j\| |t - z_j| d\xi \\ &\leq \varepsilon 2n\rho_j. \end{aligned}$$

Tedy

$$\varphi(Q_j) \subset L(Q_j) + B(\varphi(z_j) - L(z_j), 2n\varepsilon\rho_j)$$

Z posunutě verze lemmatu 10.10, z lemmatu 10.8 a odhadu (10.5) dostaneme

$$\begin{aligned} \ell^*(\varphi(Q_j)) &\leq \lambda(L_j(Q_j)) + C_n(C\rho_j)^{n-1}2n\varepsilon\rho_j \\ &= \int_{Q_j} (JL_j + 2^{-n}C_nC^{n-1}2n\varepsilon) dt \\ &\leq \int_{Q_j} (J\varphi(t) + (1 + nC_nC^{n-1})\varepsilon) dt. \end{aligned}$$

Sečtením přes j a použitím (10.4) dostaneme

$$\ell^*(\varphi(E)) \leq \sum_j \ell^*(\varphi(Q_j)) \leq \int_U (J\varphi(t) + (1 + nC_nC^{n-1})\varepsilon) dt \leq \int_E J\varphi(t) dt + \varepsilon + (1 + nC_nC^{n-1})\varepsilon\lambda(U).$$

Limitní přechod $\varepsilon \rightarrow 0$ dává požadovanou nerovnost. □

10.12. Sardova věta. *Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je spojitě diferencovatelné zobrazení. Nechť*

$$Z = \{t \in G : J\varphi(t) = 0\}.$$

Potom $\lambda\varphi(Z) = 0$.

Důkaz. Tvrzení je zřejmým důsledkem předchozí věty 10.11. □

Důkaz věty o substituci. Můžeme předpokládat, že $M = \varphi(G)$, tedy uvažujeme měřitelnou funkci u na $\varphi(G)$. Také můžeme předpokládat, že funkce u je nezáporná. Jestliže zobrazení φ je regulární a prosté, podle věty o inverzním zobrazení je inverzní zobrazení též regulární a prosté. Nechť $E \subset G$ je borelovská množina. Potom $\varphi(E)$ je také borelovská množina, neboť zobrazení φ^{-1} je spojitě. Podle věty 10.11 máme

$$\lambda(\varphi(E)) \leq \int_E |J\varphi(t)| dt.$$

Odtud také dostaneme, že obraz λ -nulové množiny je λ -nulová množina. Máme-li tedy nezápornou měřitelnou funkci $f : G \rightarrow \mathbf{R}$, pak postupně dostaneme měřitelnost funkce $f \circ \varphi^{-1}$ a vzorec

$$(10.6) \quad \int_{\varphi(G)} f(\varphi^{-1}(x)) dx \leq \int_G f(t) |J\varphi(t)| dt.$$

Tvrzení už jsme dokázali pro charakteristickou funkci měřitelné množiny a odtud obvyklým postupem přes jednoduché funkce plyne pro každou nezápornou měřitelnou funkci. Vyměníme-li role φ a φ^{-1} a uvažujeme-li nezápornou měřitelnou funkci v na $\varphi(G)$, dostaneme měřitelnost funkce $v \circ \varphi$ a vzorec

$$(10.7) \quad \int_G v(\varphi(t)) dt \leq \int_{\varphi(G)} v(x) |J(\varphi^{-1})(x)| dx$$

Uvážíme-li, že

$$\frac{1}{J(\varphi^{-1})(\varphi(t))} = J\varphi(t),$$

položíme-li $f(t) = u(\varphi(t))$ v (10.6) a $v(x) = u(x)/|J(\varphi^{-1})(x)|$ v (10.7), dostaneme

$$\int_{\varphi(G)} u(x) dx = \int_G u(\varphi(t)) |J\varphi(t)| dt,$$

což jsme měli dokázat. □

11. PROSTORY L^p

11.1. L^p -normy. Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Definujeme $\Lambda(X)$ jako množinu všech \mathcal{S} -měřitelných funkcí u s definičním oborem $D_u \in \mathcal{S}$, skoro všude definovaných (tj. $\mu(X \setminus D_u) = 0$) a skoro všude konečných.

Jsou-li $u, v \in \Lambda(X)$, pak součet $u(x) + v(x)$ má smysl skoro všude na X , tedy $u + v \in \Lambda(X)$.

Na $\Lambda(X)$ zavedeme ekvivalenci

$$u \sim v \quad \text{jestliže } u = v \text{ skoro všude.}$$

Je-li $u \in \Lambda(X)$ a $1 \leq p < \infty$, definujeme

$$\|u\|_p := \left(\int_X |u|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

Dále definujeme

$$\|u\|_\infty := \inf \left\{ C \geq 0 : |u| \leq C \text{ skoro všude} \right\}.$$

11.2. Youngova nerovnost. Jsou-li $a, b \geq 0$, $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$, pak

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Důkaz. Pro $a = 0$ nebo $b = 0$ je důkaz triviální. Jinak z konkavity logaritmu dostáváme, že

$$\ln\left(\frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}\right) \geq \frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) = \ln(ab).$$

□

11.3. Hölderova nerovnost. Jsou-li $u, v \in \Lambda(X)$, $p, q \in (1, \infty)$, $pq = p + q$, pak

$$\|uv\|_1 \leq \|u\|_p \|v\|_q.$$

Rovnost nastává, právě když existují $a, b \in [0, \infty)$ (aspoň jedno z nich nenulové) tak, že $a|u|^p = b|v|^q$ skoro všude.

Důkaz. Označme

$$s = \|u\|_p, \quad t = \|v\|_q.$$

Můžeme předpokládat, že funkce u, v jsou nezáporné a že $0 < s < \infty, 0 < t < \infty$. Potom pro skoro každé $x \in X$ máme z Youngovy nerovnosti

$$\frac{u(x)}{s} \frac{v(x)}{t} \leq \frac{u(x)^p}{ps^p} + \frac{v(x)^q}{qt^q}.$$

Zintegrováním podle x dostaneme

$$\frac{1}{st} \int_X uv \, d\mu \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Tvrzení o rovnosti dostaneme analýzou důkazu. □

11.4. Minkowského nerovnost. *Jsou-li $u, v \in \Lambda(X)$, $p \in (1, \infty)$, pak*

$$\|u + v\|_p \leq \|u\|_p + \|v\|_p.$$

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $0 < \|u\|_p < \infty, 0 < \|v\|_p < \infty$. Pro skoro každé $x \in X$ máme

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)^{1/p}, \\ |v(x)| &\leq \left(|u(x)|^p + |v(x)|^p\right)^{1/p}, \end{aligned}$$

tedy po sečtení a umocnění na p

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^p(|u(x)|^p + |v(x)|^p),$$

takže $\|u + v\|_p < \infty$. S pomocí Hölderovy nerovnosti, kde definujeme $q = \frac{p}{p-1}$, dostaneme

$$\begin{aligned} \int_X |u + v|^p \, d\mu &\leq \int_X |u + v|^{p-1} |u| \, d\mu + \int_X |u + v|^{p-1} |v| \, d\mu \\ (11.1) \quad &\leq \left(\int_X |u + v|^p \, d\mu\right)^{1/q} \left(\int_X |u|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &\quad + \left(\int_X |u + v|^p \, d\mu\right)^{1/q} \left(\int_X |v|^p \, d\mu\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Jelikož

$$0 < \left(\int_X |u + v|^p \, d\mu\right)^{1/q} < \infty,$$

můžeme tímto výrazem vydělit obě strany nerovnosti (11.1) a dostaneme požadovaný výsledek. □

11.5. Zavedení Lebesgueových prostorů. Nechť $1 \leq p \leq \infty$. Prostor $L^p(X, \mathcal{S}, \mu)$, krátce $L^p(X)$ nebo $L^p(\mu)$, definujeme jako množinu všech $u \in \Lambda(X)$, pro něž

$$\|u\|_p < \infty.$$

Na prostoru $L^p(X)$ budeme uvažovat dvě rovnosti. Jedna bude “obyčejná” rovnost funkcí, druhá rovnost skoro všude, neboli ekvivalence \sim . V druhém případě prvky prostoru formálně vzato nejsou funkce, ale třídy sobě ekvivalentních funkcí. Lineární operace a norma nezávisí na volbě reprezentanta třídy ekvivalence.

Prostor $L^p(X)$ vybavený rovností \sim , lineární strukturou a normou je normovaný lineární prostor. Vskutku: jedině, co není zřejmé nebo aspoň velmi snadné, je trojúhelníková nerovnost pro $1 < p < \infty$, ale to je Minkowského nerovnost. Zdůrazněme, že mezi požadované vlastnosti v definici normy patří

$$\|u\| = 0 \implies u \text{ je nulový prvek prostoru,}$$

což je umožněno tím, že namísto rovnosti $=$ uvažujeme rovnost \sim .

11.6. Úplnost prostorů L^p . *Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost prvků $L^p(X)$, cauchyovská v normě $\|\dots\|_p$. Pak existuje $f \in L^p(X)$ tak, že $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$. Dále existuje posloupnost $\{g_j\}$ vybraná z $\{f_j\}$ tak, že $g_j \rightarrow f$ μ -skoro všude.*

Důkaz. Důkaz provedeme pro $p < \infty$; případ $p = \infty$ je odlišný a snadnější. Jelikož $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, lze z ní vybrat posloupnost g_j tak, že pro všechna $j = 1, 2, \dots$ platí

$$(11.2) \quad \|g_{j+1} - g_j\| < 2^{-j}.$$

Položme

$$h_k = |g_1| + |g_2 - g_1| + \dots + |g_k - g_{k-1}|,$$

$$h = \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$$

Z trojúhelníkové nerovnosti pro L^p -normu a (11.2) dostaneme

$$\|h_k\|_p \leq \|g_1\|_p + \sum_{j=1}^{k-1} \|g_{j+1} - g_j\|_p \leq \|g_1\|_p + 1.$$

Podle Leviho věty 3.9 a předchozího odhadu je

$$\int_X h^p d\mu = \lim_k \int_X h_k^p d\mu = \lim_k \|h_k\|_p^p \leq (\|g_1\|_p + 1)^p$$

Funkce h^p je tedy integrovatelná a tím spíš skoro všude konečná (viz. 3.5 (c)). Uvažujme bod x , v němž $h(x) < \infty$. Potom řada

$$g_1 + \sum_{j=1}^{\infty} (g_{j+1}(x) - g_j(x))$$

konverguje, neboť konverguje řada absolutních hodnot. Tím jsme dokázali existenci limity

$$f(x) := \lim_{j \rightarrow \infty} g_j(x)$$

v každém takovém bodě x . Lebesgueova věta 5.2 s majorantou h^p dává

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |f - g_j|^p d\mu = \int_X \lim_{j \rightarrow \infty} |f - g_j|^p d\mu = 0.$$

Znovu použijeme, že $\{f_j\}$ je cauchyovská posloupnost, a dostáváme

$$\|f - f_j\|_p \leq \|f - g_j\|_p + \|g_j - f_j\|_p \rightarrow 0.$$

Tvrzení o konvergenci skoro všude jsme dokázali v průběhu. □

11.7. Hustota jednoduchých funkcí. *Jednoduché L^p -funkce jsou husté v $L^p(X)$, $1 \leq p < \infty$.*

Důkaz. Nechť $f \in L^p(X)$. Chceme najít posloupnost $\{f_j\}$ jednoduchých funkcí tak, aby $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$. Můžeme předpokládat, že $f \geq 0$. Podle věty 2.10 existují jednoduché funkce $f_j \geq 0$ tak, že $f_j \nearrow f$. Z Lebesgueovy věty 5.2 (majoranta $|f|^p$) dostaneme

$$\int_X |f_j - f|^p dx \rightarrow 0.$$

□

12. VĚTY O KONVERGENCI

Buď (X, \mathcal{S}, μ) prostor s mírou.

12.1. Čebyševova nerovnost. *Nechť $f \geq 0$ je měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$ a $a > 0$. Potom*

$$\mu(D \cap \{f \geq a\}) \leq \frac{\int_D f d\mu}{a}.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\mu(D \cap \{f \geq a\}) \leq \int_{D \cap \{f \geq a\}} \frac{f}{a} d\mu \leq \frac{\int_D f d\mu}{a}.$$

□

12.2. Konvergence v míře. Nechť $f, f_j, j = 1, 2, \dots$, jsou měřitelné funkce na $D \in \mathcal{S}$. Řekneme, že $f_j \rightarrow f$ v míře, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\{|f_j - f| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

12.3. ε - δ spojitost integrálu. Nechť f je integrovatelná funkce na X . Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $E \in \mathcal{S}$ platí

$$\mu(E) < \delta \implies \int_E |f| d\mu < \varepsilon.$$

Důkaz. Nechť

$$E_j = \{|f| \geq j\}.$$

Podle Lebesgueovy věty 3.9 (majoranta $|f|$) je

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{E_j} |f| d\mu = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_X |f| \chi_{E_j} d\mu = 0,$$

takže existuje $k \in \mathbf{N}$ tak, že

$$\int_{E_k} |f| d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nechť $E \in \mathcal{S}$, $\mu(E) < \delta := \frac{\varepsilon}{2k}$. Potom

$$\begin{aligned} \int_E |f| d\mu &= \int_{E \cap E_k} |f| d\mu + \int_{E \setminus E_k} |f| d\mu \\ &\leq \int_{E_k} |f| d\mu + k \mu(E) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

□

12.4. **Jegorovova věta.** Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou, která je konečná. Nechť $\{f_j\}$ je posloupnost \mathcal{S} -měřitelných funkcí na X . Předpokládejme, že $f_j \rightarrow f$ skoro všude. Potom pro každé $\varepsilon > 0$ existuje množina $G \in \mathcal{S}$ tak, že $\mu(G) < \varepsilon$ a $f_j \rightarrow f$ stejnoměrně na $X \setminus G$.

Důkaz. Můžeme předpokládat, že $f = 0$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Označme

$$E_k^j = \bigcup_{i \geq j} \{|f_i| \geq 1/k\}.$$

Potom

$$\lim_j \mu(E_k^j) = \mu\left(\bigcap_j E_k^j\right) = 0$$

(zde jsme využili, že $\mu(X) < \infty$, viz. 1.14(c)), a proto existuje $G_k \in \{E_k^j : j \in \mathbf{N}\}$ tak, že

$$\mu(G_k) < 2^{-k} \varepsilon.$$

Položme

$$G = \bigcup_k G_k.$$

Potom $\mu(G) < \varepsilon$. Je-li dáno přirozené k , potom existuje přirozené j tak, že $G_k = E_k^j$. Je-li $i \geq j$ a $x \notin G$, potom $|f_i(x)| < 1/k$. Tedy $f_j \rightarrow 0$ stejnoměrně na $X \setminus G$. □

12.5. **Cantelliho věta.** Nechť $\{E_j\}$ je posloupnost měřitelných podmnožin X . Jestliže

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) < \infty,$$

potom

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) = 0.$$

Důkaz. Máme

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) &\leq \inf_{k \in \mathbf{N}} \mu\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} E_j\right) \\ &\leq \inf_{k \in \mathbf{N}} \sum_{j=k}^{\infty} \mu(E_j) = 0. \end{aligned}$$

□

12.6. Vztah konvergence v míře, konvergence skoro všude a konvergence v L^p . Necht f, f_j jsou měřitelné funkce na X . Připomeňme, že konvergence $f_j \rightarrow f$ v L^p znamená podle definice $\|f_j - f\|_p \rightarrow 0$.

(a) Necht $f_j \rightarrow f$ v $L^p(X)$. Potom $f_j \rightarrow f$ v míře.

To je snadný důsledek Čebyševovy nerovnosti 12.1.

(b) Necht $f_j \rightarrow f$ v míře. Necht existuje "integrovatelná majoranta" $g \in L^p(X)$, $p < \infty$, tak, že $|f_j| \leq g$ skoro všude, $j = 1, 2, \dots$. Potom $f_j \rightarrow f$ v $L^p(X)$.

Bez újmy na obecnosti $f = 0$. Pro každé $\varepsilon > 0$ máme

$$\begin{aligned} \int_X |f_j|^p d\mu &\leq \int_{\{|f_j| \leq \varepsilon g\}} |f_j|^p d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} |f_j|^p d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} |f_j|^p d\mu \\ &\leq \varepsilon \int_X g^p d\mu + \int_{\{g < \varepsilon\}} g^p d\mu + \int_{\{|f_j| \geq \varepsilon^2\}} g^p d\mu. \end{aligned}$$

První integrál jde k nule pro $\varepsilon \rightarrow 0$. Druhý také, to plyne z Lebesgueovy věty 3.9 s majorantou g^p . Třetí integrál jde k nule pro $j \rightarrow \infty$ z věty 12.3 a definice konvergence v míře.

(c) Necht $\mu(X) < \infty$. Jestliže $f_j \rightarrow f$ skoro všude, pak $f_j \rightarrow f$ v míře.

To je snadný důsledek Jegerovovy věty 12.4.

(d) Jestliže $f_j \rightarrow f$ v míře, pak existuje vybraná posloupnost, která konverguje skoro všude.

Bez újmy na obecnosti $f = 0$. Položme $f_j^{(0)} = f_j$ a pro $m = 1, 2, \dots$ najdeme $\{f_j^{(m)}\}_j$ vybranou z $\{f_j^{(m-1)}\}_j$ tak, že

$$\sum_j \mu(\{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}) < \infty.$$

Podle Cantelliho věty 12.5 je pak i

$$\mu(E_m) = 0, \text{ kde } E_m = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} \{|f_j^{(m)}| \geq 1/m\}.$$

Zřejmě

$$x \notin E_m \implies \limsup_j |f_j^{(m)}(x)| \leq 1/m.$$

Položme $g_j = f_j^{(j)}$. Potom pro každé m je $\{g_j\}_j$ až na konečně mnoho členů vybraná posloupnost z $\{f_j^{(m)}\}_j$, tedy $g_j \rightarrow 0$ skoro všude.

13. ZNAMÉNKOVÉ MÍRY

13.1. Znaménková míra. Necht (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor. Množinová funkce $\nu : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{R}$ se nazývá *znaménková míra* na \mathcal{S} , jestliže splňuje

(ZM-1) $\nu(\emptyset) = 0$,

(ZM-2) jestliže $A_j \in \mathcal{S}$, $j = 1, 2, \dots$, jsou po dvou disjunktní, $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j$, potom

$$\nu(A) = \sum_{j=1}^{\infty} \nu(A_j).$$

Někdy se pro znaménkovou míru používá termín *náboj*. Oproti míře, znaménková míra může nabývat i záporných hodnot, ale nesmí nabývat hodnot $+\infty$, $-\infty$.

Snadno nahlédneme, že systém všech znaménkových měř tvoří vektorový prostor.

Omezení na konečné hodnoty vylučuje Lebesgueovu míru nebo některé množinové funkce, které lze získat jako rozdíly nezáporných měr. Lze uvažovat zobecnění znaménkových měr, které zahrne i tyto případy, ale zde se tím nebudeme zabývat.

13.2. Variace znaménkové míry. Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor a ν je znaménková míra na \mathcal{S} . Pro $E \in \mathcal{S}$ definujeme

$$|\nu|(E) = \sup \left\{ \sum_j |\nu(E_j)| : E_j \in \mathcal{S} \text{ jsou po dvou disjunktní, } \bigcup_j E_j \subset E \right\}.$$

Množinová funkce $|\nu|$ se nazývá *variace* znaménkové míry ν . V definici variace není podstatné, zda uvažujeme konečné či nekonečné součty. Také můžeme uvažovat jen takové součty, že sjednocení množin E_j je celé E .

13.3. Variace míry je míra. Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor a ν je znaménková míra na \mathcal{S} . Potom $|\nu|$ je míra na \mathcal{S} .

Důkaz. Uvažujme posloupnost $\{E_j\}$ po dvou disjunktních měřitelných množin a jejich sjednocení E . Jsou-li

$$\sum_i |\nu(E_j^i)|$$

dolní součty k $|\nu|(E_j)$, $j = 1, 2, \dots$, pak

$$\sum_{i,j} |\nu(E_j^i)|$$

je dolní součet k $|\nu|(E)$. Odtud

$$(13.1) \quad |\nu|(E) \geq \sum_{j=1}^{\infty} |\nu|(E_j).$$

Naopak, buď

$$\sum_k |\nu(A_k)|$$

dolní součet k $|\nu|(E)$. Potom z (ZM-2) dostaneme

$$|\nu(A_k)| = \left| \sum_j \nu(A_k \cap E_j) \right| \leq \sum_j |\nu|(A_k \cap E_j), \quad k = 1, 2, \dots$$

a z (13.1) plyne

$$\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \leq |\nu|(E_j), \quad j = 1, 2, \dots$$

Tedy

$$\begin{aligned} \sum_k |\nu(A_k)| &\leq \sum_k \left(\sum_j |\nu|(A_k \cap E_j) \right) = \sum_j \left(\sum_k |\nu|(A_k \cap E_j) \right) \\ &\leq \sum_j |\nu|(E_j). \end{aligned}$$

Přechodem k supremu přes všechny dolní součty k $|\nu|(E)$ dostáváme

$$(13.2) \quad |\nu|(E) \leq \sum_j |\nu|(E_j).$$

Z (13.1) a (13.2) plyne, že $|\nu|$ je míra. □

13.4. Věta o variaci. Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor a ν je znaménková míra na \mathcal{S} . Potom $|\nu|(X) < \infty$.

Důkaz. V prvním kroku uvažujeme $Y \in \mathcal{S}$ tak, že $|\nu|(Y) = \infty$ (je-li tvrzení věty pravdivé, taková by vůbec neměla existovat) a najdeme množinu $A \in \mathcal{S}$, $A \subset Y$ tak, že

$$|\nu|(A) \geq 1, \quad |\nu|(Y \setminus A) \geq 1.$$

Podle definice variace existuje posloupnost $\{A_j\}$ po dvou disjunktních množin z \mathcal{S} , $A_j \subset Y$, tak, že

$$(13.3) \quad \sum_j |\nu(A_j)| > |\nu|(Y) + 3.$$

Nyní rozlišíme dva případy. Jestliže existuje i tak, že $|\nu(A_i)| \geq 1$, potom položíme

$$A = A_i.$$

Máme

$$\nu(A_i) = \nu(Y) - \nu(Y \setminus A_i),$$

tedy

$$(13.4) \quad |\nu(A_i)| \leq |\nu(Y)| + |\nu(Y \setminus A_i)| \leq |\nu(Y)| + \sum_{j \neq i} |\nu(A_j)|.$$

Sečtením (13.3) a (13.4) dostaneme

$$|\nu(A_i)| + |\nu(Y)| + 3 \leq |\nu(Y)| + |\nu(A_i)| + 2 \sum_{j \neq i} |\nu(A_j)|.$$

Tedy

$$|\nu(Y \setminus A)| \geq \sum_{j \neq i} |\nu(A_j)| \geq 3/2 > 1.$$

Druhý případ je, že pro $|\nu(A_i)| < 1$ pro všechna i . Najdeme nejmenší k tak, že

$$\sum_{j \leq k} |\nu(A_j)| \geq 1,$$

a položíme

$$A := \bigcup_{j=1}^k A_j.$$

Potom

$$|\nu(A)| \geq \sum_{j \leq k} |\nu(A_j)| \geq 1.$$

Z minimality k dostaneme

$$\sum_{j \leq k} |\nu(A_j)| \leq \sum_{j < k} |\nu(A_j)| + |\nu(A_k)| \leq 1 + 1 = 2,$$

tedy (13.3) dává

$$\sum_{j > k} |\nu(A_j)| \geq |\nu(Y)| + 3 - 2 \geq 1.$$

Odtud dostaneme

$$|\nu(Y \setminus A)| \geq \sum_{j > k} |\nu(A_j)| \geq 1.$$

Nyní předpokládejme, že $|\nu(X)| = \infty$ a položme $Y_1 = X$. Podle předchozího kroku existuje $A \in \mathcal{S}$, $A \subset Y_1$ tak, že

$$|\nu(A)| \geq 1, \quad |\nu(Y_1 \setminus A)| \geq 1.$$

Jelikož

$$|\nu(A)| + |\nu(Y_1 \setminus A)| = |\nu(Y_1)| = \infty,$$

aspoň jedna z množin A , $Y_1 \setminus A$ má nekonečnou variaci a tu vybereme jako Y_2 . Tímto způsobem indukcí zkonstruujeme posloupnost $\{Y_j\}$ množin z \mathcal{S} tak, že

$$X = Y_1 \supset Y_2 \supset Y_3 \supset \dots$$

a

$$|\nu(Y_j \setminus Y_{j+1})| \geq 1, \quad j = 1, 2, \dots$$

Ke každé z množin $Y_k \setminus Y_{k+1}$ najdeme dolní součet

$$\sum_i |\nu(E_k^i)| \geq 1/2, \quad E_k^i \in \mathcal{S}, \quad E_k^i \subset Y_k \setminus Y_{k+1} \text{ po dvou disjunktí.}$$

Buď ještě

$$E = \bigcup_{k,i} E_k^i.$$

Potom podle (ZM-2)

$$(13.5) \quad \nu(E) = \sum_{k,i} \nu(E_k^i).$$

Řada na pravé straně nemůže konvergovat absolutně, proto ji lze přerovnat tak, aby rovnost (13.5) neplatila a tím dostáváme spor. \square

13.5. Jordanův rozklad znaménkové míry na kladnou a zápornou část. Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor a ν je znaménková míra. Potom existuje (právě jedna) dvojice (ν^+, ν^-) (nezáporných) měr na (X, \mathcal{S}) tak, že

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu^+(E) - \nu^-(E), & E \in \mathcal{S}, \\ |\nu|(E) &= \nu^+(E) + \nu^-(E), & E \in \mathcal{S}. \end{aligned}$$

Míra ν^+ se nazývá *kladná část* ν , míra ν^- se nazývá *záporná část* ν a rozklad $\nu = \nu^+ - \nu^-$ se nazývá *Jordanův rozklad*. Míry ν^+ a ν^- dostaneme ze vzorců

$$\nu^+(E) = \frac{|\nu|(E) + \nu(E)}{2}, \quad \nu^-(E) = \frac{|\nu|(E) - \nu(E)}{2}, \quad E \in \mathcal{S}.$$

13.6. Integrovaní podle znaménkové míry. Nechť ν je znaménková míra na (X, \mathcal{S}) . a f je \mathcal{S} -měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Definujeme

$$\int_D f d\nu = \int_D f d\nu^+ - \int_D f d\nu^-$$

pokud rozdíl vpravo má smysl.

14. DERIVOVÁNÍ A ROZKLAD MĚR

14.1. Absolutní spojitost a singulárnost. Nechť (X, \mathcal{S}) je měřitelný prostor. Nechť μ a ν jsou míry na \mathcal{S} . Řekneme, že ν je *absolutně spojitá vzhledem k μ* , značení $\nu \ll \mu$, jestliže pro každou $E \in \mathcal{S}$ platí

$$(14.1) \quad \mu(E) = 0 \implies \nu(E) = 0.$$

Řekneme, že ν a μ jsou navzájem *singulární*, značení $\mu \perp \nu$, jestliže existují $X_\mu, X_\nu \in \mathcal{S}$ tak, že

$$(14.2) \quad X = X_\mu \cup X_\nu, \quad \mu(X_\nu) = \nu(X_\mu) = 0.$$

Budeme uvažovat i případ, že ν je znaménková míra. Potom definice absolutní spojitosti zůstává beze změny a v definici singularity požadujeme $|\nu|(X_\mu) = 0$. Zřejmě $\nu \ll \mu \iff |\nu| \ll \mu$.

14.2. Míra s hustotou. Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou a f je μ -integrovatelná funkce na X . Pro $E \in \mathcal{S}$ buď

$$\nu(E) = \int_E f d\mu.$$

Potom ν je znaménková míra, která se nazývá *míra s hustotou f* . Naopak f se v této situaci nazývá *hustota* nebo *Radon-Nikodýmova derivace* míry ν (vzhledem k μ) a značí $\frac{d\nu}{d\mu}$.

14.3. Lebesgue–Radon–Nikodýmova věta. Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor se σ -konečnou mírou a ν je znaménková míra na \mathcal{S} . Potom

- (a) (Lebesgueova věta) *existuje právě jedna znaménková míra ν_a na \mathcal{S} tak, že $\nu_a \ll \mu$ a $(\nu - \nu_a) \perp \mu$,*
- (b) (Radon–Nikodýmova věta) *existuje právě jedna (až na modifikace na množinách μ -míry nula) μ -integrovatelná funkce f tak, že*

$$\nu_a(E) = \int_E f d\mu$$

pro každou $E \in \mathcal{S}$, neboli $f = \frac{d\nu_a}{d\mu}$.

Důkaz. Tvzení o jednoznačnosti je velmi snadné. Např. v části (a) si uvědomíme, že pokud by existovaly různé míry ν_1 a ν_2 s vlastnostmi, které vyžadujeme od ν_a , pak $\nu_1 - \nu_2$ by byla absolutně spojitá vzhledem k μ . Současně

$$\nu_1 - \nu_2 = (\nu - \nu_2) - (\nu - \nu_1),$$

takže míry $\nu_1 - \nu_2$ a μ by byly navzájem singulární. Uvažujme rozklad $X = X_a \cup X_s$, kde

$$|\nu_1 - \nu_2|(X_a) = \mu(X_s) = 0.$$

Potom z absolutní spojitosti bychom dostali, že též $|\nu_1 - \nu_2|(X_s) = 0$, takže $|\nu_1 - \nu_2| = 0$, spor.

Důkaz existence rozdělíme do několika kroků

1. KROK: Nejprve předpokládejme, že ν a μ jsou konečné (nezáporné) míry na \mathcal{S} . Označme $\sigma = \mu + \nu$. Uvažujme funkcionál

$$\Psi(u) = \frac{1}{2} \int_X u^2 d\sigma - \int_X u d\nu.$$

Označme

$$s = \inf\{\Psi(u) : u \in L^2(\sigma)\}.$$

Jelikož z Youngovy nerovnosti plyne

$$(14.3) \quad \int_X u d\nu \leq \int_X |u| d\sigma \leq \int_X \left(\frac{1}{2} + \frac{u^2}{2}\right) d\sigma,$$

je $s \geq -\frac{1}{2}\sigma(X)$, tedy je to konečné číslo.

Najdeme $v_j \in L^2(\sigma)$ tak, že

$$s_j := \Psi(v_j) \searrow s.$$

Do elementární rovnosti

$$\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

dosadíme $a = v_j(x)$, $b = v_k(x)$ a vyintegrujeme podle σ . Dostaneme

$$(14.4) \quad \int_X \left(\frac{v_j - v_k}{2}\right)^2 d\sigma + \int_X \left(\frac{v_j + v_k}{2}\right)^2 d\sigma = \int_X \frac{v_k^2}{2} d\sigma + \int_X \frac{v_j^2}{2} d\sigma.$$

Jelikož

$$\frac{1}{2} \int_X \left(\frac{v_j + v_k}{2}\right)^2 d\sigma \geq \int_X \frac{v_j + v_k}{2} d\nu + s$$

a

$$\int_X \frac{v_i^2}{2} d\sigma = \int_X v_i d\nu + s_i, \quad i = k, j,$$

dostáváme z (14.4)

$$\int_X \left(\frac{v_j - v_k}{2}\right)^2 d\sigma + \int_X (v_j + v_k) d\nu + 2s \leq \int_X v_j d\nu + s_j + \int_X v_k d\nu + s_k,$$

a odtud

$$\int_X \left(\frac{v_j - v_k}{2}\right)^2 d\sigma \leq s_j + s_k - 2s \rightarrow 0.$$

Tedy posloupnost $\{v_j\}$ je Cauchyovská v $L^2(\sigma)$. Podle věty 11.6 existuje vybraná posloupnost (označme ji stejně) tak, že

$$v_j \rightarrow v \quad \sigma\text{-s.v.} \quad \text{a} \quad \int_X |v_j - v|^2 d\sigma \rightarrow 0.$$

Z Fatouova lemmatu dostáváme

$$(14.5) \quad \int_X v^2 d\sigma \leq \liminf_j \int_X v_j^2 d\sigma$$

Dále, z Hölderovy nerovnosti

$$(14.6) \quad \int_X |v_j - v| d\nu \leq \int_X |v_j - v| d\sigma \leq \left(\int_X (v_j - v)^2 d\sigma\right)^{1/2} \left(\int_X 1 d\sigma\right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Z (14.5) a (14.6) plyne

$$\Psi(v) \leq \liminf \Psi(v_j) = \lim s_j = s.$$

Tedy pro všechna $w \in L^2(\sigma)$ dostaneme

$$\Psi(v) \leq \Psi(w).$$

Dosadíme-li $w = v + tu$, kde $t \in \mathbf{R}$, $t \neq 0$, máme

$$\frac{1}{2} \int_X v^2 d\sigma - \int_X v d\nu \leq \frac{1}{2} \int_X (v + tu)^2 d\sigma - \int_X (v + tu) d\nu$$

neboli

$$t \int_X u d\nu \leq t \int_X vu d\sigma + \frac{t^2}{2} \int_X u^2 d\sigma.$$

Po vykrácení t a limitním přechodu $t \rightarrow 0$ z obou stran (záporná t dávají obrácenou nerovnost) dostaneme

$$(14.7) \quad \int_X u d\nu = \int_X \nu u d\sigma = \int_X \nu u d\mu + \int_X \nu u d\nu$$

pro každou $u \in L^2(\sigma)$. Položme

$$X_a = \{v < 1\}, \quad X_s = \{v \geq 1\}, \quad X_0 = \{v < 0\}.$$

Potom volba $u = \chi_{X_s}$ dává

$$\nu(X_s) = \int_{X_s} v d\sigma \geq \sigma(X_s) = \mu(X_s) + \nu(X_s) \geq \nu(X_s).$$

Odtud vidíme, že $v = 1$ skoro všude na X_s a $\mu(X_s) = 0$. Testujeme-li (14.7) funkcí $u = \chi_{X_0}$, dostaneme $\sigma(X_0) = 0$. Definujme míry ν_a a ν_s předpisem

$$\nu_a(E) = \nu(E \cap X_a), \quad \nu_s(E) = \nu(E \cap X_s), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Potom z toho, co jsme doposud dokázali, plyne, že μ a ν_s jsou navzájem singulární. Vzorec (14.7) můžeme přepsat v podobě

$$(14.8) \quad \int_E g v d\mu = \int_E g(1-v) d\nu,$$

kde g je nezáporná \mathcal{S} -měřitelná funkce, $E \in \mathcal{S}$ a za u jsme dosadili $g\chi_E$. Vzorec (14.8) určitě platí pro každou nezápornou \mathcal{S} -měřitelnou funkci g : i kdyby nebyla integrovatelná, můžeme ji zdola aproximovat jednoduchými funkcemi, které integrovatelné jsou, a pak použít Leviho větu 3.9. Nechť $E \in \mathcal{S}$. Položme

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-v(x)}, & x \in E \cap X_a, \\ 0, & x \notin E \cap X_a, \end{cases} \quad f = vg.$$

Potom (14.8) dává

$$\int_E f d\mu = \nu(E \cap X_a) = \nu_a(E).$$

Odtud plyne tvrzení (b) věty i absolutní spojitost ν_a vzhledem k μ .

2. KROK. Předpokládejme nyní, že ν je znaménková míra. Potom aplikujeme předchozí část na kladnou a zápornou část míry ν (Jordanův rozklad, viz. 13.5) a využijeme toho, že

$$\nu = \nu^+ - \nu^-.$$

3. KROK. Je-li míra μ σ -konečná, rozdělíme X na spočetně mnoho \mathcal{S} -měřitelných částí, na nichž je μ konečná, použijeme předchozí kroky a nalezené objekty “poslepujeme”. Podrobnosti jsou nezájímavé. \square

14.4. Absolutně spojitá a singulární část. Míře ν_a z věty 14.3 se říká *absolutně spojitá část* míry ν a míře $\nu_s := \nu - \nu_a$ se říká *singulární část* míry ν . Rozkladu $\nu = \nu_a + \nu_s$ se říká *Lebesgueův rozklad* míry ν .

14.5. Integrovaní podle míry s hustotou. Nechť (X, \mathcal{S}, μ) je prostor se σ -konečnou mírou, ν je znaménková míra na (X, \mathcal{S}) , $\nu \ll \mu$, a g je \mathcal{S} -měřitelná funkce na $D \in \mathcal{S}$. Potom

$$\int_D g d\nu = \int_D g \frac{d\nu}{d\mu} d\mu,$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Podle definice tvrzení platí, když g je charakteristická funkce měřitelné množiny. Zbytek je rutinní záležitost (jednoduché funkce, limitní přechod). \square

14.6. Hahnův rozklad znaménkové míry. Nechť ν je znaménková míra na (X, \mathcal{S}) . Dvojici (P, N) množin z \mathcal{S} nazveme *Hahnův rozklad* míry ν , jestliže $P \cup N = X$, $P \cap N = \emptyset$ a pro každou $E \in \mathcal{S}$ je

$$\nu(E \cap P) \geq 0, \quad \nu(E \cap N) \leq 0.$$

Potom také pro každou $E \in \mathcal{S}$ zřejmě platí

$$\nu^+(E) = \nu(E \cap P), \quad \nu^-(E) = -\nu(E \cap N).$$

Existence Hahnova rozkladu plyne snadno z Radon-Nikodýmovy věty: je-li $f = \frac{d\nu}{d|\nu|}$, pak $(\{f > 0\}, \{f \leq 0\})$ je Hahnův rozklad. Jiná možnost je třeba $(\{f \geq 0\}, \{f < 0\})$. Jednoznačnost je splněna v té podobě, že jsou-li (P_i, N_i) Hahnovy rozklady, $i = 1, 2$, pak $|\nu|(P_1 \setminus P_2) = |\nu|(N_1 \setminus N_2) = 0$.

14.7. Spojité a diskrétní míry. Necht (X, \mathcal{S}, μ) je prostor s mírou. Předpokládejme, že \mathcal{S} obsahuje všechny jednobodové množiny. Řekneme, že míra μ na \mathcal{S} je

- *spojitá*, jestliže $\mu(\{x\}) = 0$ pro všechna $x \in X$,
- *diskrétní*, jestliže existuje spočetná množina $S \subset X$ tak, že $\mu(X \setminus S) = 0$.

14.8. Charakterizace diskrétních měř. Míra μ je diskrétní, právě když existuje spočetná množina $S \subset X$ tak, že

$$\mu(E) = \sum_{x \in E \cap S} \mu(\{x\}), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

14.9. Rozklad míry na spojitou a diskrétní část. Necht (X, \mathcal{S}, μ) je prostor se σ -konečnou mírou. Předpokládejme, že \mathcal{S} obsahuje všechny jednobodové množiny. Potom existuje rozklad

$$\mu = \mu_c + \mu_d,$$

kde μ_c je spojitá a μ_d je diskrétní.

Důkaz. Položme

$$S = \{x : \mu(\{x\}) > 0\}.$$

Jelikož μ je σ -konečná a jednobodové množiny jsou měřitelné, množina S je spočetná a měřitelná. Definujme míry μ_c a μ_d předpisem

$$\mu_c(E) = \mu(E \setminus S), \quad \mu_d(E) = \mu(E \cap S), \quad E \in \mathcal{S}.$$

Zřejmě μ_c je spojitá a μ_d je diskrétní. □

15. VĚTY O APROXIMACI

15.1. Nosič funkce. Necht X je metrický prostor. Označme $\mathcal{C}(X)$ lineární prostor všech spojitých funkcí na X . Je-li $f \in \mathcal{C}(X)$, označme

$$\text{spt } f = \overline{\{f \neq 0\}}.$$

Množina $\text{spt } f$ se nazývá *nosič* funkce f . Je-li $K \subset X$ kompaktní, definujme

$$\mathcal{C}_K(X) = \{f \in \mathcal{C}(X) : \text{spt } f \subset K\}$$

Konečně definujme

$$\mathcal{C}_c(X) = \bigcup \{\mathcal{C}_K(X) : K \subset X, K \text{ kompaktní}\}.$$

V dalším budeme zacházet s Lebesgueovou mírou v \mathbf{R}^n . Je-li $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ měřitelná množina, chápeme prostor $L^p(\Omega)$ jako prostor $L^p(\Omega, \mathfrak{M}|_\Omega, \lambda|_\Omega)$, kde $\mathfrak{M}|_\Omega$ je σ -algebra všech Lebesgueovsky měřitelných podmnožin Ω a $\lambda|_\Omega$ je Lebesgueova míra uvažovaná jen na množinách z $\mathfrak{M}|_\Omega$.

15.2. Věta o hustotě spojitých funkcí v L^p . Necht $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina. Necht $1 \leq p < \infty$. Potom $\mathcal{C}_c(\Omega)$ je hustá v $L^p(\Omega)$.

Důkaz. Necht nejprve $G \subset \Omega$ je otevřená množina konečné míry. Potom existuje rostoucí posloupnost G_j omezených otevřených podmnožin Ω tak, že $\overline{G_j} \subset \Omega$ a $G = \bigcup_j G_j$. Položme

$$f_j(x) = \min\{1, j \text{ dist}(x, \partial G_j)\}.$$

Potom $0 \leq f_j \leq 1$, $\text{spt } f_j \subset \overline{G_j} \subset \Omega$ a $f_j \nearrow \chi_G$. Podle Lebesgueovy věty 5.2 je

$$\|f_j - \chi_G\|_p \rightarrow 0.$$

Je-li $E \subset \Omega$ měřitelná množina konečné míry, podle věty 8.4 existuje posloupnost $\{G_j\}$ otevřených množin tak, že $G_j \supset E$ a

$$\lambda(G_j) \rightarrow \lambda(E).$$

Přitom můžeme najít G_j tak, aby platilo $\overline{G_j} \subset \Omega$. Potom zase

$$\|\chi_{G_j} - \chi_E\|_p \rightarrow 0.$$

Ukázali jsme, že v L^p -uzávěru $\mathcal{C}_c(\Omega)$ leží charakteristické funkce měřitelných množin konečné míry. Odtud snadno přejdeme k jednoduchým funkcím a věta 11.7 ukazuje, že L^p -uzávěr $\mathcal{C}_c(\Omega)$ je celé $L^p(\Omega)$. □

15.3. Poznámka. Věta 15.2 neplatí pro $p = \infty$, jako protipříklady mohou sloužit charakteristické funkce omezených intervalů na \mathbf{R} .

15.4. Luzinova věta. Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a f je měřitelná funkce na Ω . Nechť $\varepsilon > 0$. Potom existuje spojitá funkce g na Ω tak, že

$$\mu(\{f \neq g\}) < \varepsilon.$$

Důkaz. Nejprve předpokládejme, že Ω má konečnou míru a f je omezená. Potom $f \in L^1(\Omega)$ a tudíž podle věty 15.2 existuje posloupnost $\{f_j\}$ funkcí z $\mathcal{C}_c(\Omega)$ tak, že

$$\|f_j - f\|_1 \rightarrow 0.$$

Můžeme předpokládat, že

$$\|f_j - f\|_1 < 4^{-j}\varepsilon.$$

Položme

$$g_j = f_{j+1} - f_j,$$

$$\bar{g}_j = \begin{cases} g_j, & \text{na } \{|g_j| \leq 2^{-j}\}, \\ 2^{-j} & \text{na } \{g_j > 2^{-j}\}, \\ -2^{-j} & \text{na } \{g_j < -2^{-j}\}, \end{cases}$$

$$g = f_1 + \sum_{j=1}^{\infty} \bar{g}_j.$$

Potom g je součet stejnoměrně konvergentní řady a tudíž spojitá funkce. Podle Čebyševovy nerovnosti 12.1 je

$$\lambda(\{\bar{g}_j \neq g_j\}) = \lambda(\{|g_j| > 2^{-j}\}) \leq 2^j \varepsilon \|g_j\|_1 \leq 2^{-j}\varepsilon,$$

tedy

$$\lambda(\{f \neq g\}) < \varepsilon.$$

Případ, že f je neomezená, převedeme na předchozí. Nechť

$$E_k = \{|f| > k\}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Potom

$$\lim_k \lambda(E_k) = \lambda\left(\bigcup_k E_k\right) = 0,$$

a tudíž najdeme k tak, že $\lambda(E_k) < \varepsilon/2$. Nyní stačí aproximovat funkci $f\chi_{E_k}$. Případ, kdy množina Ω má nekonečnou míru, se převede na předchozí pomocí tzv. rozkladu jednotky. Podrobnosti zde nebudeme uvádět. \square

16. MĚŘITELNÁ ZOBRAZENÍ A OBRAZ MÍRY

16.1. Měřitelné zobrazení. Nechť (X, \mathcal{S}) , (Y, \mathcal{T}) jsou měřitelné prostory. Řekneme, že f je *měřitelné zobrazení* (X, \mathcal{S}) do (Y, \mathcal{T}) , jestliže pro každou $E \in \mathcal{T}$ je $f^{-1}(E) \in \mathcal{S}$.

Uvědomme si, že měřitelná funkce je měřitelné zobrazení do $(\bar{\mathbf{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbf{R}}))$. Bylo by závažnou chybou se domnívat, že konečná měřitelná funkce je měřitelné zobrazení do $(\mathbf{R}, \mathfrak{M})$.

16.2. Skládání měřitelných zobrazení. Nechť (X, \mathcal{S}) , (Y, \mathcal{T}) , (Z, \mathcal{U}) jsou měřitelné prostory, f je měřitelné zobrazení (X, \mathcal{S}) do (Y, \mathcal{T}) a g je měřitelné zobrazení (Y, \mathcal{T}) do (Z, \mathcal{U}) . Potom $g \circ f$ je měřitelné zobrazení (X, \mathcal{S}) do (Z, \mathcal{U}) .

Důkaz. Důkaz je zřejmý. \square

16.3. Obraz míry. Nechť (X, \mathcal{S}) , (Y, \mathcal{T}) jsou měřitelné prostory, μ je míra na (X, \mathcal{S}) a f je měřitelné zobrazení (X, \mathcal{S}) do (Y, \mathcal{T}) . Potom množinová funkce

$$f(\mu) : E \mapsto \mu(f^{-1}(E)), \quad E \in \mathcal{T}$$

se nazývá *obraz míry* μ .

Obraz míry je zřejmě míra.

16.4. Příklad. Nechť $G \subset \mathbf{R}^n$ je otevřená množina a $f : G \rightarrow \mathbf{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť μ je borelovská míra na G s hustotou $|Jf|$ (Jf je jakobián funkce f). Potom pro každou borelovskou množinu $M \subset f(G)$ je

$$f(\mu)(M) = \lambda(M).$$

16.5. Věta o obrazu míry. Necht (X, \mathcal{S}, μ) , (Y, \mathcal{T}, ν) jsou prostory s mírou, f je měřitelné zobrazení (X, \mathcal{S}) do (Y, \mathcal{T}) a $\nu = f(\mu)$. Potom pro každou \mathcal{T} -měřitelnou funkci u na Y je

$$\int_Y u(y) d\nu(y) = \int_X u(f(x)) d\mu(x)$$

pokud aspoň jedna strana má smysl.

Důkaz. Důkaz je rutinní záležitost (přes charakteristické funkce, jednoduché funkce, ...). □

17. LEBESGUE-STIELTJESOVY MÍRY A DISTRIBUČNÍ FUNKCE

17.1. Neklesající funkce. Necht $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je neklesající funkce. Potom F má v každém bodě $x \in \mathbf{R}$ jednostranné limity

$$F(x+) := \lim_{y \rightarrow x+} F(y), \quad F(x-) := \lim_{y \rightarrow x-} F(y)$$

a v nevlastních bodech jednostranné limity

$$F(-\infty+) := \lim_{y \rightarrow -\infty+} F(y), \quad F(+\infty-) := \lim_{y \rightarrow \infty-} F(y)$$

Množinu bodů nespojitosti (“skoků”) funkce F značíme S_F . Je

$$S_F = \{x \in \mathbf{R} : F(x-) < F(x+)\}.$$

Množina S_F je (nejvýš) spočetná.

17.2. Lebesgue-Stieltjesova míra. Míra μ na $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ se nazývá *Lebesgue-Stieltjesova míra*, jestliže $\mu(I) < \infty$ pro každý omezený interval I .

Řekneme, že Lebesgue-Stieltjesova míra μ je *indukovaná* neklesající funkcí F , (značíme $\mu = \mu_F$), jestliže

$$(17.1) \quad -\infty < a < b < \infty \implies F(b+) - F(a+) = \mu((a, b]).$$

Pokud F je zprava spojitá, můžeme v (17.1) nahradit jednostranné limity funkčními hodnotami.

17.3. Z funkce uděláme míru. Necht $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je neklesající funkce. Potom existuje právě jedna Lebesgue-Stieltjesova míra μ na \mathbf{R} tak, že platí (17.1). Přitom

$$\mu(\mathbf{R}) = F(+\infty-) - F(-\infty+).$$

Důkaz. Necht \mathcal{I}_+ je systém všech intervalů typu $(a, b]$ v \mathbf{R} . Na \mathcal{I}_+ uvažujeme množinovou funkci

$$m : (a, b] \mapsto F(b+) - F(a+)$$

a aplikujeme základní konstrukci 7.6. Zúžení nalezené míry na $\mathcal{B}(\mathbf{R})$ bude hledaná míra μ . Podobně jako u konstrukce Lebesgueovy míry ukážeme, že μ je rozšíření m , které jednoznačně určeno vlastností (17.1). □

17.4. K míře najdeme funkci. Necht μ je Lebesgue-Stieltjesova míra na \mathbf{R} . Potom existuje zprava spojitá neklesající funkce F tak, že platí

$$(17.2) \quad -\infty < a < b < \infty \implies \mu((a, b]) = F(b) - F(a).$$

Jsou-li F_1, F_2 zprava spojitě neklesající funkce splňující (17.2), potom F_1 a F_2 se liší o konstantu.

Důkaz. Zvolíme $F(0)$ a další funkční hodnoty dopočítáme z (17.2), kde volíme $(a, b] = (0, x]$ pro $x > 0$, $(a, b] = (x, 0]$ pro $x < 0$. □

17.5. Neklesající funkce absolutně spojitě, singulární spojitě a funkce skoků. Podle věty 17.3 každá omezená neklesající funkce F indukuje Lebesgue-Stieltjesovu míru μ_F . Řekneme, že F je

- *absolutně spojitá*, je-li $\mu_F \ll \lambda$,
- *singulární*, je-li $\mu_F \perp \lambda$,
- *funkce skoků*, je-li μ_F diskretní.

Omezenost funkce F jsme předpokládali jen z terminologických důvodů. Kdyby F byla neomezená, bylo by v prvním případě přesnější používat termín “lokálně absolutně spojitá”.

17.6. Rozklad omezené neklesající funkce. Mějme omezenou neklesající funkci $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ a indukovanou Lebesgue-Stieltjesovu míru $\mu = \mu_F$. Potom μ lze podle vět 14.3 a 14.9 rozdělit

$$\mu = \mu_a + \mu_{cs} + \mu_d,$$

kde $\mu_a \ll \lambda$, $\mu_{cs} \perp \lambda$, $\mu_d \perp \lambda$, μ_{cs} je spojitá a μ_d je diskrétní. Tomu odpovídají funkce

$$(17.3) \quad \begin{aligned} F_a(x) &:= \mu_a((-\infty, x]), \\ F_{cs}(x) &:= \mu_{cs}((-\infty, x]), \\ F_d(x) &:= \mu_d((-\infty, x]) - F(x+) + F(x). \end{aligned}$$

Funkce F_a je absolutně spojitá, F_{cs} je singulární spojitá, F_d je funkce skoků a

$$F(x) = F(-\infty+) + F_a(x) + F_{cs}(x) + F_d(x).$$

17.7. Náhodná veličina. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je *pravděpodobnostní prostor*, neboli prostor s pravděpodobnostní mírou. \mathcal{A} -měřitelná funkce $X : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ se bude nazývat *náhodná veličina*.

17.8. Distribuční funkce a rozdělení náhodné veličiny. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor a X je náhodná veličina na Ω . Funkce

$$F(x) = P(\{X \leq x\})$$

se nazývá *distribuční funkce* náhodné veličiny X a značí F_X . Míra $X(P)$ na $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}))$ (obraz míry, viz. 16.3) se nazývá *rozdělení* náhodné veličiny X a značí μ_X ; je to pravděpodobnostní Lebesgue-Stieltjesova míra.

17.9. Využití rozdělení náhodné veličiny. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $\mu = \mu_X$. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}$ je

$$P(\{X \in E\}) = \mu(E).$$

Nechť $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_{\Omega} \phi \circ X \, dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \, d\mu(x),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Plyne z věty 16.5. □

17.10. Vlastnosti distribučních funkcí. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $F = F_X$. Potom

- (DF-1) F je neklesající,
- (DF-2) F je zprava spojitá a
- (DF-3) $F(-\infty+) = 0$, $F(+\infty-) = 1$.

Důkaz. Důkaz je zřejmý. □

17.11. Charakterizace distribučních funkcí. Větu 17.10 můžeme obrátit. Jestliže $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ splňuje (DF-1)–(DF-3), pak existuje pravděpodobnostní prostor (Ω, \mathcal{A}, P) a náhodná veličina X na Ω tak, že F je distribuční funkce X .

Důkaz. Uvažujme identickou funkci $X : x \mapsto x$ na pravděpodobnostním prostoru $(\mathbf{R}, \mathcal{B}(\mathbf{R}), \mu_F)$. Podle věty 17.3 míra μ_F existuje, a zřejmě má požadované vlastnosti. □

17.12. Terminologická poznámka. Na základě vět 17.10 a 17.11 můžeme termín “distribuční funkce” používat pro funkci $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ splňující (DF-1)–(DF-3), aniž bychom měli na mysli nějakou konkrétní náhodnou veličinu, které by byla funkce F přiřazena.

17.13. K míře najdeme distribuční funkci. Nechť μ je pravděpodobnostní Lebesgue-Stieltjesova míra na \mathbf{R} . Potom existuje právě jedna distribuční funkce F tak, že platí (17.2). (Srov. 17.4)

Důkaz. Hledaná funkce je

$$F(x) = \mu((-\infty, x]).$$

□

17.14. Skoky a derivace distribuční funkce. Nechť F je distribuční funkce, $\mu = \mu_F$, μ_a je absolutně spojitá část μ_F a

$$f := \frac{d\mu_a}{d\lambda}.$$

Potom pro každý bod $x \in \mathbf{R}$ je

$$F(x) - F(x-) = \mu(\{x\})$$

(to je snadné), a

$$F' = f \text{ skoro všude}$$

(to je těžké)

17.15. Využití distribuční funkce náhodné veličiny. Nechť (Ω, \mathcal{A}, P) je pravděpodobnostní prostor, X je náhodná veličina na Ω a $F = F_X$.

(a) Nechť F je absolutně spojitá. Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}$ je

$$P(\{X \in E\}) = \int_E F'(x) dx.$$

Nechť $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_{\Omega} \phi \circ X dP = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) F'(x) dx,$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

(b) Nechť F je funkce skoků a S_F je množina skoků funkce F . Potom pro každou borelovskou množinu $E \subset \mathbf{R}$ je

$$P(\{X \in E\}) = \sum_{x \in S_F \cap E} (F(x) - F(x-)).$$

Nechť $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ je borelovsky měřitelná funkce. Potom

$$\int_{\Omega} \phi \circ X dP = \sum_{x \in S_F} \phi(x)(F(x) - F(x-)),$$

pokud má aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Důkaz pomocí věty 17.9 je snadný, v případě (a) se však zprostředkovaně opírá o Radon-Nikodýmovu větu a netriviální tvrzení v 17.14. \square

17.16. Příklady distribučních funkcí. Každá spojitě diferencovatelná distribuční funkce je příkladem absolutně spojitě distribuční funkce, třeba

$$F(x) = 1/2 + \frac{1}{\pi} \arctan x.$$

Funkce $\chi_{[0, \infty)}$ je typická funkce skoků. Singulární spojitě funkce se konstruují hůře, příkladem je tzv. Cantorova funkce.

REJSTRÍK

Γ -funkce, 6.7
 ε - δ spojitost integrálu, 12.3
 χ_E , 2.1
 λ, λ_n , 1.16, **8**, 8.1
 μ_F , 17.2
 μ_X , 17.8
 σ -algebra, **1**, 1.4
 σ -konečná míra, 1.11
 abstraktní Lebesgueův integrál, **3**, 3.3
 absolutně spojitá část míry, 14.4
 absolutně spojitá funkce, 17.5
 absolutně spojitá míra, 14.1
 alternující řada, 5.5
 aproximace, 2.10, 11.7
 B-funkce, 6.7
 Beta funkce, 6.7
 borelovské množiny, 1.8, 8.2
 Cantelliho věta, 12.5
 Carathéodoryova věta, 7.5
 carathéodoryovská měřitelnost, 7.4, 7.5
 Čebyševova nerovnost, 12.1
 derivování měř, **14**
 derivování podle parametru, 6.5
 délka intervalu, 1.3
 dělení, 3.1
 Diracova míra, 1.10
 diskrétní míra, 14.7, 14.9
 distribuční funkce, 17.8
 dolní součet, 3.3
 Dynkinův systém, 7.8
 F_X , 17.8
 Fatouovo lemma, 5.1
 Fubiniova věta, 9.8
 funkce skoků, 17.5
 Gamma funkce, 6.7
 Hahnův rozklad znaménkové míry, 14.6
 Hausdorffova míra, 1.10
 Hopfova věta, 7.14
 horní součet, 7.2
 Hölderova nerovnost, trfholdner
 hustota (ve funkčních prostorech), viz. aproximace
 hustota míry, 14.2
 charakteristická funkce, 2.1
 integrál závislý na parametru, **6**
 integrovatelná funkce, 3.3
 interval, 1.3, 8.1
 $J\varphi$, 10.2
 Jacobiho matice, 10.2
 jakobián, 10.2
 Jegorovova věta, 12.4

jednoduchá funkce, 2.9, 3.2
 Jordanův rozklad, 13.5
 kladná část funkce, 2.1
 kladná část míry, 13.5
 konečná míra, 1.11
 konstrukce měr, **7**
 konvergence skoro všude, 1.11, 12.4, 12.6
 konvergence v L^p , 11.1, 12.6
 konvergence v míře, 12.2, 12.6
 konvergentní Lebesgueův integrál, 3.3, 4.2
 Kurzweilův integrál, **4**
 L^p , viz prostor L^p
 Lebesgueova věta, 5.2, 5.3
 Lebesgueova věta o rozkladu, 14.3
 Lebesgue-Radon-Nikodýmova věta, 14.3
 Lebesgue-Stieltjesova míra, 17.2
 Lebesgueova míra, 1.16, **8**, 8.1
 lebesgueovsky integrovatelná funkce, 3.3, **4**
 lebesgueovsky měřitelná množina, 1.16
 Lebesgueův integrál, **3**, 3.3, **4**
 Leviho věta, 3.9
 Luzinova věta, 15.4
 $M^{x,*}$, $M^{*,y}$, 9.6
 $\mathfrak{M}(\gamma)$, 7.4, 7.5
 měřitelná funkce, **2**, 2.2
 měřitelná množina, 1.4, 1.16, 7.4
 měřitelné zobrazení, **16**, 16.1
 měřitelný obdélník, 9.1
 měřitelný prostor, **1**, 1.4
 Minkowského nerovnost, 11.4
 míra, **1**, 1.9
 míra s hustotou, 14.2
 množinová funkce, 1.1
 náboj, **13**, 13.1
 náhodná veličina, 17.7
 neabsolutně konvergentní integrál, **4**
 nejužší, 1.2
 neurčitý Lebesgueův integrál, 4.1
 Newtonův integrál, **4**
 norma v L^p , 11.1
 nosič funkce, 15.1
 objem intervalu, 8.1
 obraz míry, **16**, 16.3
 okruh, 7.12
 Perronův integrál, **4**
 počáteční podmínka, 7.2
 počítací míra, 1.10
 polární souřadnice, 10.4
 pramíra, 7.13
 pravděpodobnostní míra, 1.11
 prostor s mírou, **1**, 1.9
 prostor L^p , **11**, 12.6
 Radon-Nikodýmova derivace, 14.3
 Radon-Nikodýmova věta, 14.3

regulární zobrazení, 10.1
 Riemannův integrál, 4.4, **4**
 rozdělení náhodné veličiny, 17.8
 rozšíření množinové funkce, 1.2
 řez, 9.6
 S_F , 17.1
 Sardova věta, 10.12
 sférické souřadnice, 10.6
 singulární část míry, 14.4
 singulární funkce, 17.5
 singulární míra, 14.1
 skok, 17.1
 skoro všude, 1.11
 součin měr, **9**, 9.1, 9.10, 9.11
 spojitá míra, 14.7, 14.9
 test měřitelnosti, 7.7
 testovací množina, 7.4
 trik zdisjunktnění, 1.13
 úplná míra, 1.11
 úplný prostor, 11.6
 úplný součin měr, 9.1, 9.11
 variace znaménkové míry, 13.2
 věta o hustotě spojitých funkcí 15.2
 věta o jednoznačnosti, 7.11
 věta o substituci, **10**, 10.3
 věta o variaci, 13.4
 vnější míra, 7.1
 Youngova nerovnost, 11.2
 základní konstrukce, 7.6
 záměna limity a integrálu, **5**
 záporná část funkce, 2.1
 záporná část míry, 13.5
 znaménková míra, **13**, 13.1
 zúplnění míry, 1.12
 zúžení množinové funkce, 1.2