Úvod do funkcionální analýzy

Ladislav Lukšan

2002

Obsah

1 Úvod

Tento text byl použit jako podklad pro stejnojmennou přednášku v předmětu Aplikovaná matematika na Fakultě mechatroniky Technické university v Liberci (FM TUL). Tím byl podmíněn výběr látky a způsob výkladu. Protože se na FM TUL neprobírá teorie Lebesgueova integrálu ani hlubší partie teorie množin a topologie, uvádím některá tvrzení bez důkazů. Hloubavý čtenář nalezne tyto důkazy spolu s dalšími partiemi funkcionální analýzy v doporučené literatuře:

A.E.Taylor: Úvod do funkcionální analýzy, Academia, Praha 1973.

A. Kufner: Geometrie Hilbertova prostoru. SNTL, Praha 1973.

J. Nagy: Vybrané partie z moderní matematiky, SNTL, Praha 1976.

W. Rudin: Analýza v reálném a komplexním oboru. Academia, Praha 1977.

J. Lukeš: Zápisky z funkcionální analýzy. Karolinum, Praha 1998.

Funkcionální analýza vznikla na základě snahy zobecnit pojmy klasické analýzy (zejména pojmy konvergence a spojitosti) na obecnější prostory a objekty. V tomto textu se budeme zabývat vlastnostmi topologických, metrických, Banachových a Hilbertových prostorů (jsou seřazeny od obecnějších ke speciálnějším) a lineárními objekty v těchto prostorech. Na závěr jsou uvedeny některé pojmy z teorie parcialních diferenciálních rovnic, které budou použity v dalších přednáškách předmětu Aplikovaná matematika. V textu jsou často použity kvantifikátory $\forall$ (pro každý) a $\exists$ (existuje).

2 Metrické prostory

2.1 Základní pojmy

Definice 1. Nechť X je množina a $\rho : X \times X \to R$ je reálná funkce taková, že

(a) $\rho(x, y) \geq 0$
$\rho(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = y$

(b) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$

(c) $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$

Pak řekneme, že (X, ρ) je metrickým prostorem. Funkce ρ se nazývá metrika.

Příklad 1. Nechť C je množina komplexních čísel a $\rho(x, y) = |x - y| \;\forall x, y \in C$. Pak platí (a)-(c) a (C, ρ) je metrický prostor.

Příklad 2. Nechť R^n je množina n-rozměrných reálných vektorů a

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \quad \forall x, y \in R^n$$

Pak platí (a)-(c) a (R^n, ρ) je metrický prostor. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé. Abychom dokázali (c), dokážeme nejprve Schwartzovu nerovnost

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

Protože pro libovolné číslo λ platí

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(x_k + \lambda y_k)^2 &= \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 + 2\lambda x_k y_k + \lambda^2 y_k^2) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + 2\lambda \sum_{k=1}^{n} x_k y_k + \lambda^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2 \geq 0\end{aligned}$$

musí být diskriminant této kvadratické nerovnosti nekladný, takže

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} y_k^2$$

z čehož plyne Schwartzova nerovnost. Použitím této nerovnosti dostaneme

$$\begin{aligned}\rho^2(x,z) &= \sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2 = \sum_{k=1}^{n}[(x_k - y_k) + (y_k - z_k)]^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + 2\left|\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)(y_k - z_k)\right| + \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)} + \sum_{k=1}^{n}(y_k - z_k)^2 \\ &= \rho^2(x,y) + 2\rho(x,y)\rho(y,z) + \rho^2(y,z) = (\rho(x,y) + \rho(y,z))^2\end{aligned}$$

odkud plyne (c).

Příklad 3. Nechť l_2 je množina posloupností $\{x_k\} \subset R$ (t.j. $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$) takových, že

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty \quad \forall x \in l_2$$

Položme

$$\rho(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - y_k)^2} \quad \forall x, y \in l_2$$

Pak platí (a)-(c) a (l_2, ρ) je metrický prostor. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé a (c) se dokazuje podobně jako v příkladu 2.

Příklad 4. Nechť l_∞ je množina všech omezených posloupností $\{x_k\} \subset R$ (t.j. $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$) a

$$\sup_{k \in N} |x_k| < \infty \quad \forall x \in l_\infty$$

Položme

$$\rho(x,y) = \sup_{k \in N} |x_k - y_k| \quad \forall x, y \in l_\infty$$

Pak platí (a)-(c) a (l_∞, ρ) je metrický prostor. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé a

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= \sup_{k \in N} |x_k - z_k| \leq \sup_{k \in N} (|x_k - y_k| + |y_k - z_k|) \\
&\leq \sup_{k \in N} |x_k - y_k| + \sup_{k \in N} |y_k - z_k| \\
&= \rho(x,y) + \rho(y,z)
\end{aligned}$$

Příklad 5. Nechť $C[a,b]$ je množina všech funkcí spojitých na intervalu $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ a

$$\rho(x,y) = \max_{t \in [a,b]} (|x(t) - y(t)|) \quad \forall x, y \in C[a,b]$$

Pak platí (a)-(c) a $(C[a,b], \rho)$ je metrický prostor. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé a

$$\begin{aligned}
\rho(x,z) &= \max_{t \in [a,b]} (|x(t) - z(t)|) \\
&\leq \max_{t \in [a,b]} (|x(t) - y(t)| + |y(t) - z(t)|) \\
&\leq \max_{t \in [a,b]} (|x(t) - y(t)|) + \max_{t \in [a,b]} (|y(t) - z(t)|) \\
&= \rho(x,y) + \rho(y,z)
\end{aligned}$$

Příklad 6. Nechť $\mathcal{L}_2[a,b]$ je množina všech funkcí integrovatelných (v Lebesgueově smyslu) s kvadrátem na intervalu $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, takže

$$\int_a^b x^2(t)dt < \infty \quad \forall x \in \mathcal{L}_2[a,b]$$

Nechť $L_2[a,b]$ je množina tříd funkcí z $\mathcal{L}_2[a,b]$ (třídy označujeme vlnovkou), přičemž $x_1 \in \tilde{x}$, $x_2 \in \tilde{x}$, pokud $x_1 = x_2$ skoro všude v $[a,b]$, a

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \sqrt{\int_a^b (x(t)-y(t))^2 dt} \quad \forall x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}$$

Pak platí (a)-(c) a $(L_2[a,b],\rho)$ je metrický prostor. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé, (c) se dokazuje podobně jako v příkladu 2.

Příklad 7. Nechť $\mathcal{L}_\infty[a,b]$ je množina všech funkcí omezených skoro všude v $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$, takže

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)| < \infty \quad \forall x \in \mathcal{L}_\infty[a,b]$$

(výraz na levé straně je nejmenší číslo $c \geq 0$ takové, že množina těch $t \in [a,b]$, pro něž $|x(t)| > c$, má Lebesgueovu míru nula). Nechť $L_\infty[a,b]$ je množina tříd funkcí z $\mathcal{L}_\infty[a,b]$ (třídy označujeme vlnovkou), přičemž $x_1 \in \tilde{x}$, $x_2 \in \tilde{x}$ pokud $x_1 = x_2$ skoro všude v $[a,b]$ a

$$\rho(\tilde{x},\tilde{y}) = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[a,b]} |x(t)| - y(t)| \quad \forall x \in \tilde{x}, y \in \tilde{y}$$

Pak platí (a)-(c) a $(L_\infty[a,b],\rho)$ je metrický prostor. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé, (c) se dokazuje podobně jako v příkladu 5.

Definice 2. Nechť (X,ρ) je metrický prostor, $x \in X$ a $\varepsilon > 0$. Množinu

$$B(x,\varepsilon) = \{y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

nazveme otevřenou koulí se středem v bodě $x \in X$ a poloměrem $\varepsilon > 0$.

Definice 3. Nechť (X,ρ) je metrický prostor a $G \subset X$. Jestliže $\forall x \in G\ \exists \varepsilon > 0$ tak, že $B(x,\varepsilon) \subset G$, řekneme, že množina $G \subset X$ je otevřená. Nechť $F \subset X$. Jestliže množina $X \backslash F \subset X$ je otevřená, řekneme, že množina $F \subset X$ je uzavřená (symbolem $X \backslash F$ označujeme doplněk množiny F v X).

Věta 1. Platí toto:

(a) Množiny X a $\emptyset$ (celý prostor a prázdná množina) jsou otevřené.

(b) Jsou-li $G_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$, otevřené, je $G = \bigcap\limits_{i=1}^{n} G_i$ otevřená.

(c) Sjednocení libovolného počtu otevřených množin je otevřená množina.

Důkaz: (a) Podle definice 2 leží každá otevřená koule v X. Prázdna množina neobsahuje žádný bod, takže definice 3 je pro ní v pořádku.

(b) Nechť $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i$ a $x \in G$. Pak $x \in G_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Jelikož G_i, $1 \leq i \leq n$, jsou otevřené, existují čísla $\varepsilon_i > 0$, $1 \leq i \leq n$, taková že $B(x, \varepsilon_i) \subset G_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$. Položíme-li $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, platí $B(x, \varepsilon) \subset G_i$ $\forall 1 \leq i \leq n$ a tedy $B(x, \varepsilon) \subset G$.

(c) Nechť x leží v sjednocení G otevřených množin. Pak x leží alespoň v jedné z nich spolu s nějakou otevřenou koulí $B(x, \varepsilon)$. Pak ale $B(x, \varepsilon)$ leží také v G.

Příklad 8. Konečnost počtu množin v (b) je podstatná. Uvažujme metrický prostor (R^n, ρ) z příkladu 2. Nechť

$$G_i = B\left(0, 1 + \frac{1}{i}\right) \quad \forall i \in N$$

Pak

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} G_i = \{x \in R_n : \rho(x, 0) \leq 1\}$$

a tato množina (uzavřená jednotková koule) není otevřená.

Důsledek 1. Platí toto:

(a) Množiny X a $\emptyset$ jsou uzavřené.

(b) Jsou-li $F_i \subset X$, $1 \leq i \leq n$, uzavřené, je $F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$ uzavřená.

(c) Průnik libovolného počtu uzavřených množin je uzavřená množina.

(plyne to z věty 1 a De Morganových pravidel).

Definice 4. Nechť X je množina a $\mathcal{T}$ je systém podmnožin X takových, že

(a) $X \in \mathcal{T}$ a $\emptyset \in \mathcal{T}$

(b) Jestliže $G_i \in \mathcal{T}$, $1 \leq i \leq n$, pak $G = \bigcap_{i=1}^{n} G_i \in \mathcal{T}$.

(c) Sjednocení libovolného počtu množin z $\mathcal{T}$ je prvkem $\mathcal{T}$.

Pak řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a množina $G \in \mathcal{T}$ je otevřená. Jestliže $G \in \mathcal{T}$ a $F = X \backslash G$, řekneme, že množina F je uzavřená.

Definice 5. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $x \in G \in \mathcal{T}$. Pak řekneme, že G je okolím bodu x. Systém všech okolí bodu x označíme $\mathcal{O}(x)$.

Definice 6. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$. Jestliže $\forall x \in X$ a $\forall G \in \mathcal{O}(x)$ existuje $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(x)$ tak, že $B \subset G$, řekneme, že $\mathcal{B}$ je báze topologie $\mathcal{T}$.

Poznámka 1. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ je báze topologie $\mathcal{T}$. Pak $G \in \mathcal{T}$ právě tehdy, jestliže pro libovolný prvek $x \in G$ existuje $B \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(x)$ tak, že $B \subset G$.

Poznámka 2. Systém otevřených koulí $B(x, \varepsilon)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, je bází topologie v metrickém prostoru (X, ρ) (dokonce když $\varepsilon > 0$ jsou racionální).

Definice 7. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor a $A \subset X$. Vnitřkem A^0 množiny A nazveme největší otevřenou množinu obsaženou v A, neboli

$$A^0 = \bigcup_{G \subset A} G, \quad G - \text{otevrene}$$

Uzávěrem $\overline{A}$ množiny A nazveme nejmenší uzavřenou množinu obsahující A, neboli

$$\overline{A} = \bigcap_{A \subset F} F, \quad F - \text{uzavrene}$$

Hranicí množiny A nazveme množinu $A' = \overline{A} \backslash A^0$. Jestliže $\overline{A} = X$, řekneme, že množina A je hustá v X.

Poznámka 3. Platí $(X \backslash A)^0 = X \backslash \overline{A}$, $\overline{(X \backslash A)} = X \backslash A^0$ a $(X \backslash A)' = A'$ (stačí použít De Morganova pravidla).

Definice 8. Nechť $(X, \mathcal{T})$ je topologický prostor, $\{x_n\} \subset X$ (posloupnost bodů z X) a $x \in X$. Jestliže ke každému okolí $G \in \mathcal{O}(x)$ existuje index $n_G \in N$ takový, že $x_n \in G \ \forall n \geq n_G$, řekneme, že $\{x_n\}$ konverguje k bodu x a píšeme $x_n \to x$.

Poznámka 4. Stačí uvažovat pouze $G \in \mathcal{B} \cap \mathcal{O}(x)$ (konvergenci lze definovat pomocí báze topologie).

Věta 2. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$. Pak $x_n \to x$ právě tehdy, jestliže $\rho(x_n, x) \to 0$ (takto se většinou definuje konvergence v metrických prostorech).

Důkaz: (a) Nechť $x_n \to x$ podle definice 8. Pak pro každou otevřenou kouli $B(x,\varepsilon) \in \mathcal{O}(x)$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový že $x_n \in B(x,\varepsilon)$ $\forall n \geq n_\varepsilon$, neboli $\rho(x_n, x) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. Platí tedy $\rho(x_n, x) \to 0$.

(b) Nechť $\rho(x_n, x) \to 0$ a $G \in \mathcal{O}(x)$. Jelikož množina G je otevřená, existuje otevřená koule $B(x,\varepsilon) \subset G$ a jelikož $\rho(x_n, x) \to 0$, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $x_n \in B(x,\varepsilon) \subset G$ $\forall n \geq n_\varepsilon$.

Definice 9. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, $A \subset X$ a $x \in X$. Jestliže existuje posloupnost $\{x_n\} \subset A$ tak, že $x_n \to x$, řekneme, že x je limitním bodem množiny A.

Věta 3. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Pak $\overline{A}$ (uzávěr) je množinou všech limitních bodů množiny A.

Důkaz: (a) Nechť $x \in X \setminus \overline{A}$. Jelikož množina $\overline{A}$ je uzavřená, je $X \setminus \overline{A}$ otevřená. Existuje tedy otevřená koule $B(x,\varepsilon) \subset X \setminus \overline{A}$. Pak ale $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ $\forall y \in \overline{A} \supset A$, takže x není hromadným bodem množiny A.

(b) Nechť $x \in \overline{A}$ není hromadným bodem množiny A. Pak existuje číslo $\varepsilon > 0$ takové, že $\rho(x,y) \geq \varepsilon$ $\forall y \in A$, neboli $A \subset X \setminus B(x,\varepsilon)$. Uzavřená množina $\overline{A} \cap X \setminus B(x,\varepsilon)$ tedy obsahuje A ale neobsahuje $\overline{A}$, což je ve sporu s definicí 7.

2.2 Úplné prostory

Definice 10. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $\{x_n\} \subset X$. Jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $m \geq n_\varepsilon$, $n \geq n_\varepsilon \Rightarrow \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$, řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ je cauchyovská.

Definice 11. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže ke každé cauchyovské posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ existuje bod $x \in X$ takový, že $x_n \to x$, řekneme, že prostor (X, ρ) je úplný.

Příklad 9. Prostor (R^n, ρ) z příkladu 2 je úplný (neboť množina reálných čísel je úplná).

Příklad 10. Prostor (Q^n, ρ) n-rozměrných racionálních vektorů s metrikou z příkladu 2 není úplný (neboť množina racionálních čísel není úplná). Platí však $\overline{Q^n} = R^n$, takže Q^n je hustý v R^n.

Příklad 11. Prostor (l_2, ρ) z příkladu 3 je úplný:

(a) Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset l_2$ cauchyovská pak i posloupnost složek je cauchyovská neboť, označíme-li $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots\}$, platí

$$|\xi_l^m - \xi_l^n| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^m - \xi_k^n)^2} = \rho(x_m, x_n)$$

$\forall l \in N$. Existují tedy limity $\xi_l^n \to \xi_l$ $\forall l \in N$. Označme $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

(b) Ukážeme, že $x \in l_2$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $m \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < 1$ $\forall n \geq m$. Označme $M = \rho(x_m, 0) + 1$. Nechť $n \geq m$ a $l \in N$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{l} (\xi_k^n)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k^n)^2} = \rho(x_n, 0) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, 0) < 1 + \rho(x_m, 0) = M$$

Jelikož $\xi_k^n \to \xi_k$ $\forall 1 \leq k \leq l$ a l je konečné, platí

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{l} \xi_k^2} \leq M$$

Limitním přechodem pro $l \to \infty$ dostaneme

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2} \leq M < \infty$$

(c) Ukážeme, že $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_\varepsilon$. Pak pro $n, m \geq n_\varepsilon$ a $l \in N$ můžeme psát.

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{l} (\xi_k^n - \xi_k^m)^2} \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

což v limitě pro $m \to \infty$ dává

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{l} (\xi_k^n - \xi_k)^2} \leq \varepsilon$$

Limitním přechodem pro $l \to \infty$ dostaneme $\rho(x_n, x) \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ a podle věty 2 platí $x_n \to x$.

Příklad 12. Prostor (l_∞, ρ) z příkladu 4 je úplný:

(a) Je-li posloupnost $\{x_n\} \subset l_\infty$ cauchyovská pak i posloupnost složek je cauchyovská neboť platí

$$|\xi_l^m - \xi_l^n| \leq \sup_{k \in N} |\xi_k^m - \xi_k^n| = \rho(x_m, x_n)$$

$\forall l \in N$. Existují tedy limity $\xi_l^n \to \xi_l$ $\forall l \in N$. Označme $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$.

(b) Ukážeme, že $x \in l_\infty$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $m \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < 1$ $\forall n \geq m$. Označme $M = \rho(x_m, 0) + 1$. Nechť $n \geq m$. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|\xi_l^n| \leq \sup_{k \in N} |\xi_k^n| = \rho(x_n, 0) \leq \rho(x_n, x_m) + \rho(x_m, 0) < 1 + \rho(x_m, 0) = M$$

$\forall l \in N$. Jelikož $\xi_l^n \to \xi_l$, platí $|\xi_l| \leq M$ $\forall l \in N$ a tedy $\sup\limits_{k \in N} |\xi_k| \leq M < \infty$.

(c) Ukážeme, že $x_n \to x$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\{x_n\}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ $\forall n, m \geq n_\varepsilon$. Pak pro $n, m \geq n_\varepsilon$ můžeme psát

$$|\xi_l^n - \xi_l^m| \leq \rho(x_n, x_m) < \varepsilon$$

$\forall l \in N$, což v limitě pro $m \to \infty$ dává $|\xi_l^n - \xi_l| \leq \varepsilon$ $\forall l \in N$. Tedy $\rho(x_n, x) = \sup_{k \in N} |\xi_k^n - \xi_k| \leq \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$ a podle věty 2 platí $x_n \to x$.

Příklad 13. Prostor $(C[a, b], \rho)$ z příkladu 5 je úplný, neboť konvergence v metrice ρ je stejnoměrnou konvergencí a ta zachovává spojitost.

Příklad 14. Prostor $(C[a, b], \rho)$ s metrikou

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

není úplný, neboť konvergence v této metrice není stejnoměrnou konvergencí a může se stát, že $x_n \to x$ a funkce x není spojitá.

Příklad 15. Prostor $(L_2[a, b], \rho)$ z příkladu 6 je úplný (úplnost tohoto prostoru byla jedním z důvodů pro zavedení Lebesgueova integrálu).

Příklad 16. Prostor $(L_\infty[a, b], \rho)$ z příkladu 7 je úplný (limita posloupností funkcí omezených skoro všude je funkce omezená skoro všude). Princip důkazu je prakticky stejný jako u příkladu 12.

Věta 4. Nechť (X, ρ) je metrický prostor, který není úplný. Pak existuje úplný metrický prostor $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$ takový, že $\overline{X} = \tilde{X}$ (X je hustý v $\tilde{X}$) a $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y)$ pokud $\tilde{x} = x \in X$ a $\tilde{y} = y \in X$.

Důkaz: (a) (Konstrukce prostoru $\tilde{X}$) Cauchyovské posloupnosti $\{x_k\} \subset X$, $\{y_k\} \subset X$ nazveme ekvivalentní, jestliže $\rho(x_k, y_k) \to 0$. Že jde o ekvivalenci, plyne bezprostředně z podmínek (a)–(c) v definici 1. Například tranzitivita plyne z (c), neboť $\rho(x_k, y_k) \to 0$ a $\rho(y_k, z_k) \to 0$ implikují

$$\rho(x_k, z_k) \le \rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k) \to 0$$

Prostor $\tilde{X}$ je množina všech tříd ekvivalence Cauchyovských posloupností. Pokud $\{x, x, x, \dots\} \in \tilde{x}$ ztotožníme $\tilde{x}$ s x (píšeme $\tilde{x} = x$).

(b) (Metrika na $\tilde{X}$) Metriku na $\tilde{X}$ definujeme vztahem

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k)$$

pokud $\{x_k\} \in \tilde{x}$ a $\{y_k\} \in \tilde{y}$. Korektnost této definice plyne ze zavedené ekvivalence posloupností a z trojúhelníkové nerovnosti. Je také zřejmé, že pokud $\tilde{x} = x$ a $\tilde{y} = y$ (t.j. $\{x, x, x, \dots\} \in \tilde{x}$ a $\{y, y, y, \dots\} \in \tilde{y}$), platí $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \rho(x, y)$. Platnost podmínek (a), (b) z definice 1 je zřejmá. Trojúhelníkovou nerovnost dokážeme takto

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{z}) &= \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, z_k) \le \lim_{k\to\infty} (\rho(x_k, y_k) + \rho(y_k, z_k)) \\
&\le \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, y_k) + \lim_{k\to\infty} \rho(y_k, z_k) \\
&= \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}) + \tilde{\rho}(\tilde{y}, \tilde{z})
\end{aligned}$$

(c) (Hustota X v $\tilde{X}$) Nechť $\{x_k\} \in \tilde{x} \in \tilde{X}$ a $\varepsilon > 0$. Jelikož posloupnost $\{x_k\}$ je cauchyovská, existuje index $n \in N$ takový, že $\rho(x_n, x_k) < \varepsilon/2 \ \forall k \ge n$. Nechť $\{x_n, x_n, x_n, \dots\} \in \tilde{x}_n$, takže $\tilde{x}_n = x_n \in X$. Pak platí

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) = \lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x_n) \le \varepsilon/2 < \varepsilon$$

(d) (Úplnost prostoru $\tilde{X}$) Nechť posloupnost $\{\tilde{x}_n\} \in \tilde{X}$ je cauchyovská. Jelikož X je hustý v $\tilde{X}$, existuje ke každému prvku $\tilde{x}_n \in \tilde{X}$ prvek $y_n \in X$ takový že $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 1/n$, kde $\{y_n, y_n, y_n, \dots\} \in \tilde{y}_n$. Uvažujme posloupnost $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \subset X$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Jelikož posloupnost $\{\tilde{x}_n\} \subset \tilde{X}$ je cauchyovská, existuje index $n_\varepsilon \ge 4/\varepsilon$ takový, že

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) < \frac{\varepsilon}{4} \quad \forall m, n \ge n_\varepsilon$$

Pak platí

$$\rho(y_m, y_n) = \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{y}_n) \le \tilde{\rho}(\tilde{y}_m, \tilde{x}_m) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_m, \tilde{x}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{n} \le \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

$\forall m, n \ge n_\varepsilon$, takže posloupnost $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \subset X$ je cauchyovská. Existuje tedy prvek $\tilde{x} \in \tilde{X}$ takový, že $\{y_1, y_2, y_3, \dots\} \in \tilde{x}$. Ukážeme, že $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{x}) \to 0$. Jelikož jsme dokázali, že pro libovolné číslo $\varepsilon > 0$ existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\rho(y_m, y_n) < 3/4\varepsilon$, $\forall m, n \geq n_\varepsilon$, platí

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}_n) = \lim_{m\to\infty} \rho(y_m, y_n) \leq \frac{3}{4}\varepsilon < \varepsilon$$

$\forall n \geq n_\varepsilon$ a tedy $\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}_n) \to 0$ Jelikož zároveň $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) \to 0$ (neboť $\tilde{\rho}(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n) < 1/n$), platí

$$\tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{x}_n) \leq \tilde{\rho}(\tilde{x}, \tilde{y}_n) + \tilde{\rho}(\tilde{y}_n, \tilde{x}_n) \to 0$$

Definice 12. Nechť (X, ρ) je metrický prostor a $A \subset X$. Číslo

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{x,y\in A} \rho(x, y)$$

nazveme diametrem množiny A. Jestliže $\mathrm{diam}(A) < \infty$, řekneme, že množina A je omezená.

Věta 5. (Cantorova věta o průniku) Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor. Nechť $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \ldots$ je posloupnost neprázdných uzavřených podmnožin X taková, že $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Pak existuje právě jeden bod $x \in X$ takový, že

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

Důkaz: (a) (Existence) Jelikož množiny F_n, $n \in N$, jsou neprázdné, existují body $x_n \in F_n$, $n \in N$. Nechť $\varepsilon > 0$. Jelikož $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$, existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $F_n \subset F_{n_\varepsilon}$ a $\mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$ $\forall n \geq n_\varepsilon$. Jelikož pro $m \geq n \geq n_\varepsilon$ platí $\rho(x_m, x_n) \leq \mathrm{diam}(F_n) < \varepsilon$, je posloupnost $\{x_n\}$ cauchyovská. Jelikož prostor (X, ρ) je úplný a množina $F_{n_\varepsilon} \subset X$ je uzavřená, existuje bod $x \in F_{n_\varepsilon}$ takový, že $x_n \to x \in F_{n_\varepsilon}$. Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné, platí $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$

(b) (Jednoznačnost). Jestliže $x_1 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$, $x_2 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ a $x_1 \neq x_2$, pak $x_1 \in F_n$ a $x_2 \in F_n$ $\forall n \in N$ a tudíž $\mathrm{diam}(F_n) \geq \rho(x_1, x_2) > 0$ $\forall n \in N$, což je ve sporu s tím že $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$.

Věta 6. (Banachova věta o kontrakci) Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a $T : X \to X$ je kontrahující zobrazení, t.j. pro $\forall x, y \in X$ platí

$$\rho(T(x), T(y)) \leq \alpha\rho(x, y)$$

kde $0 \leq \alpha < 1$. Pak existuje alespoň jeden bod $x^* \in X$, takový, že $T(x^*) = x^*$.

Důkaz: Zvolíme bod $x_0 \in X$ libovolně a konstruujeme posloupnost $x_1 = T(x_0)$, $x_2 = T(x_1), \ldots$. Pak platí

$$\rho(x_{k+1}, x_k) = \rho(T(x_k), T(x_{k-1})) \le \alpha\rho(x_k, x_{k-1}) \le \ldots \le \alpha^k \rho(x_1, x_0)$$

a

$$\begin{aligned}
\rho(x_{k+p}, x_k) &\le \sum_{i=1}^{p} \rho(x_{k+i}, x_{k+i-1}) \le \sum_{i=1}^{p} \alpha^{k+i-1}\rho(x_1, x_0) = \alpha^k \rho(x_1, x_0) \sum_{i=1}^{p} \alpha^{i-1} \\
&\le \alpha^k \rho(x_1, x_0) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i-1} = \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_0)
\end{aligned}$$

$\forall p \in N$. Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nechť $n \in N$ je číslo takové, že

$$\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

Pak pro libovolné dva body x_k, x_{k+p}, kde $k \ge n$ a $p \in N$, platí

$$\rho(x_{k+p}, x_k) \le \frac{\alpha^k}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_0) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\,\rho(x_1, x_0) < \varepsilon$$

takže posloupnost $\{x_k\}$ je cauchyovská. Protože prostor (X, ρ) je úplný, existuje bod $x^* \in X$ takový, že $x_k \to x^*$. Jelikož platí

$$\rho(x_{k+1}, T(x^*)) = \rho(T(x_k), T(x^*)) \le \alpha\rho(x_k, x^*)$$

a jelikož $\rho(x_k, x^*) \to 0$ (neboť $x_k \to x^*$), dostaneme $\rho(x_{k+1}, T(x^*)) \to 0$, čili $\rho(x^*, T(x^*)) = 0$ (neboť $x_{k+1} \to x^*$). Platí tedy $T(x^*) = x^*$.

2.3 Separabilní prostory

Definice 13. Řekneme, že množina A je spočetná, jestliže je buď konečná nebo existuje prosté zobrazení množiny přirozených čísel N na A.

Příklad 17. Množina všech sudých čísel je spočetná, neboť existuje prosté zobrazení $n \leftrightarrow 2n$.

Věta 7. Každá podmnožina spočetné množiny je spočetná.

Důkaz: Nechť množina A je spočetná a $B \subset A$. Je-li B konečná, není co dokazovat. Budeme tedy předpokládat, že B je nekonečná. Jelikož množina A je spočetná, lze její prvky uspořádat v posloupnost $\{a_n\}$ (neboť existuje prosté zobrazení množiny přirozených čísel N na A). V tomto případě můžeme B chápat jako podposloupnost $B = \{b_i : b_i = a_{n_i}, i \in N\}$ vybranou z posloupnosti $\{a_n\}$. Pak ale $i \leftrightarrow b_i = a_{n_i}$ je prosté zobrazení N na B.

Věta 8. Kartézský součin spočetných množin (množina všech dvojic) je spočetná množina.

Důkaz: Nechť $A = \{a_i : i \in N\}$, $B = \{b_j : j \in N\}$ jsou spočetné množiny a

$$X = A \times B = \{x_{ij} : x_{ij} = (a_i, b_j), i \in N, j \in N\}$$

Zapišme prvky X do dvojrozměrné tabulky

$$\begin{array}{cccc} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Tyto prvky můžeme uspořádat podle vedlejších diagonál

$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots\} = \{x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{13}, x_{22}, x_{31}, \dots\}$$

takže existuje prosté zobrazení

$$n \leftrightarrow \frac{(i+j-2)(i+j-1)}{2} + i$$

N na $A \times B$.

Důsledek 2. Množina racionálních čísel je spočetná.

Věta 9. Sjednocení spočetného systému spočetných množin je spočetná množina.

Důkaz: Nechť A_i, $i \in N$, je spočetný systém množin a každá množina $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \dots\}$ je spočetná. Pak máme stejnou situaci jako v důkazu věty 8

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

Věta 10. Množina reálných čísel z jakéhokoliv intervalu (s různými koncovými body) je nespočetná.

Důkaz: Stačí se omezit na interval $[0, 1]$ (existuje prosté zobrazení intervalu $[0, 1]$ na jakýkoliv interval s různými koncovými body). Předpokládejme, že čísla z $[0, 1]$ lze uspořádat v posloupnost $x_1, x_2, \dots$, kde v dekadickém tvaru

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 0,\xi_1^1\xi_2^1\xi_3^1\ldots\\
x_2 &= 0,\xi_2^1\xi_2^2\xi_3^2\ldots\\
&\ldots
\end{aligned}
$$

a $\xi_j^i \in \{0,1,\ldots,9\}$. Zkonstruujme číslo $x = 0,\xi_1\xi_2\xi_3\ldots \in [0,1]$ tak, aby

$$
\begin{array}{ccc}
\xi_1 \neq \xi_1^1 & \text{a} & \xi_1 \neq 0, \quad \xi_1 \neq 9,\\
\xi_2 \neq \xi_2^2 & \text{a} & \xi_2 \neq 0, \quad \xi_2 \neq 9,\\
 & \ldots &
\end{array}
$$

Pak zřejmě $x \neq x_1$, $x \neq x_2$, $\ldots$, takže x není prvkem posloupnosti $x_1, x_2, \ldots$

Definice 14. Nechť (X,ρ) je metrický prostor. Jestliže existuje spočetná množina A hustá v X (t.j. $\overline{A} = X$), řekneme, že prostor (X,ρ) je separabilní.

Příklad 18. Prostor (R^n,ρ) z příkladu 2 je separabilní, neboť množina n-rozměrných racionálních vektorů Q^n je spočetná a hustá v R^n (každé reálné číslo je limitou posloupnosti racionálních čísel).

Příklad 19. Prostor (l_2,ρ) z příkladu 3 je separabilní. Označme $\tilde{l}_2 \subset l_2$ množinu posloupností majících konečný počet nenulových prvků, které jsou navíc racionální. Tato množina je spočetná. Dokážeme, že je hustá v l_2. Nechť $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in l_2$ a $\varepsilon > 0$. Jelikož

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$$

existuje číslo $n \in N$ takové, že

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \leq \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

Najdeme $y = \{y_1, y_2, \ldots\} \in \tilde{l}_2$ tak, aby $y_k = 0$ pro $k \geq n+1$ a $|x_k - y_k| < \varepsilon/\sqrt{2n}$ pro $k \leq n$. Pak platí

$$\rho^2(x,y) = \sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 < n\frac{\varepsilon^2}{2n} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 = \varepsilon^2$$

takže $\rho(x,y) < \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ je libovolné je $\tilde{l}_2$ hustá v l_2.

Příklad 20. Prostor (l_∞,ρ) z příkladu 4 není separabilní. Nechť $\{x_n\} \subset l_\infty$ je libovolná spočetná množina v l_∞. Její prvky označíme $x_n = \{\xi_1^n, \xi_2^n, \ldots\}$. Položme

$x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, kde $\xi_k = \xi_k^k + 1$, pokud $|\xi_k^k| \leq 1$ a $\xi_k = 0$, pokud $|\xi_k^k| > 1$. Pak pro libovolný index $k \in N$ platí $|\xi_k - \xi_k^k| \geq 1$. Nechť x_n je libovolný prvek spočetné posloupnosti $\{x_n\} \subset l_\infty$. Pak platí

$$\rho(x, x_n) = \sup_{k \in N} |\xi_k - \xi_k^n| \geq |\xi_n - \xi_n^n| \geq 1$$

takže $\{x_n\}$ není hustá v l_∞.

Příklad 21. Prostor $(C[a,b], \rho)$ z příkladu 5 je separabilní, neboť množina polynomů s racionálními koeficienty je spočetná a hustá (podle Weierstrassovy věty) v $C[a,b]$.

Příklad 22. Prostor $(L_2[a,b], \rho)$ z příkladu 6 je separabilní, neboť množina jednoduchých (po částech konstantních) funkcí nabývajících racionálních hodnot a definovaných pomocí intervalů s racionálními konečnými body je spočetná a hustá v $(L_2[a,b], \rho)$.

Příklad 23. Prostor $(L_\infty[a,b], \rho)$ z příkladu 7 není separabilní.

Věta 11. Metrický prostor (X, ρ) je separabilní právě tehdy, lze-li z každé báze topologie vybrat spočetný podsystém, který je též bází topologie.

Definice 15. Systém otevřených množin $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ nazveme otevřeným pokrytím X, jestliže platí

$$\bigcup_{G \in \mathcal{G}} G = X$$

Věta 12. Metrický prostor (X, ρ) je separabilní právě tehdy, lze-li z každého otevřeného pokrytí X vybrat spočetný podsystém, který je též pokrytím X.

Věta 13. Nechť $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}$ je systém (neprázdných) disjunktních otevřených množin v separabilním metrickém prostoru (X, ρ). Pak $\mathcal{G}$ je spočetný.

Důkaz: Nechť A je spočetná množina hustá v X a $G \in \mathcal{G}$. Jelikož G je otevřená, existuje otevřená koule $B(x, \varepsilon) \subset G$. Jelikož A je hustá, leží v této otevřené kouli alespoň jeden bod $y \in A$, tedy $y \in G \cap A$. Nechť G_1, G_2 jsou různé množiny z $\mathcal{G}$ a $y_1 \in G_1 \cap A$, $y_2 \in G_2 \cap A$. Protože $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, platí $y_1 \neq y_2$. To tedy znamená, že počet bodů v A nemůže být menší než počet množin v $\mathcal{G}$. Jelikož množina A je spočetná, musí bý i systém $\mathcal{G}$ spočetný.

2.4 Kompaktní prostory

Definice 16. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset x$ obsahuje podposloupnost, která má limitu v X, řekneme, že prostor X je kompaktní.

Důsledek 3. Kompaktní metrický prostor je úplný.

Definice 17. Nechť (X, ρ) je úplný metrický prostor a nechť $K \subset X$. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset K$ obsahuje podposloupnost, která má limitu v K, řekneme, že množina K je kompaktní.

Věta 14. Každá kompaktní množina v úplném metrickém prostoru je omezená a uzavřená.

Důkaz: (a) (Omezenost) Nechť $K \subset X$ není omezená (takže $\operatorname{diam}(K) = \infty$). Pak lze zkonstruovat posloupnost $\{x_n\} \subset K$ takovou, že $\rho(x_k, x_n) > 1 \ \forall k < n$. Pokud by tato konstrukce selhala pro nějaké $n \in N$, muselo by $\forall x, y \in X$ platit

$$\rho(x, y) \leq \rho(x, x_i) + \rho(x_i, x_j) + \rho(x_j, y)$$

$\forall i, j < n$, neboli

$$\begin{aligned} \rho(x, y) &\leq \min_{k<n} \rho(x, x_k) + \min_{k<n} \rho(x_k, y) + \operatorname{diam}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \leq \\ &\leq 2 + \operatorname{diam}\{x_1, \ldots, x_{n-1}\} < \infty \end{aligned}$$

(což je ve sporu s předpokladem že $\operatorname{diam}(K) = \infty$). Takto zkonstruovaná posloupnost neobsahuje žádnou Cauchyovskou a tedy ani žádnou konvergentní podposloupnost, neboť pro $m \neq n$ platí $\rho(x_m, x_n) > 1$.

(b) (Uzavřenost) Nechť $K \subset X$ je kompaktní a $\{x_n\} \subset K$ je posloupnost, která má limitu v X. Tato posloupnost je cauchyovská, takže musí obsahovat podposloupnost, která má limitu v K. Jelikož každá podposloupnost konvergentní posloupnosti má stejnou limitu jako původní posloupnost, platí $x_n \to x \in K$ a tedy $\overline{K} \subset K$.

Příklad 24. V prostoru (R^n, ρ) z příkladu 2 je množina $K \subset R^n$ kompaktní právě tehdy, je-li omezená a uzavřená.

Příklad 25. V prostoru $(C[a, b], \rho)$ z příkladu 5 je množina $K \in C[a, b]$ kompaktní právě tehdy obsahuje-li funkce stejnoměrně omezené a stejnoměrně spojité (Arzelova-Ascoliho věta).

Příklad 26. V neomezených nekonečněrozměrných prostorech není uzavřená jednotková koule kompaktní, i když je omezená a uzavřená (Rieszovo lemma). Zvolíme-li například v l_2 (nebo v l_∞) posloupnost $\{x_n\}$ takovou, že

$$\begin{aligned} x_1 &= \{1, 0, 0, \ldots\} \\ x_2 &= \{0, 1, 0, \ldots\} \\ x_3 &= \{0, 0, 1, \ldots\} \\ &\ldots \end{aligned}$$

platí $\rho(x_n, 0) = 1\ \forall x_n$ (takže $\{x_n\}$ leží v uzavřené jednotkové kouli) a $\rho(x_m, x_n) \geq 1$ pro $m \neq n$ (takže z $\{x_n\}$ nelze vybrat cauchyovskou a tudíž ani konvergentní podposloupnost).

Věta 15. Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, lze-li z každého otevřeného pokrytí X vybrat konečný podsystém, který je též pokrytím X.

Důsledek 4. Kompaktní prostor je separabilní.

Poznámka 5. Tímto ekvivalentním způsobem se definuje kompaktnost v topologických prostorech. Topologický prostor $(X, \mathcal{T})$ je kompaktní, lze-li z každého otevřeného pokrytí X vybrat konečný podsystém, který je též pokrytím X.

Věta 16. Metrický prostor (X, ρ) je kompaktní právě tehdy, lze-li z každého systému uzavřených množin, který má prázdný průnik vybrat konečný podsystém, který má prázdný průnik (plyne to z věty 15 a z De Morganových pravidel).

Věta 17. Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (X, ρ) a $f : X \to R$ je funkce spojitá na K. Pak existují body $u, v \in K$ takové, že

$$\begin{aligned} f(u) &= \inf_{y \in K} f(y) \\ f(v) &= \sup_{y \in K} f(y) \end{aligned}$$

Důkaz: Podle definice infima existuje posloupnost $\{y_n\} \subset K$ tak, že $f(y_n) \to \inf_{y \in K} f(y)$. Jelikož K je kompaktní, lze z této posloupnosti vybrat konvergentní podposloupnost $\{z_n\} \subset K$. Označme $u \in K$ limitu této podposloupnosti (tedy $z_n \to u$). Jelikož funkce f je spojitá, platí

$$f(u) = \lim_{n \to \infty} f(z_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \inf_{y \in K} f(y)$$

Důkaz pro supremum je analogický.

Důsledek 5. Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (X, ρ) a $x \in X$. Pak existují body $u, v \in K$ takové, že

$$\begin{aligned} \rho(x,u) &= \inf_{y \in K} \rho(x,y) \\ \rho(x,v) &= \sup_{y \in K} \rho(x,y) \end{aligned}$$

Funkce $\rho(x, \cdot) : K \to R$ je totiž spojitá na K neboť z trojúhelníkové nerovnosti plyne

$$|\rho(x,y) - \rho(x,z)| \leq \rho(y,z)$$

Věta 18. Nechť $K \subset X$ je kompaktní množina v metrickém prostoru (X, ρ) a $f : X \to R$ je funkce spojitá na K. Pak f je stejnoměrně spojitá na K (ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $x, y \in K$ platí implikace

$$\rho(x,y) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Důkaz: Předpokládejme, že funkce f je spojitá ale není stejnoměrně spojitá na K. Pak musí existovat číslo $\varepsilon > 0$ a posloupnosti $\{x_n\} \subset K$ a $\{y_n\} \subset K$ tak, že $\rho(x_n, y_n) < 1/n$ a $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ $\forall n \in N$. Jelikož K je kompaktní, lze z těchto posloupností vybrat podposloupnosti $\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$ a $\{y_{n_i}\} \subset \{y_n\}$ (indexy n_i jsou společné oběma podposloupnostem) takové, že $x_{n_i} \to x \in K$ a $y_{n_i} \to y \in K$. Pak ale

$$\rho(x,y) \leq \rho(x, x_{n_i}) + \rho(x_{n_i}, y_{n_i}) + \rho(y_{n_i}, y) \to 0$$

takže $x = y$, Ze spojitosti funkce f pak plyne

$$|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \leq |f(x_{n_i}) - f(x)| + |f(y_{n_i}) - f(y)| \to 0$$

což je ve sporu s předpokladem že $|f(x_{n_i}) - f(y_{n_i})| \geq \varepsilon$.

Poznámka 6. Kompaktní množiny mají podobné vlastnosti jako omezené uzavřené intervaly $[a, b] \subset R$. Proto lze definovat prostory $C(K)$, $L_2(K)$, $L_\infty(K)$, které mají podobné vlastnosti jako $C[a, b]$, $L_2[a, b]$, $L_\infty[a, b]$.

3 Banachovy prostory

3.1 Základní pojmy

Budeme předpokládat, že čtenář má základní znalosti o lineárních prostorech, alespoň v rozsahu jaký se používá v R^n. Nebudeme tedy vysvětlovat pojmy jako lineární podprostor, lineární kombinace, lineární obal, lineární nezávislost. Připomeňme, že v abstraktním lineárním prostoru nemusí existovat konečná báze. Takový prostor se nazývá nekonečněrozměrný. I v nekonečněrozměrném prostoru však existuje báze (spočetná nebo nespočetná).

Definice 18. Nechť X je lineární prostor a $\mathcal{T}$ je topologie na X (ve smyslu definice 4). Jestliže součet a skalární násobek jsou spojitými funkcemi v topologii $\mathcal{T}$, řekneme, že $(X, \mathcal{T})$ je lineárním topologickým prostorem.

Poznámka 7. Je-li topologie určená metrikou mluvíme o lineárních metrických prostorech. K tomu, aby (X, ρ) byl lineárním metrickým prostorem stačí, aby platilo

$$\begin{aligned} \rho(x+z, y+z) &= \rho(x, y) \\ \rho(\lambda x, \lambda y) &= |\lambda| \rho(x, y) \end{aligned}$$

$\forall x, y, z \in X$ a $\forall \lambda \in R$. Skutečně, pokud $x_n \to x$, $y_n \to y$ a $\lambda_n \to \lambda$, platí

$$\begin{aligned} \rho(x_n + y_n, x + y) &= \rho(x_n - x, y - y_n) \le \rho(x_n - x, 0) + \rho(0, y - y_n) \\ &= \rho(x_n, x) + \rho(y_n, y) \to 0 \\ \rho(\lambda_n x_n, \lambda x) &\le \rho(\lambda_n x_n, \lambda_n x) + \rho(\lambda_n x, \lambda x) \\ &= |\lambda_n| \rho(x_n, x) + |\lambda_n - \lambda| \rho(x, 0) \to 0 \end{aligned}$$

Poznámka 8. Splňuje-li metrika podmínky uvedené v poznámce 7, platí

$$\rho(y, z) = \rho(y - z, 0)$$

V tomto případě stačí zavést funkci jedné proměnné $\|x\| = \rho(x, 0)$. Snadno se lze přesvědčit, že tato funkce vyhovuje podmínkám definujícím normu.

Definice 19. Nechť X je lineární prostor a $\| \cdot \| : X \to R$ je funkce taková, že

(a) $\|x\| \ge 0$
$\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

(b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

(c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Pak řekneme, že $(X, \|\cdot\|)$ je lineárním normovaným prostorem. Funkce $\|\cdot\|$ se nazývá normou (symbol $\|\cdot\|$ v označení normovaného lineárního prostoru budeme v dalším textu vynechávat).

Poznámka 9. Je-li zadána norma splňující podmínky (a)–(c), můžeme definovat metriku $\rho(x,y) = \|x - y\|$, která splňuje podmínky (a)–(c) z definice 1. V tomto případě říkáme, že metrika ρ je indukovaná normou. Snadno se ukáže, že metrika indukovaná normou splňuje podmínky uvedené v poznámce 7. Skutečně

$$\begin{aligned}
\rho(x+z, y+z) &= \|x + z - (y+z)\| = \|x - y\| = \rho(x,y) \\
\rho(\lambda x, \lambda y) &= \|\lambda x - \lambda y\| = |\lambda| \|x - y\| = |\lambda| \rho(x,y)
\end{aligned}$$

Definice 20. Banachovým prostorem nazveme normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice indukované normou.

Příklad 27. Prostory z příkladů 1–7 jsou normovanými lineárními prostory, zavedeme-li normy

$$\begin{aligned}
\|x\| &= |x|, \quad x \in C \\
\|x\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}, \quad x \in R^n \\
\|x\| &= \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}, \quad x \in l_2 \\
\|x\| &= \sup_{k \in N} |x_k|, \quad x \in l_\infty \\
\|x\| &= \max_{t \in [a,b]} |x(t)|, \quad x \in C[a,b] \\
\|x\| &= \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}, \quad x \in L_2[a,b] \\
\|x\| &= \operatorname*{ess\ sup}_{t \in [a,b]} |x(t)|, \quad x \in L_\infty[a,b]
\end{aligned}$$

Všechny tyto prostory jsou Banachovými prostory.

3.2 Spojitá lineární zobrazení

Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení. Pak se zavádějí tři důležité množiny, definiční obor zobrazení $\mathcal{D}(T) \subset X$, nulový prostor zobrazení $\mathcal{N}(T) \subset X$ a obor hodnot zobrazení $\mathcal{R}(T) \subset Y$. Platí

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(T) &= \{x \in X : Tx \in Y\} \\ \mathcal{N}(T) &= \{x \in X : Tx = 0\} \\ \mathcal{R}(T) &= \{y \in Y : y = Tx,\ x \in \mathcal{D}(T)\} \end{aligned}$$

Pokud píšeme $T : X \to Y$, předpokládáme obvykle, že $\mathcal{D}(T) = X$. Pokud $\mathcal{D}(T) = X$ a $\mathcal{R}(T) = Y$, říkáme, že T je zobrazení X na Y. Je-li zobrazení T lineární (definice 22) jsou množiny $\mathcal{D}(T)$ a $\mathcal{N}(T)$ lineárními podprostory X a množina $\mathcal{R}(T)$ je lineárním podprostorem Y.

Definice 21. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení. Nechť $x \in X$. Jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\|y - x\| < \delta \Rightarrow \|T(y) - T(x)\| < \varepsilon$, řekneme, že zobrazení T je spojité v bodě x. Je-li zobrazení T spojité v každém bodě $x \in X$, řekneme, že je spojité (na X).

Poznámka 10. Z definice 21 plyne, že zobrazení T je spojité v bodě $x \in X$, právě tehdy, jestliže ke každé otevřené kouli $B(T(x), \varepsilon) \subset Y$ existuje otevřená koule $B(x, \delta) \subset X$ taková, že $T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon)$ nebo, obecněji, jestliže ke každému okolí $V \in \mathcal{O}(T(x))$ existuje okolí $U \in \mathcal{O}(x)$ takové že $T(U) \subset V$.

Věta 19. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení X na Y. Pak T je spojité právě tehdy, jestliže pro každou otevřenou množinu $G \subset Y$ je $T^{-1}(G)$ otevřená množina (používáme označení $T^{-1}(G) = \{x \in X : T(x) \in G\}$).

Důkaz: (a) Nechť zobrazení T je spojité a $G \subset Y$ je otevřená množina. Pak pro každý bod $x \in T^{-1}(G)$ existuje otevřená koule $B(T(x), \varepsilon) \subset G$ a otevřená koule $B(x, \delta) \subset X$ tak, že $T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon) \subset G$. Tedy $B(x, \delta) \subset T^{-1}(G)$ a $T^{-1}(G)$ je otevřená množina.

(b) Nechť $x \in X$ a nechť pro otevřenou množinu $B(T(x), \varepsilon)$ je $T^{-1}(B(T(x), \varepsilon))$ otevřená množina. Tato množina obsahuje bod x a nějakou otevřenou kouli $B(x, \delta)$. Pak ale platí $T(B(x, \delta)) \subset B(T(x), \varepsilon)$ a zobrazeni T je spojité v bodě x.

Definice 22. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je zobrazení. Jestliže platí

$$\begin{aligned} T(x+y) &= T(x)+T(y)\,, \\ T(\lambda x) &= \lambda T(x) \end{aligned}$$

$\forall x, y \in X$ a $\forall \lambda \in R$ řekneme, že zobrazení T je lineární. Jestliže navíc $\|T(x)\| = \|x\|\ \forall x \in X$, řekneme, že zobrazení T je izometrické. Existuje-li prosté spojité izometrické lineární zobrazení X na Y (izometrický izomorfizmus), řekneme, že prostory X a Y jsou izometricky izomorfní a píšeme $X = Y$ (izometricky izomorfní prostory mohou obsahovat různé prvky ale mají vždy stejnou strukturu). Lineární zobrazení často nazýváme lineárním operátorem a píšeme $Tx = T(x)$.

Definice 23. Řekneme, že lineární zobrazení $T : X \to Y$ je omezené, existuje-li konstanta $M > 0$ taková, že $\|Tx\| \leq M\|x\|\ \forall x \in X$.

Věta 20. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak buď T je spojité v každém bodě $x \in X$ nebo není spojité v žádném bodě $x \in X$. Lineární zobrazení $T : X \to Y$ je spojité právě tehdy, je-li omezené.

Důkaz:(a) Nechť $x_1, x_2 \in X$ a T je spojité v x_1. Pak ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\|y_1 - x_1\| < \delta \Rightarrow \|Ty_1 - Tx_1\| < \varepsilon$. Nechť $\|y_2 - x_2\| < \delta$. Označme $d = x_1 - x_2$ a $y_1 = y_2 + d$. Pak $\|y_1 - x_1\| = \|(y_2 + d) - (x_2 + d)\| < \delta$, takže $\|Ty_1 - Tx_1\| < \varepsilon$. Z linearity pak plyne $\|Ty_2 - Tx_2\| = \|T(y_1 - d) - T(x_1 - d)\| < \varepsilon$.

(b) Je-li zobrazení T omezené, je spojité v nule, neboť $\|Tx\| \leq M\|x\|$, takže $\|x\| \to 0 \Rightarrow \|Tx\| \to 0$ (využíváme toho, že $T(0) = 0$). Je-li naopak T spojité v nule, existuje $\delta > 0$ tak, že $\|Tx\| < 1$, pokud $\|x\| < \delta$. Nechť $y \in X$. Položme $x = (\delta/2)(y/\|y\|)$, takže $\|x\| = \delta/2 < \delta$. Pak platí $y = (2/\delta)\|y\|x$ a

$$\|Ty\| = (2/\delta)\|y\|Tx < (2/\delta)\|y\|$$

Položíme-li $M = (2/\delta)$, platí $\|Ty\| \leq M\|y\|\ \forall y \in X$.

Definice 24. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je omezené lineární zobrazení. Číslo

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

nazveme normou T.

Poznámka 11. Je to skutečně norma. Podmínky (a), (b) jsou zřejmé. Dále platí

$$\begin{aligned} \|T_1 + T_2\| &= \sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} (\|T_1x\| + \|T_2x\|) \leq \\ &= \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\| = \|T_1\| + \|T_2\| \end{aligned}$$

Věta 21. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak inverzní lineární zobrazení $T^{-1} : Y \to X$ existuje a je omezené právě tehdy, existuje-li konstanta $m > 0$ taková, že

$$\|Tx\| \geq m\|x\| \quad \forall x \in X \tag{$*$}$$

Důkaz: Jestliže platí $(*)$, pak z $Tx_2 = Tx_1$ plyne $x_2 = x_1$, neboť

$$\|x_2 - x_1\| \leq \frac{1}{m}\|T(x_2 - x_1)\| = \frac{1}{m}\|Tx_2 - Tx_1\| = 0$$

Zobrazení T^{-1} tedy existuje. Z $Tx = y$ plyne $x = T^{-1}y$, takže použitím $(*)$ dostaneme

$$\|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\| \quad \forall y \in Y$$

Zobrazení T^{-1} je tedy omezené. Existuje-li naopak T^{-1} a je-li omezené, musí existovat konstanta $M > 0$ taková, že

$$\|T^{-1}y\| \leq M\|y\| \quad \forall y \in Y$$

Z $T^{-1}y = x$ plyne $y = Tx$, takže platí $(*)$ s $m = 1/M$.

Věta 22. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory. Prostor $[X, Y]$ všech spojitých lineárních zobrazení $T : X \to Y$ s normou z definice 24 je lineárním normovaným prostorem. Je-li Y úplný je i $[X, Y]$ úplný.

Důkaz: To že $[X, Y]$ je lineárním normovaným prostorem plyne z poznámky 11. Předpokládejme, že prostor Y je úplný. Nechť posloupnost $\{T_n\} \in [X, Y]$ je cauchyovská a $\varepsilon > 0$ (libovolné). Pak existuje index $n_\varepsilon \in N$ takový, že $\|T_m - T_n\| < \varepsilon \ \forall m, n \geq n_\varepsilon$. Nechť $x \in X$. Pak

$$\|T_m x - T_n x\| \leq \|T_m - T_n\|\|x\| < \varepsilon\|x\|$$

$\forall m, n \geq n_\varepsilon$, takže posloupnost $\{T_n x\} \subset Y$ je také cauchyovská a protože prostor Y je úplný, má tato posloupnost limitu v Y. Definujme zobrazení $T : X \to Y$ předpisem

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \quad \forall x \in X$$

Zobrazení T je lineární (neboť limitní přechod zachovává lineární operace). Jelikož posloupnost $\{T_n\}$ je cauchyovská, je omezená, takže existuje konstanta M taková že $\|T_n\| \leq M \ \forall n \in N$. Pro libovolný prvek $x \in X$, tedy platí $\|T_n x\| \leq M\|x\|$ $\forall n \in N$, což pro $n \to \infty$ dává $\|Tx\| \leq M\|x\|$. Zobrazení T je tedy omezené, a podle věty 20 platí $T \in [X, Y]$. Ukážeme, že $T_n \to T$. Již jsme dokázali, že

$\|T_m x - T_n x\| < \varepsilon\|x\| \ \forall m, n \geq n_\varepsilon$, což pro $m \to \infty$ dává $\|Tx - T_n x\| \leq \varepsilon\|x\|$ a protože bod $x \in X$ je libovolný, dostaneme $\|T - T_n\| \leq \varepsilon$. Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo zvoleno libovolně, platí $\|T - T_n\| \to 0$, neboli $T_n \to T$.

Věta 23. (Banach, Steinhaus) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Nechť $\{T_\alpha\} \subset [X, Y]$ je množina spojitých lineárních zobrazení. Je-li množina $\{T_\alpha x\}$ omezená $\forall x \in X$, je i množina $\{\|T_\alpha\|\}$ omezená.

Věta 24. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\} \subset [X, Y]$ je posloupnost spojitých lineárních zobrazení taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x$ existuje $\forall x \in X$. Pak existuje spojité lineární zobrazení $T \subset [X, Y]$ takové, že $T_n x \to Tx \ \forall x \in X$.

Důkaz: Pro libovolné $x \in X$ je posloupnost $\{T_n x\}$ omezená, neboť je konvergentní. Podle Věty 23 je i množina $\{\|T_n\|\}$ omezená. Existuje tedy číslo $M > 0$ (které nezávisí na $n \in N$) takové, že

$$\|T_n x\| \leq \|T_n\| \, \|x\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X$$

Definujme zobrazení T tak, že

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x \quad \forall x \in X$$

Pak T je lineární (neboť limitní přechod zachovává lineární operace) a platí

$$\|Tx\| = \lim_{n\to\infty} \|T_n x\| \leq M\|x\|$$

takže T je omezené a tedy spojité.

Věta 25.(O otevřeném zobrazení) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení X na Y (t.j. $\mathcal{R}(T) = Y$). Pak T zobrazuje otevřenou množinu G na otevřenou množinu $T(G)$, kde

$$T(G) = \{y \in Y : y = Tx, \ x \in G\}$$

Věta 26. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je prosté spojité lineární zobrazení. Pak T^{-1} je spojité lineární zobrazení.

Důkaz: Je to bezprostřední důsledek Věty 25 a Věty 19.

Nechť X, Y jsou Banachovy prostory. Není-li podprostor $\mathcal{D}(T) \subset X$ (definiční obor) uzavřený v X, může se snadno stát, že lineární zobrazení T není spojité (je to ukázáno v příkladu 28). V tomto případě je vhodné závést pojem uzavřenosti zobrazení, který v jistém smyslu nahrazuje pojem spojitosti zobrazení.

Definice 25. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory, $\mathcal{D}(T) \subset X$ a $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ je lineární zobrazení. Jestliže množina $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$ je uzavřená v $X \times Y$, řekneme, že zobrazení T je uzavřené. Množina $\mathcal{G}(T)$, která je lineárním podprostorem $X \times Y$, se nazývá grafem zobrazení T.

Poznámka 12. Normu v $X \times Y$ můžeme zvolit libovolně. V dalším textu budeme předpokládat, že platí $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$.

Věta 27. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{R}(T)$ je prosté uzavřené lineární zobrazení. Pak $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ je prosté uzavřené lineární zobrazení.

Důkaz: Definičním oborem zobrazení T^{-1} je množina $\mathcal{R}(T)$. Jelikož

$$\mathcal{G}(T^{-1}) = \{(y, T^{-1}y), y \in \mathcal{R}(T)\} = \{(Tx, x), x \in \mathcal{D}(T)\}$$

a množina na pravé straně (která se liší od $\mathcal{G}(T)$ pouze pořadím prvků ve dvojici) je uzavřená, je i množina na levé straně uzavřená.

Příklad 28. Existují uzavřená lineární zobrazení, která nejsou spojitá. Definujme zobrazení $T : C^1[0,1] \to C[0,1]$ ($C^1[0,1] \subset C[0,1]$ je množina funkcí, které mají spojitou derivaci v $[0,1]$) předpisem $Tx = x'$ (derivace). Zřejmě T je lineární zobrazení. Je-li $x_n = t^n \; \forall n \in N$, platí $Tx_n = nt^{n-1} \; \forall n \in N$ a tudíž

$$\begin{aligned} \|x_n\| &= \max_{t \in [0,1]} (t^n) = 1 \\ \|Tx_n\| &= \max_{t \in [0,1]} (nt^{n-1}) = n \end{aligned}$$

$\forall n \in N$. Zobrazení T není omezené, neboť

$$\sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \sup_{n \in N} \|Tx_n\| = \sup_{n \in N} n = \infty$$

a není tedy spojité. Nechť $\{x_n\} \subset C^1[0,1]$ a $(x_n, x'_n) \to (x, x') \in C[0,1] \times C[0,1]$. Jelikož $\|(x_n, x'_n) - (x, x')\| = \|x_n - x\| + \|x'_n - x'\|$, znamená to, že $x_n \to x \in C[0,1]$ a $x'_n \to x' \in C[0,1]$. Jelikož prostor $C[0,1]$ je úplný a konvergence $x'_n \to x'$ je stejnoměrná na $[0,1]$, platí $x' \in C[0,1]$ (takže $x \in C^1[0,1]$) a $Tx = x'$. Čili

$$(x_n, Tx_n) \to (x, Tx) \in C^1[0,1] \times C[0,1]$$

Zobrazení T je tedy uzavřené.

Věta 28. Nechť X, Y jsou lineární normované prostory a $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ je lineární zobrazení s definičním oborem $\mathcal{D}(T) \subset X$. Je-li množina $\mathcal{D}(T)$ uzavřená (v X) a je-li zobrazení T spojité, je T uzavřené.

Důkaz: Předpokládejme, že množina $\mathcal{D}(T)$ je uzavřená a zobrazení T je spojité ale není uzavřené. Pak graf $\mathcal{G}(T) \subset X \times Y$ není uzavřený, takže množina $(X \times Y) \backslash \mathcal{G}(T)$ není otevřená. Existuje tedy dvojice $(x, y) \in (X \times Y) \backslash \mathcal{G}(T)$ taková, že $B((x, y), 1/n) \cap \mathcal{G}(T) \neq 0\ \forall n \in N$. To znamená, že existuje posloupnost $\{(x_n, Tx_n)\} \subset \mathcal{G}(T)$ taková, že $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$, neboli $x_n \to x$ a $Tx_n \to y$. Jelikož množina $\mathcal{D}(T)$ je uzavřená, platí $x \in \mathcal{D}(T)$, takže nutně $y \neq Tx$ (neboť $(x, y) \notin \mathcal{G}(T)$), což je ve sporu se spojitostí zobrazení T.

Věta 29. (O uzavřeném zobrazení) Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je uzavřené lineární zobrazení (s definičním oborem $\mathcal{D}(T) = X$). Pak T je spojité.

Důkaz: Kartézský součin $X \times Y$ s normou

$$\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$$

je Banachovým prostorem. Protože zobrazení T je uzavřené, je lineární podprostor $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}$ uzavřený v $X \times Y$, takže je to Banachův prostor. Definujme lineární zobrazení $P : \mathcal{G}(T) \to X$ předpisem

$$P(x, Tx) = x$$

Jelikož

$$\|x\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\|$$

je P spojité v 0 (a tedy spojité). Inverzní zobrazení existuje a je definováno předpisem

$$P^{-1}x = (x, Tx)$$

Podle Věty 26 je P^{-1} spojité, takže i T je spojité, neboť

$$\|Tx\| \leq \|x\| + \|Tx\| = \|(x, Tx)\| = \|L^{-1}x\| \leq \|L^{-1}\| \, \|x\|$$

Definice 26. Nechť X je lineární normovaný prostor. Lineární zobrazení $x^* : X \to R$ nazveme lineárním funkcionálem a píšeme

$$x^*(x) = \langle x^*, x \rangle$$

Prostor $[X, R]$ všech spojitých lineárních funkcionálů s normou z definice 24, nazveme duálním prostorem k prostoru X a označíme ho X^*.

Poznámka 13. V prostoru X^* jsou lineární operace definovány takto

$$
\begin{aligned}
\langle x^* + y^*, x\rangle &= \langle x^*, x\rangle + \langle y^*, x\rangle \\
\langle \lambda x^*, x\rangle &= \lambda\langle x^*, x\rangle
\end{aligned}
$$

$\forall x \in X$ a norma vztahem

$$\|x^*\| = \sup_{\|x\|=1} \langle x^*, x\rangle$$

Příklad 29. Nechť l_2 je prostor posloupností $x = \{\xi_n\} \subset R$ takových, že

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2} < \infty$$

Pak l_2^* je prostor posloupností $x^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ takových, že

$$\|x^*\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^*|^2} < \infty$$

(tedy $l_2^* = l_2$) a platí

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^* \xi_k$$

(je to důsledek věty 43). Podobně $L_2^*[a,b] = L_2[a,b]$ a

$$\langle x^*, x\rangle = \int_a^b x^*(t)x(t)dt$$

Příklad 30. Nechť l_p, kde $1 < p < \infty$, je prostor posloupností $x = \{\xi_n\} \subset R$ takových, že

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

Pak l_p^* je prostor posloupností $x^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ takových, že

$$\|x^*\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^*|^q\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

kde $(1/p) + (1/q) = 1$ (tedy $l_p^* = l_q$) a platí

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^* \xi_k$$

Podobně $L_p^*[a,b] = L_q[a,b]$ a

$$\langle x^*, x\rangle = \int_a^b x^*(t)x(t)dt$$

(přechod od $L_2[a,b]$ k $L_p[a,b]$ je stejný jako přechod od l_2 k l_p).

Příklad 31. Nechť l_1 je prostor posloupností $x = \{\xi_n\} \subset R$ takových, že

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k| < 0$$

Pak l_1^* je prostor posloupností $x^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ takových, že

$$\|x^*\| = \sup_{k\in N} \|\xi_k^*\|$$

(tedy $l_1^* = l_\infty$) a platí

$$\langle x^*, x\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^* \xi_k$$

Podobně $L_1^*[a,b] = L_\infty[a,b]$ a

$$\langle x^*, x\rangle = \int_a^b x^*(t)x(t)dt$$

Věta 30. Nechť X je lineární normovaný prostor. Je-li X^* separabilní, je i X separabilní.

Příklad 32. Neplatí $l_\infty^* = l_1$ (l_1 je separabilní ale l_∞ není separabilní). Označíme-li $c_0 \subset l_\infty$ podprostor posloupností $\{\xi_k\} \subset R$ takových, že

$$\lim_{k\to\infty} \xi_k = 0$$

Pak $c_0^* = l_1$.

Definice 27. Nechť X je Banachův prostor. Zobrazení $p : X \to R$ nazveme sublineárním funkcionálem, jestliže platí

$$\begin{aligned} p(x+y) &\leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in X \\ p(\lambda x) &= \lambda p(x) \quad \text{pokud} \quad \lambda \geq 0 \end{aligned}$$

Věta 31. (Hahn, Banach) Nechť X je lineární normovaný prostor, $V \subset X$ jeho vlastní lineární podprostor (t.j. $V \neq X$) a $p : X \to R$ sublineární funkcionál. Je-li $v^* \in V^*$ lineární funkcionál takový, že $\langle v^*, v \rangle \leq p(v)$ $\forall v \in V$, existuje lineární funkcionál $x^* \in X^*$ takový, že $\langle x^*, v \rangle = \langle v^*, v \rangle$ $\forall v \in V$ a $\langle x^*, x \rangle \leq p(x)$ $\forall x \in X$.

Důsledek 6. Nechť X je lineární normovaný prostor, $V \subset X$ jeho vlastní lineární podprostor. Je-li $v^* \in V^*$, existuje $x^* \in X^*$ takový, že $\langle x^*, v \rangle = \langle v^*, v \rangle$ $\forall v \in V$ a $\|x^*\| = \|v^*\|$ (využívá se toho, že funkcionál $p(x) = \|v^*\|\|x\|$ je sublineární).

Důsledek 7. Nechť X je lineární normovaný prostor a $x \in X$. Jestliže $\langle x^*, v \rangle = 0$ $\forall x^* \in X$ pak $x = 0$.

Definice 28. Nechť X je Banachův prostor a $X^{**} = (X^*)^*$ (prostor duální k duálnímu prostoru). Jestliže $X^{**} = X$ (prostory X^{**} a X jsou izometricky izomorfní), řekneme, že X je reflexivní.

Příklad 33. Prostory l_p a $L_p[a, b]$ jsou reflexivní pro $1 < p < \infty$ (viz příklad 29 a příklad 30). Prostory l_1 a $L_1[a, b]$ nejsou reflexivní (viz příklad 31 a větu 30). Prostory l_∞ a $L_\infty[a, b]$ nejsou reflexivní (viz příklad 32 a větu 32). Prostor $C[a, b]$ není reflexivní.

Věta 32. Nechť X je Banachův prostor. Je-li X reflexivní, je každý jeho uzavřený lineární podprostor reflexivní.

Věta 33. Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní právě tehdy, je-li X^* reflexivní.

Definice 29. Nechť X je lineární normovaný prostor, $\{x_n\} \subset X$ a $x \in X$. Jestliže

$$\langle x^*, x_n \rangle \to \langle x^*, x \rangle \quad \forall x^* \in X^*$$

řekneme, že posloupnost $\{x_n\} \subset X$ konverguje slabě k bodu $x \in X$ a píšeme $x_n \xrightarrow{w} x$.

Věta 34. Nechť X je lineární normovaný prostor a $\{x_n\} \subset X$. Jestliže $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.

Důkaz: Jestliže $x_n \to x$, pak $\|x_n - x\| \to 0$. Pro každý spojitý lineární funkcionál $x^* \in X$ existuje číslo $\|x^*\| < \infty$ tak, že

$$|\langle x^*, x_n - x \rangle| \leq \|x^*\| \, \|x_n - x\| \to 0$$

takže $(x_n - x) \xrightarrow{w} 0$, čili $(x_n) \xrightarrow{w} x$.

Poznámka 14. Slabou konvergenci lze definovat zavedením slabé topologie. Tento způsob není příliš názorný. Definice 29 je pro naše účely postačující.

Poznámka 15. Slabá konvergence je slabší než konvergence definovaná pomocí normy, neboť $x_n \xrightarrow{w} x$ obvykle neimplikuje $x_n \to x$. V konečněrozměrných prostorech však oba pojmy splývají.

Příklad 34. Uvažujme posloupnost $\{x_k\} \in l_2$ takovou, že

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & \{1,0,0,\ldots\} \\ x_2 & = & \{0,1,0,\ldots\} \\ x_3 & = & \{0,0,1,\ldots\} \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Jelikož $\|x_m - x_n\| = \sqrt{2}\ \forall m,n \in N$, není tato posloupnost cauchyovská a tudíž ani konvergentní. Zvolme libovolný spojitý lineární funkcionál $x^* \in l_2^*$. Pak $X^* = \{\xi_k^*\} \subset R$ a

$$\|x^*\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k^*|^2} < \infty$$

(viz příklad 29). Platí tedy $\xi_k^* \to 0$ a tedy $\langle x^*, x_k \rangle = \xi_k^* \to 0$. Jelikož to platí pro libovolný spojitý lineární funkcionál $x^* \in l_2^*$, je posloupnost $\{x_k\}$ slabě konvergentní.

Definice 30. Nechť X je Banachův prostor a nechť $K \subset X$. Jestliže každá posloupnost $\{x_n\} \subset K$ obsahuje podposloupnost, která je slabě konvergentní v K řekneme, že množina K je slabě kompaktní.

Věta 35. Nechť X je reflexivní Banachův prostor. Pak množina $K \subset X$ je slabě kompaktní právě tehdy je-li omezená a slabě uzavřená.

Poznámka 16. Množina $K \subset X$ je slabě uzavřená, jestliže z $\{x_n\} \subset K$ a $x_n \xrightarrow{w} x$ plyne $x \in K$. Každá slabě uzavřená množina je uzavřená.

Definice 31. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Jestliže pro každou omezenou posloupnost $\{x_n\} \subset X$ lze z posloupnosti obrazů $\{Tx_n\} \subset Y$ vybrat podposloupnost, která je konvergentní v Y, řekneme, že zobrazení T je kompaktní (nebo totálně spojité).

Věta 36. Kompaktní lineární zobrazení $T : X \to Y$ zobrazuje slabě konvergentní posloupnosti $\{x_n\} \subset X$ na konvergentní posloupnosti $\{Tx_n\} \subset Y$.

Poznámka 17. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Jestliže prostor Y je konečněrozměrný, pak zobrazení Tje kompaktní.

Věta 37. Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $\{T_n\} \subset [X, Y]$ je posloupnost kompaktních lineárních zobrazení. Jestliže $T_n \to T$, pak T je kompaktní.

Poznámka 18. Často, zejména v Hilbertových prostorech, je spojité lineární zobrazení T limitou posloupnosti konečněrozměrných spojitých lineárních zobrazení. Pak podle poznámky 17 a podle věty 37 je T kompaktní. Kompaktní lineární zobrazení jsou zobecněním konečněrozměrných spojitých lineárních zobrazení a jejich řada vlastností se na ně přenáší. Kompaktní lineární zobrazení mají velký význam ve spektrální teorii a v teorii integrálních rovnic.

4 Hilbertovy prostory

Vlastnosti Hilbertových prostorů jsou založeny na použití skalárního součinu, který zobrazuje $X \times X$ do tělesa skalárů vystupujícího v definici lineárního prostoru. Z hlediska aplikací je výhodné pracovat s tělesem komplexních čísel. Abychom formálně zjednodušili výklad, omezíme se na reálné Hilbertovy prostory, i když v části týkající se ortonormálních posloupností a Fourierových koeficientů jsou důkazy vedeny tak, že je lze použít i pro komplexní Hilbertovy prostory.

4.1 Základní pojmy

Definice 32. Nechť X je (reálný) lineární prostor a $(\cdot, \cdot) : X \times X \to R$ je funkce taková, že

(a) $(x, x) \geq 0$
$(x, x) = 0 \iff x = 0$

(b) $(x, y) = (y, x)$

(c) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$
$(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$

Pak řekneme, že $(X, (\cdot, \cdot))$ je reálným lineárním prostorem se skalárním součinem. Funkce $(\cdot, \cdot)$ se nazývá skalárním součinem.

Poznámka 19. V komplexním lineárním prostoru se skalární součin $(\cdot, \cdot) : X \times X \to C$ definuje tak, že podmínky (a), (c) zůstanou stejné a podmínka (b) se nahradí rovností

$$(x,y) = \overline{(y,x)}$$

(komplexně sdružené číslo). Zřejmě $(x,x) = \overline{(x,x)}$, takže (x,x) je reálné číslo a podmínka (a) má smysl.

Věta 38. Nechť X je lineární prostor se skalárním součinem. Pak X je lineárním normovaným prostorem s normou definovanou vztahem

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)}$$

Důkaz: Podmínky (a), (b) pro normu plynou bezprostředně z podmínek (a), (b) pro skalární součin. Abychom dokázali (c), dokážeme Schwartzovu nerovnost

$$|(x,y)| \leq \|x\|\,\|y\|$$

Jelikož $\forall x, y \in X$ a $\forall \lambda \in R$ platí

$$\begin{aligned} \|x+\lambda y\|^2 &= (x+\lambda y, x+\lambda y) = (x,x) + (x,\lambda y) + (\lambda y, x) + \lambda^2 (y,y) \\ &= \|x\|^2 + 2\lambda(x,y) + \lambda^2 \|y\|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

musí být diskriminant této nerovnosti nekladný, takže

$$(x,y)^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$$

což dává Schwartzovu nerovnost. Nyní

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

což dává trojúhelníkovou nerovnost.

Definice 33. Norma $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ se nazývá normou indukovanou skalárním součinem. Metrika $\rho(x,y) = \sqrt{(x-y, x-y)}$ se nazývá metrikou indukovanou skalárním součinem.

Věta 39. Skalární součin je spojitý v indukované metrice.

Důkaz: Platí

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= (x+y, x+y) = \|x\|^2 + 2(x,y) + \|y\|^2 \\ \|x-y\|^2 &= (x-y, x-y) = \|x\|^2 - 2(x,y) + \|y\|^2 \end{aligned}$$

takže

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

a spojitost skalárního součinu plyne ze spojitosti normy.

Věta 40. Norma indukovaná skalárním součinem splňuje rovnoběžníkovou rovnost

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

Splňuje-li nějaká norma rovnoběžníkovou rovnost, můžeme zavést skalární součin vztahem

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) \tag{$*$}$$

Důkaz: (a) Pro normu indukovanou skalárním součinem platí

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 &= (x + y)(x + y) + (x - y)(x - y) \\
&= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2(x, y) + \|y\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

(b) Ze vztahu ($*$) plynou bezprostředně podmínky (a), (b) pro skalární součin. Platí totiž $(x, x) = \|2x\|^2/4 = \|x\|^2$, takže $(x, x) \geq 0$ a $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Symetrie je zřejmá. Z rovnoběžníkové rovnosti plyne

$$\begin{aligned}
\|u + z + v\|^2 + \|u + z - v\|^2 &= 2\|u + z\|^2 + 2\|v\|^2 \\
\|u - z + v\|^2 + \|u - z - v\|^2 &= 2\|u - z\|^2 + 2\|v\|^2
\end{aligned}$$

což po odečtení dává

$$\left(\|u + z + v\|^2 - \|u - z + v\|^2\right) + \left(\|u + z - v\|^2 - \|u - z - v\|^2\right) = 2\|u + z\|^2 - 2\|u - z\|^2$$

neboli (podle ($*$) po vydělení číslem 4)

$$(u + v, z) + (u - v, z) = 2(u, z)$$

Položíme-li $v = u$, dostaneme

$$(2u, z) = 2(u, z)$$

Položíme-li $x = u + v$, $y = u - v$, a použijeme-li předchozí výsledek, dostaneme

$$(x,z)+(y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right)=(x+y,z)$$

což je vzorec pro součet. Přímo z $(*)$ plyne $(-x,y)=-(x,y)$. Nechť $m,n\in N$. Pak můžeme psát

$$(mx,y)=(\underbrace{x+x+\ldots x}_{m},y)=\underbrace{(x,y)+(x,y)+\ldots(x,y)}_{m}=m(x,y)$$

a

$$\left(n\frac{1}{n}x,y\right)=n\left(\frac{1}{n}x,y\right)$$

neboli

$$\left(\frac{1}{n}x,y\right)=\frac{1}{n}(x,y)$$

Pro libovolné $\lambda\in Q$ (racionální) tedy platí

$$(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$$

a protože funkce $(\cdot,y)$ je spojitá, platí to i pro libovolné $\lambda\in R$.

Definice 34. Hilbertovým prostorem nazveme lineární prostor se skalárním součinem, který je úplný v metrice indukované skalárním součinem.

Poznámka 20. Hilbertův prostor je Banachovým prostorem s normou indukovanou skalárním součinem.

Příklad 35. Prostor R^n se skalárním součinem

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$$

je Hilbertovým prostorem (viz příklad 2).

Příklad 36. Prostor l_2 se skalárním součinem

$$(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}x_ky_k$$

je Hilbertovým prostorem. Jelikož $\forall n\in N$ platí

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} y_k^2}$$

(Schwartzova nerovnost) dostaneme v limitě

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} y_k^2} < \infty$$

takže skalární součin je definován $\forall x, y \in l_2$. Ověření podmínek (a)-(c) je triviální. Norma

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$$

indukovaná skalárním součinem splývá se standardní normou v l_2 (příklad 27), takže l_2 je úplný. Stejným způsobem lze ukázat, že prostor $L_2[a, b]$ se skalárním součinem

$$(x, y) = \int_a^b x(t)y(t)dt$$

je Hilbertovým prostorem.

Příklad 37. Prostor $C[a, b]$ není Hilberovým prostorem. Uvažujeme pro jednoduchost prostor $C[0, 1]$. Položme $x = t^2$ a $y = t$. Pak

$$\begin{aligned}
\|x\| &= \max_{t\in[0,1]} |t^2| = 1 \\
\|y\| &= \max_{t\in[0,1]} |t| = 1 \\
\|x + y\| &= \max_{t\in[0,1]} |t(t + 1)| = 2 \\
\|x - y\| &= \max_{t\in[0,1]} |t(t - 1)| > 0
\end{aligned}$$

Odtud

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 > 4 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

takže neplatí rovnoběžníková rovnost. Podobným způsobem lze ukázat, že prostory l_∞ a $L_\infty[a, b]$ nejsou Hibretovými prostory. Dokonce ani prostory l_p a $L_p[a, b]$ nejsou Hilbertovými prostory pro $l \neq 2$.

Poznámka 21. V příkladu 37 jsme ukázali, že v poměrně málo klasických Banachových prostorech lze zavést skalární součin. Na druhé straně jsou Hilbertovy prostory přímým zobecněním konečněrozměrných Eukleidovských prostorů a mají řadu výhodných vlastností, které opodstatňují jejich zavedení.

Věta 41. Nechť X je Hilbertův prostor, $V \subset X$ je jeho uzavřený lineární podprostor a $x \in X$. Pak existuje právě jeden prvek $v \in V$ takový, že

$$\|x - v\| = \inf_{y \in V} \|x - y\| = \rho(x, V)$$

Důkaz: Z definice infima plyne, že existuje posloupnost $\{v_n\} \subset V$ taková, že

$$\lim_{n \to \infty} \|x - v_n\| = \rho(x, V)$$

Z rovnoběžníkové rovnosti plyne

$$\begin{aligned}
\|v_m - v_n\|^2 &= \|(x - v_n) - (x - v_m)\|^2 = \\
&= 2\|x - v_n\|^2 + 2\|x - v_m\|^2 - \|(x - v_n) + (x - v_m)\|^2 = \\
&= 2\|(x - v_n)\|^2 + 2\|(x - v_m)\|^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\|^2
\end{aligned}$$

$\forall m, n \in N$ a jelikož $\|x - v_m\| \to \rho(x, V)$, $\|x - v_n\| \to \rho(x, V)$ a

$$\rho(x, V) \leq \left\|x - \frac{1}{2}(v_m + v_n)\right\| \leq \frac{1}{2}\|x - v_m\| + \frac{1}{2}\|x - v_n\| \to \rho(x, V)$$

platí

$$\|v_m - v_n\|^2 \to 4\rho(x, V) - 4\rho(x, V) = 0$$

takže posloupnost $\{v_n\} \subset V$ je Cauchyovská. Protože prostor X je úplný a V je jeho uzavřený podprostor, platí $v_n \to v \in V$. Ze spojitosti normy pak plyne

$$\rho(x, V) = \lim_{n \to \infty} \|x - v_n\| = \|x - v\|$$

Definice 35. Nechť X je Hilbertův prostor a nechť $x, y \in X$. Jestliže $(x, y) = 0$, řekneme, že prvky $x, y \in X$ jsou ortogonální.

Definice 36. Nechť X je Hilbertův prostor a $V \subset X$ je jeho lineární podprostor. Pak lineární podprostor

$$V^{\perp} = \{w \in X : (w, v) = 0 \ \ \forall v \in V\}$$

nazveme ortogonálním doplňkem V.

Věta 42. Nechť X je Hilbertův prostor, $V \subset X$ je jeho uzavřený lineární podprostor a $x \in X$. Pak existuje právě jedna dvojice $v \in V$ a $w \in V^{\perp}$ taková, že $x = v + w$.

Důkaz: (a) (Existence) Nechť $x \in X$. Nechť $v \in V$ je prvek takový, že$\|x - v\| = \rho(x, V)$. Pak $v + \lambda y \in V$ a $v - \lambda y \in V$ $\forall y \in V$ a $\forall \lambda > 0$, takže platí

$$\begin{aligned}
\|x - v\|^2 &\leq \|x - v + \lambda y\|^2 = \|x - v\|^2 + 2\lambda(x - v, y) + \lambda^2\|y\|^2 \\
\|x - v\|^2 &\leq \|x - v - \lambda y\|^2 = \|x - v\|^2 - 2\lambda(x - v, y) + \lambda^2\|y\|^2
\end{aligned}$$

neboli

$$2|(x - v, y)| \leq \lambda\|y\|^2$$

což v limitě pro $\lambda \to 0$ dává $(x - v, y) = 0$. Položíme-li $w = x - v$ lze psát $x = v + w$ a platí $(w, y) = 0$ $\forall y \in V$, neboli $w \in V^{\perp}$.
(b) Abychom dokázali jednoznačnost, budeme předpokládat, že $x = v_1 + w_1$ a $x = v_2 + w_2$, kde $v_1, v_2 \in V$ a $w_1, w_2 \in V^{\perp}$. Pak

$$v_1 + w_1 - v_2 - w_2 = x - x = 0 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_2 - w_1$$

Ale $v_1 - v_2 \in V$ a $w_2 - w_1 \in V^{\perp}$, takže

$$(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = (v_1 - v_2, w_2 - w_1) = 0$$

neboli $v_1 = v_2$ a $w_1 = x - v_1 = x - v_2 = w_2$.

Důsledek 8. Nechť X je Hilbertův prostor a $V \subset X$ je jeho uzavřený lineární podprostor. Pak $V \neq X \Rightarrow V^{\perp} \neq 0$ (existuje $w \in X \backslash V$ tak, že $(w, v) = 0$ $\forall v \in V$).

Věta 43. (Riesz) Nechť X je Hilbertův prostor a $x^* \in X^*$ je spojitý lineární funkcionál na X. Pak existuje právě jeden prvek $x \in X$ takový, že

$$\langle x^*, y\rangle = (x, y) \quad \forall y \in X$$

a $\|x^*\| = \|x\|$.

Důkaz: (a) (Existence) Označme

$$V = \{y \in X : \langle x^*, y\rangle = 0\} \subset X$$

nulový podprostor lineárního funkcionálu $x^* \in X^*$. Snadno se dokáže, že V je uzavřený lineární podprostor X. Jestliže $V = X$, pak $\langle x^*, y\rangle = 0$ $\forall y \in X$ a lze položit $x = 0$. Jestliže $V \neq X$, existuje podle důsledku 8 nenulový prvek $w \in V^\perp$. Zřejmě $\langle x^*, w\rangle \neq 0$ a

$$y - \frac{\langle x^*, y\rangle}{\langle x^*, w\rangle} w \in V \quad \forall y \in X$$

takže

$$\left(w, y - \frac{\langle x^*, y\rangle}{\langle x^*, w\rangle} w\right) = 0 \quad \forall y \in X$$

neboli

$$(w, y) = \langle x^*, y\rangle \frac{(w, w)}{\langle x^*, w\rangle}$$

Položíme-li

$$x = \frac{\langle x^*, w\rangle}{(w, w)} w$$

máme $(x, y) = \langle x^*, y\rangle$ $\forall y \in X$.

(b) (Jednoznačnost) Nechť $x_1, x_2 \in X$ jsou dva prvky takové, že $(x_1, y) = (x_2, y) = \langle x^*, y\rangle$ $\forall y \in X$. Pak pro $y = x_1 - x_2$ platí

$$\begin{aligned} \|x_1 - x_2\|^2 &= (x_1 - x_2, x_1 - x_2) = (x_1, x_1 - x_2) - (x_2, x_1 - x_2) = \\ &= \langle x^*, x_1 - x_2\rangle - \langle x^*, x_1 - x_2\rangle = 0 \end{aligned}$$

(c) (Norma) Platí

$$\|x^*\| = \sup_{\|y\|=1} |\langle x^*, y\rangle| = \sup_{\|y\|=1} |(x, y)| \leq \sup_{\|y\|=1} \|x\|\,\|y\| = \|x\|$$

z druhé strany dostaneme

$$\|x\|^2 = (x, x) = \langle x^*, x\rangle \leq \|x^*\|\,\|x\|$$

což dohromady dává $\|x^*\| = \|x\|$.

Důsledek 9. Každý Hilbertův prostor je reflexivní (podle Věty 43 platí $X = X^* = X^{**}$).

4.2 Ortonormální báze

Definice 37. Nechť X je Hilbertův prostor a nechť $M \subset X$ je množina prvků takových, že

$$\begin{array}{lll} x, y \in M & \text{a} & x = y \Leftrightarrow (x, y) = 1 \\ x, y \in M & \text{a} & x \neq y \Leftrightarrow (x, y) = 0 \end{array}$$

Pak řekneme, že množina $M \subset X$ je ortonormální. Jestliže navíc z $x \in X \backslash M$ a $(x, y) = 0\ \forall y \in M$ plyne $x = 0$ (t.j. jestliže neexistuje nenulový prvek $x \in X \backslash M$ ortogonální ke všem prvkům množiny M) řekneme, že ortonormální množina M je úplná v X.

Příklad 38. V prostoru l_2 je množina

$$\begin{array}{rcl} e_1 & = & \{1, 0, 0, \ldots\} \\ e_2 & = & \{0, 1, 0, \ldots\} \\ e_3 & = & \{0, 0, 1, \ldots\} \\ \ldots & & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

ortonormální a úplná. Pro každou nenulovou posloupnost $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \subset R$ existuje $k \in N$ tak, že $x_k \neq 0$ a z definice skalárního součinu v l_2 (příklad 34), plyne $(e_k, x) = x_k \neq 0$.

Věta 44. Nechť X je Hilbertův prostor a $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X. Pak platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 \leq \|x\|^2 \tag{$*$}$$

Důkaz: Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální, platí

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\|^2 &= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right) + \left(\sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n, x \right) + \\ &+ \sum_{n=1}^{m} (x, x_n)(x_n, 0) = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$\forall n \in N$. Limitním přechodem pro $m \to \infty$ dostaneme $(*)$.

Poznámka 22. Nerovnost $(*)$ se nazývá Besselovou nerovností. Čísla (x, x_n) se nazývají Fourierovými koeficienty prvku $x \in X$ (vzhledem k ortonormální posloupnosti $\{x_n\} \subset X$).

Věta 45. Nechť X je Hilbertův prostor, $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X a $\{\alpha_n\} \subset R$ je posloupnost sklalárů. Pak pro libovolné $m \in N$ platí

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \geq \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\|$$

Důkaz: Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální, platí

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\|^2 &= \|x\|^2 - \left(x, \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right) - \left(\sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n, x \right) + \sum_{n=1}^{m} |\alpha_n|^2 \\ &= \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n) - \alpha_n|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2 \\ &\geq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2 = \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\|^2 \end{aligned}$$

(poslední rovnost je odvozena v Důkaz:u Věty 42).

Poznámka 23. Věta 45 demonstruje minimalizační vlastnost Fourierových koeficientů. Je-li $\{x_1, \ldots, x_m\}$ konečná ortonormální množina a V lineární obal této množiny, pak prvek $x \in X$ je na V nejlépe aproximován prvkem

$$v = \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n$$

Věta 46. Nechť X je Hilbertův prostor, $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální posloupnost v X a $\{\alpha_n\} \subset R$ je posloupnost sklalárů. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

konverguje právě tehdy, jestliže

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 < \infty \qquad (*)$$

V tomto případě

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2}$$

Důkaz: Označme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k x_k$$

Jelikož posloupnost $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální, platí

$$\|s_m - s_n\|^2 = \left\|\sum_{\alpha=n}^{m}\alpha_k x_k\right\|^2 = \left(\sum_{k=n}^{m}\alpha_k x_k, \sum_{k=n}^{m}\alpha_k x_k\right) = \sum_{k=n}^{m}|\alpha_k|^2$$

takže posloupnost $\{s_n\}$ je Cauchyovská (a protože X je úplný je zároveň konvergentní) právě tehdy, platí-li $(*)$. Zbytek důkazu je zřejmý

Definice 38. Nechť X je Hilbertův prostor, $M \subset X$ je ortonormální množina a $\mathcal{L}(M)$ je lineární obal množiny M (množina všech lineárních kombinací prvků množiny M). Jestliže $\overline{\mathcal{L}(M)} = X$, řekneme, že M je ortonormální báze v X.

Věta 47. V každém Hilbertově prostoru existuje ortonormální báze.

Věta 48. V separabilním Hilbertově prostoru existuje spočetná ortonormální báze.

Důkaz: Předpokládejme, že $M \subset X$ je nespočetná ortonormální báze. Jelikož pro $\forall x, y \in M$ platí

$$\rho^2(x,y) = (x-y, x-y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 2$$

existuje nespočetný systém disjunktních otevřených koulí $B\left(x, \sqrt{2}/2\right) \subset X$, $x \in M$. Pro libovolnou spočetnou množinu $\{x_n\} \subset X$ pak musí existovat prvek $x \in X$ takový, že $\{x_n\} \cap B\left(x, \sqrt{2}/2\right) = \emptyset$. Množina $\{x_n\} \subset X$ tedy není hustá v X.

Věta 49. Nechť X je separabilní Hilbertův prostor a $\{x_n\} \subset X$ je spočetná ortonormální množina. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(a) $\{x_n\} \subset X$ je úplná v X.

(b) $\{x_n\} \subset X$ je ortonormální báze v X.

(c) Pro libovolný prvek $x \in X$ platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, x_n)|^2 = \|x\|^2 \tag{$*$}$$

Důkaz: (a) $\Rightarrow$ (b): Předpokládejme, že (b) neplatí. Pak podle Důsledku 8 existuje nenulový prvek $x \in X \backslash \{x_n\}$ takový, že $(x, x_n) = 0$ $\forall n \in N$, což je ve sporu s (a).
(b) $\Rightarrow$ (c): Platí-li (b), existuje posloupnost $\{\alpha_n\} \subset R$, taková, že

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$$

Použijeme-li větu 45 a rovnost z důkazu věty 44 dostaneme

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{m} \alpha_n x_n \right\| \geq \left\| x - \sum_{n=1}^{m} (x, x_n) x_n \right\| = \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2$$

což v limitě pro $m \to \infty$ dává

$$0 \geq \|x\|^2 - \sum_{n=1}^{m} |(x, x_n)|^2$$

Použijeme-li Besselovu nerovnost (věta 42) dostaneme ($*$).
(c) $\Rightarrow$ (a): Předpokládejme, že (a) neplatí. Pak existuje nenulový prvek $x \in X \backslash \{x_n\}$ takový, že $(x, x_n) = 0$ $\forall n \in N$. Podle ($*$) však platí $\|x\| = 0$, což je spor.

Poznámka 24. Rovnost ($*$) se nazývá Parsevalova rovnost.

Věta 50. Každé dva separabilní Hilbertovy prostory jsou izometricky izomorfní.

Důkaz: Jsou-li X, Y dva separabilní Hilbertovy prostory, existují spočetné ortonormální báze $\{x_n\} \subset X$, $\{y_n\} \subset Y$ a pro $x \in X$, $y \in Y$ platí

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n, \quad \alpha_n = (x, x_n) \ \ \forall n \in N \\ y &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n y_n, \quad \beta_n = (y, y_n) \ \ \forall n \in N \end{aligned}$$

Definujeme zobrazení $I : X \to Y$ tak, že

$$y = Ix \ \Leftrightarrow \ \alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in N$$

Toto zobrazení je zřejmě lineární, prosté a zobrazuje X na Y. Protože

$$\|Ix\| = \|y\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\beta_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^2 = \|x\|$$

je I izometrické.

Důsledek 10. Pro libovolný separabilní Hilbertův prostor X platí $X = l_2$.

Důsledek 11. Hilbertův prostor je separabilní právě tehdy, existuje-li v něm spočetná ortonormální báze. První část tohoto tvrzení udává věta 46. Druhá část plyne z toho, že existence spočetné ortonormální báze dovoluje sestrojit izometrické zobrazení tohoto prostoru na l_2 (důkaz věty 50), který je separabilní.

5 Parciální diferenciální rovnice (PDE)

5.1 Základní pojmy

Parciální diferenciální rovnice jsou rovnicemi, ve kterých vystupují parciální derivace funkcí více proměnných. Většina fyzikálních zákonů je popsána parciálními diferenciálními rovnicemi a jejich řešení je hlavní úlohou v řadě technických aplikací.

Příklad 39. Nechť Ω je oblast v R^3 (otevřená souvislá množina) a Ω' je její hranice. Hledáme funkci $u : R^3 \to R$ takovou, že

$$\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} = f(x) \quad \forall x \in \Omega$$

a

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega'$$

(Poissonova rovnice pro potenciál).

Příklad 40. Nechť Ω je oblast v R^3 a Ω' je její hranice. Hledáme funkci $u : R^3 \times R \to R$ ($u = u(x,t)$) takovou, že

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0,T]$$

a

$$\begin{aligned} u(x,0) &= v(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u(x,t) &= g(x,t) \qquad \forall x \in \Omega', \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

(Rovnice difuze nebo vedení tepla).

Příklad 41. Nechť Ω je oblast v R^3 a Ω' je její hranice. Hledáme funkci u : $R^3 \times R \to R$ ($u = u(x,t)$) takovou, že

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall t \in [0,T]$$

a

$$\begin{aligned} u(x,0) &= v(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= w(x) \qquad \forall x \in \Omega \\ u(x,t) &= g(x,t) \qquad \forall x \in \Omega', \quad \forall t \in [0,T] \end{aligned}$$

(Vlnová rovnice, rovnice kmitání).

Definice 39. Nechť Ω je oblast v R^3 s hranicí Ω'. Nechť $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $c(x)$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$) jsou funkce spojité v Ω (tedy prvky z $C(\Omega)$). Symbol

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i} + c$$

nazveme lineárním diferenciálním operátorem 2. řádu na Ω.

Poznámka 25. Diferenciální operátor L je lineárním zobrazením $L : C^2(\Omega) \to C(\Omega)$ ($C^k(\Omega)$ je prostor funkcí, které mají spojité k-té parciální derivace na Ω. Zřejmě $C^2(\Omega) \subset C(\Omega)$.

Definice 40. (Klasifikace) Nechť Ω je oblast v R^n a L je lineární diferenciální operátor 2. řádu na Ω. Označme

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x), & \dots, & a_{1n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(x), & \dots, & a_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

(a) Jsou-li všechna vlastní čísla matice $A(x)$ nenulová a mají-li stejná znaménka, řekneme, že operátor L je eliptický v bodě x. Platí-li to $\forall x \in \Omega$, řekneme, že operátor L je eliptický v Ω

(b) Jsou-li všechna vlastní čísla matice $A(x)$ nenulová a jedno z nich má opačné znaménko než všechna ostatní, řekneme, že operátor L je hyperbolický v bodě x. Platí-li to $\forall x \in \Omega$, řekneme, že operátor L je hyperbolický v Ω.

(c) Je-li jedno vlastní číslo matice $A(x)$ nulové a ostatní jsou nenulová a mají stejná znaménka, řekneme, že operátor L je parabolický v v bodě x. Platí-li to $\forall x \in \Omega$, řekneme, že operátor L je parabolický v Ω.

Příklad 42. Matice operátoru z příkladu 39 má tvar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

takže tento operátor je eliptický. Matice operátoru z příkladu 40 má tvar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

takže tento operátor je parabolický. Matice operátoru z příkladu 41 má tvar

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

takže tento operátor je hyperbolický.

Poznámka 26. Tyto tři typy lineárních operátorů 2. řádu (lineárních PDE 2. řádu) se nejčastěji vyskytují v technických aplikacích. Ač vypadají velmi podobně, liší podstatně

(a) z hlediska teorie

(b) z hlediska aplikací

(c) z hlediska numerického řešení

5.2 Eliptické (stacionární) PDE

Pro zjednodušení úvah budeme uvažovat pouze eliptické operátory tvaru

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) + qu$$

kde $p \in C^1(\Omega)$, $p(x) > 0\ \forall x \in \Omega$ a $q \in C(\Omega)$, $q(x) \geq 0\ \forall x \in \Omega$. Matice A je v tomto případě diagonální a platí

$$\begin{aligned} a_{ii} &= p, \quad 1 \leq i \leq n \\ b_i &= \frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Definice 41. Nechť Ω je oblast v R^n, $p \in C^1(\Omega)$ a $q \in C(\Omega)$. Funkci $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ pro kterou platí

$$Lu(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega \tag{$*$}$$

a

$$u(x) = g(x) \quad \forall x \in \Omega'$$

nazveme klasickým řešením úlohy $(*)$.

Poznámka 27. Klasické řešení PDE nemusí existovat. Předpoklad $u \in C^2(\Omega)$ je příliš silný. Proto se zavádí pojem slabého řešení.

Definice 42. Funkci $v : \Omega \to R$, která má spojité parciální derivace libovolného řádu a která je rovna nule v jistém okolí Ω' nazveme testovací funkcí. Prostor testovacích funkcí označíme $C_0^\infty(\Omega)$. Platí

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^\infty(\Omega) \subset C^k(\Omega) \subset C(\Omega)\,.$$

Poznámka 28. Předpokládejme, že $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ je klasické řešení úlohy $(*)$. Vynásobíme-li rovnici $Lu = f$ testovací funkcí $v \in C_0^\infty(\Omega)$ a integrujeme-li přes Ω, dostaneme podle Greenovy formule

$$\int_\Omega \left(quv + p \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega$$

Proto můžeme na řešení úlohy $(*)$ nahlížet jako na funkci splňující tuto integrální identitu $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definice 43. Nechť $u \in L_2(\Omega)$. Funkci $\partial u/\partial x_i$ definovanou skoro všude na Ω nazveme zobecněnou derivací funkce u podle x_i, jestliže pro každou testovací funkci $v \in C_0^\infty(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega = 0$$

Poznámka 29. Existuje-li klasická derivace, platí podle Gaussovy-Ostrogradského věty

$$\int_\Omega \frac{\partial (uv)}{\partial x_i} = \int_{\Omega'} uvn_i dS$$

kde $n = (n_1, \ldots, n_n)$ je jednotkový vektor vnější normály. Derivováním součinu a využitím toho, že $v = 0$ na Ω', dostaneme

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v + \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

což je vztah z definice 43. Klasická derivace, pokud existuje, je i zobecněnou derivací. Definice 43 však dovoluje zavést zobecněnou derivaci, i když klasická derivace neexistuje.

Definice 44. Prostor $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ funkcí z $L_2(\Omega)$ jejichž zobecněné derivace $\partial u/\partial x_1, \ldots \partial u/\partial x_n$ patří opět do $L_2(\Omega)$ a kde norma je dána předpisem

$$\|u\| = \sqrt{\int_\Omega \left(u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right) d\Omega}$$

nazveme Sobolevovým prostorem. Sobolevův prostor je Banachovým prostorem (je úplný, lineární operace jsou definovány jako v $L_2(\Omega)$). Symbolem $\tilde{W}_2^1(\Omega) \subset W_2^1(\Omega)$ nazveme podmnožinu funkcí v $W_2^1(\Omega)$, které lze dodefinovat tak, aby se rovnaly nule na Ω'. Zřejmě $C_0^\infty(\Omega) \subset \tilde{W}_2^1(\Omega)$.

Definice 45. Nechť $f \in L_2(\Omega)$ a $g \in W_2^1(\Omega)$. Řekneme, že funkce $u \in W_2^1(\Omega)$ je slabým řešením úlohy $(*)$, jestliže platí

(a) $u - g \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$

(b) pro každou funkci $v \in \tilde{W}_2^1(\Omega)$ platí

$$\int_\Omega \left(quv + p \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_\Omega fv d\Omega$$