Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

VARIAČNÍ NEROVNICE

Úvod do teorie a užití na okrajové úlohy pro PDR

Milan Kučera

Úvod

Tento text vznikl na základě poznámek k mé semestrální přednášce o variačních nerovnicích na FAV ZČU v Plzni v jarním semestru 1996. Obsahuje skutečně pouhý úvod do této problematiky. Mým cílem bylo především seznámit čtenáře s tím, jak se k pojmu variační nerovnice dojde, jak lze ve tvaru variační nerovnice formulovat ve slabém smyslu některé základní typy okrajových úloh pro obyčejné i parciální diferenciální rovnice s jednostrannými podmínkami a jaké základní metody lze použít. V každé z prvních čtyř kapitol je podán důkaz existence a jednoznačnosti řešení pro jistou třídu variačních nerovnic a teorie je doplněna příkladem. Metody důkazu existence ve všech případech jsou zároveň teoretickým podkladem k numerickému přístupu, ale tyto otázky zde již rozebírány nejsou. Poslední kapitola je věnována dalším příkladům.

Příklady jsou psány nezávisle na teorii. Po jejich prostudování (i s vynecháním teorie) by čtenář měl získat mj. jasnou představu o pojmu slabého řešení okrajové úlohy a jeho souvislosti s variačními nerovnicemi, speciálně ovšem s lineárními i nelineárními rovnicemi. V každém příkladu je vždy ukázáno, jak daná volba prostoru a konvexní množiny zajistí, že variační nerovnice je slabou formulací nějaké okrajové úlohy. Ve všech příkladech týkajících se parciálních rovnic je to uděláno bez podrobného zkoumání, zda užité úvahy jsou korektní. V kap. 1 jsou však vysvětleny i všechny technické detaily (např. zavedení normálové derivace ve smyslu funkcionálu) nutné k tomu, aby se zcela seriozně ukázalo, v jakém smyslu slabé řešení skutečně splňuje okrajovou úlohu. Šlo mi o to, aby se čtenář po prostudování příkladů (případně i bez studia vět o existenci řešení) naučil k dané okrajové úloze nalézt správný prostor a konvexní množinu odpovídající slabému řešení.

V textu se zkoumají pouze úlohy eliptického typu. Pro případ příslušných evolučních úloh je čtenář odkázán na [2] nebo [7]. Pro hlubší studium problematiky variačních nerovnic doporučuji knihy [3], [5], [9], [10].

Praha, Plzeň, prosinec 2006 — Milan Kučera

Obsah

Seznam značení

- $\mathbb{R}^N$ – reálný eukleidovský prostor dimenze N
- $\mathbb{V}$ – reálný Banachův prostor s normou $\|\cdot\|$ (pokud nebude uvedeno něco jiného)
- $\mathbb{V}^*$ – duální prostor k prostoru $\mathbb{V}$ s normou $\|\cdot\|_*$
- $\|\cdot\|_X$ – norma na prostoru X
- $\mathcal{D}(\Omega)$ – množina funkcí nekonečně-diferencovatelných na Ω, které mají kompaktní nosič uvnitř Ω
- $C(\overline{\Omega})$ – prostor funkcí spojitých na $\overline{\Omega}$
- $C^k(\overline{\Omega})$ – prostor funkcí majících derivace do řádu k spojité na Ω a spojitě prodlužitelné na $\overline{\Omega}$
- $L_p(\Omega)$ – Lebesgueův prostor funkcí integrovatelných s p-tou mocninou
- $W_p^k(\Omega)$ – Sobolevův prostor funkcí majících zobecněné derivace do řádu k integrovatelné s p-tou mocninou
- $\rightarrow$ – silná konvergence
- $\rightharpoonup$ – slabá konvergence
- $\nabla u = \left[\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right]$ – gradient funkce u

1 Motivace, variační přístup

Motivace

Pro nejjednodušší představu uvažujme nejdříve reálnou funkci $\Phi \colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ N proměnných. Označme $\delta\Phi(u;h)$ (pro $u, h \in \mathbb{R}^N$) její derivaci v boẹ̌ u ve směru h, tj.

$$\delta\Phi(u;h) := \lim_{t \to 0} \frac{\Phi(u+th) - \Phi(u)}{t}, \tag{1.1}$$

pokud tato limita existuje. Pokud funkce Φ nabývá svého minima na $\mathbb{R}^N$ v bodě u, tj. $\Phi(u) = \min_{v \in \mathbb{R}^N} \Phi(v)$, a je přitom diferencovatelná v bodě u, pak zřejmě $\delta\Phi(u;v) = 0$ pro všechna $v \in \mathbb{R}^N$.

Pokud Φ nabývá v bodě u svého minima jenom na nějaké konvexní uzavřené množině $K \subset \mathbb{R}^N$, tj.

$$u \in K, \quad \Phi(u) = \min_{v \in K} \Phi(v), \tag{1.2}$$

přičemž Φ je opět diferencovatelná v u, pak pouze

$$u \in K, \quad \delta\Phi(u; v-u) \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K. \tag{1.3}$$

Totiž Φ je neklesající ve směrech $v-u$ jdoucích do K, ale může klesat ve směrech ven z K. Uvědomme si, že konvexnost množiny K je zde podstatná, protože pro nekonvexní množinu K úsečka spojující $v, u \in K$ nemusí ležet v K a tedy Φ může i v takovém směru $v-u$ v okolí bodu u klesat.

Úloha nalezení bodu u splňujícího (1.3) je nejjednodušší formou variační nerovnice. Níže uvidíme, že má smysl stejnou úlohu zkoumat pro případ funkcionálů na nekonečně-rozměrných prostorech. Ukážeme obecné souvislosti mezi řešením variační nerovnice a bodem u, ve kterém funkcionál nabývá svého minima na množině K. Uvidíme, že jakožto variační nerovnici lze vhodnou volbou prostoru, množiny K a funkcionálu formulovat řadu okrajových úloh, mj. úlohy s volnou hranicí nebo úlohy s jednostrannými okrajovými podmínkami. Není přitom nutné pracovat s derivací funkcionálu, lze místo ní uvažovat i obecný operátor. V tom případě ovšem už nejde o úlohu variačního charakteru a k jejímu řešení je nutno užít jiné přístupy, nežli variační počet.

Obecná formulace

V dalším bude vždy $\mathbb{V}$ reálný Banachův prostor s normou $\|\cdot\|$, $\mathbb{V}^*$ bude značit jeho duální prostor, tj. prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na $\mathbb{V}$, $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ bude (nelineární) funkcionál na $\mathbb{V}$. Dualitu mezi $\mathbb{V}$ a $\mathbb{V}^*$ budeme značit $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tj. $\langle \varphi, v \rangle (= \varphi(v))$ bude hodnota lineárního funkcionálu $\varphi \in \mathbb{V}^*$ v bodě $v \in \mathbb{V}$.

Derivaci $\delta\Phi(u;h)$ funkcionálu Φ v bodě u ve směru h (nyní pro $u, h \in \mathbb{V}$) definujeme vzorcem (1.1) (pokud tato limita existuje) jako v případě reálné funkce zmíněné výše.

Definice 1.1. Pokud $\delta\Phi(u;h)$ existuje pro každé $h \in \mathbb{V}$ a přitom zobrazení $\Phi'(u) \colon h \to \delta\Phi(u;h)$ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{V}$, pak řekneme, že Φ má v bodě u diferenciál Gâteaux $\Phi'(u)$. Budeme říkat, že Φ je G-diferencovatelný (diferencovatelný ve smyslu Gâteaux) v bodě u resp. na nějaké podmnožině $K \subset \mathbb{V}$, jestliže Φ má diferenciál Gâteaux v bodě u resp. v každém bodě $u \in K$.

Pokud funkcionál Φ je G-diferencovatelný v bodě u, pak tedy pro pevné $u \in \mathbb{V}$ je $\Phi'(u) \in \mathbb{V}^*$ a platí $\langle \Phi'(u), h \rangle = \delta\Phi(u; h)$. Pokud Φ nabývá v bodě $u \in K$ svého minima na nějaké konvexní uzavřené množině $K \subset \mathbb{V}$, tj.

$$u \in K, \quad \Phi(u) = \min_{v \in K} \Phi(v), \tag{1.4}$$

pak stejně jako výše pro funkci více proměnných dostáváme

$$u \in K, \quad \langle \Phi'(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K. \tag{1.5}$$

K tomu, aby nějaký funkcionál Φ byl G-diferencovatelný v bodě u, je především nutné, aby byl definován na okolí tohoto bodu. Má-li být G-diferencovatelný na nějaké množině K, musí být definován na jejím okolí. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že Φ je definován na celém $\mathbb{V}$, i když to většinou není potřeba. Jen ve výjimečných případech, kdy nepotřebujeme G-diferencovatelnost a využíváme skutečně jen chování funkcionálu na K, budeme uvažovat funkcionály definované pouze na K, tj. $\Phi : K \to \mathbb{R}$ (např. lemma 1.2, věta 1.4). Podotkněme ještě, že bychom se vlastně většinou mohli obejít i bez pojmu G-diferencovatelnosti a mohli se omezit na existenci derivace $\delta\Phi(u; v-u)$ ve všech směrech $v-u$, $v \in K$, tj. ve směrech jdoucích do K. Prakticky bychom tím však kromě formálních komplikací příliš nezískali.

Zobrazení $u \mapsto \Phi'(u)$ je speciálním typem zobrazení $\mathbb{V}$ do $\mathbb{V}^*$. Můžeme ovšem uvažovat obecné zobrazení $T : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ a zabývat se úlohou

$$u \in K, \quad \langle T(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K, \tag{1.6}$$

kde K je opět konvexní uzavřená množina ve $\mathbb{V}$. Takové úlohy se nazývají variační nerovnice. V případě, že T je potenciální operátor (tj. existuje k němu funkcionál $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ takový, že $\Phi'(u) = T(u)$), lze tuto úlohu psát ve tvaru (1.5). To je skutečně úloha variační, jak jsme viděli výše. V případě nepotenciálního operátoru T však (1.6) s variačním počtem nesouvisí.

Výše jsme vlastně dokázali následující tvrzení o existenci řešení variační nerovnice:

Věta 1.1. *Buď $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina, $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ funkcionál G-diferencovatelný v bodě u splňujícím* (1.4)*. Pak u je řešení variační nerovnice* (1.5)*, tj.* (1.6) *s $T = \Phi'$.*

Operátor T je často typu $T(u) = A(u) - f$, kde $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ je operátor se specifickými vlastnostmi, $f \in \mathbb{V}^*$ je daný prvek (pravá strana). Variační nerovnice (1.6) má pak tvar

$$u \in K, \quad \langle A(u), v - u \rangle \geq \langle f, v - u \rangle \quad \text{pro všechna } v \in K. \tag{1.7}$$

Poznámka 1.1. Pokud operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ je potenciální, tj. existuje G-diferencovatelný funkcionál $\Phi_A : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ takový, že $\Phi'_A(u) = A(u)$ pro všechna $u \in \mathbb{V}$, pak též operátor $T(u) = A(u) - f$ je potenciální, přičemž $T(u) = \Phi'(u)$, kde $\Phi(u) = \Phi_A(u) - \langle f, u\rangle$ pro všechna $u \in \mathbb{V}$.

Poznámka 1.2. Je-li $K = \mathbb{V}$, pak je zřejmě podmínka (1.7) ekvivalentní s rovností $A(u) = f$. Pokud množina K není podprostorem prostoru $\mathbb{V}$, pak úloha (1.7) je nelineární i tehdy, je-li operátor A lineární. Jsou-li u_1, u_2 řešení příslušná pravým stranám f_1, f_2, nemusí součet $c_1u_1 + c_2u_2$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{R})$ vůbec ležet v množině K.

Příklad 1.1. *(Jednostranná úloha pro obyčejnou diferenciální rovnici)* Buď $\mathbb{V} = W_2^1(0,1)$, $f \in L_2(0,1)$ daná funkce. Pak $\mathbb{V}$ je dokonce Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle u, v\rangle = \int_0^1 u'v' + uv \,\mathrm{d}x.$$

Funkci f můžeme ztotožnit s funkcionálem $f \in \mathbb{V}^*$ – podrobněji viz pozn. 1.7 níže.

Uvažujme funkcionál $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definovaný předpisem

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'|^2 + a|u|^2 \,\mathrm{d}x - \int_0^1 f\cdot u \,\mathrm{d}x,$$

kde $a \geq 0$ je daná konstanta. Pak Φ je G-diferencovatelný na $\mathbb{V}$ a platí

$$\begin{aligned}
\langle \Phi'(u), v\rangle &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} (\Phi(u+tv)) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \frac{1}{2}\int_0^1 (|u'+tv'|^2 + a|u+tv|^2 - f\cdot(u+tv))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 u'v' + auv - fv \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Podrobně to dokážeme pro vícerozměrný případ v příkladu 1.2).

Je-li $\Phi(u) = \min_{v\in W_2^1(0,1)} \Phi(v)$, pak $\langle \Phi'(u), v\rangle = 0$ pro každé $v \in W_2^1(0,1)$, tj.

$$\int_0^1 u'v' + auv \,\mathrm{d}x = \int_0^1 fv \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } v \in W_2^1(0,1),$$

tedy u je slabé řešení okrajové úlohy

$$-u'' + au = f \ \text{ na } (0,1) \tag{1.8}$$
$$u'(0) = u'(1) = 0. \tag{1.9}$$

(Ukáže se to standardními úvahami o slabých řešeních, níže je provedeme v mírně složitější formě pro případ nerovnice ve vyšší dimenzi.)

Položme nyní

$$K = \{v \in W_2^1(0,1);\ v(0) \geq 0,\ v(1) \geq 0\}$$

a předpokládejme, že platí (1.4). Podle věty 1.1 splňuje u nerovnici

$$u \in K, \quad \int_0^1 u'(v'-u')+au(v-u)-f(v-u)\,\mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K. \tag{1.10}$$

Ukážeme, že je přirozené řešení nerovnice (1.10) považovat za slabé řešení okrajové úlohy

$$-u'' + au = f \quad \text{na } (0,1), \tag{1.11}$$
$$u(0) \geq 0,\ \ u(1) \geq 0,\ \ u'(0) \leq 0,\ \ u'(1) \geq 0,\ \ u'(0)u(0) = u'(1)u(1) = 0. \tag{1.12}$$

Pro libovolné $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ je $u \pm \varphi \in K$, neboť $u \in K$ a $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Dosazením $v = u \pm \varphi$ do (1.10) dostáváme

$$\int_0^1 u'\varphi' + au\varphi - f\varphi\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(0,1). \tag{1.13}$$

(Nerovnost ≥ 0 platí pro $+\varphi$ a zároveň pro $-\varphi$, tedy musí nastat rovnost.) Integrací per partes druhého a třetího členu dostaneme

$$\int_0^1 \left(u' - \int_0^x [au(\xi) - f(\xi)]\,\mathrm{d}\xi\right)\varphi'\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(0,1).$$

Odtud plyne (podrobně viz pozn. 1.15 na konci kapitoly)

$$u'(x) - \int_0^x (au(\xi) - f(\xi))\,\mathrm{d}\xi = C$$

pro nějaké $C \in \mathbb{R}$. Tedy u' je absolutně spojitá a má skoro všude na $(0,1)$ derivaci

$$u''(x) = au(x) - f(x).$$

Z vět o vnoření (viz např. [8] nebo [1] a tam uvedená literatura) máme $W_2^1(0,1) \subset L_2(0,1)$ (dokonce je $W_2^1(0,1) \subset C([0,1])$) a předpokládáme $f \in L_2(0,1)$, tedy odtud $u'' \in L_2(0,1)$, tj. $u \in W_2^2(0,1) \subset C^1([0,1])$.

Násobme poslední rovnici funkcí $v - u$, $v \in K$ libovolné, a integrujme per partes:

$$\int_0^1 u'(v' - u') + au(v - u)\,\mathrm{d}x - u'(1)(v(1) - u(1)) + u'(0)(v(0) - u(0))$$
$$= \int_0^1 f(v - u)\,\mathrm{d}x.$$

Zároveň platí nerovnice (1.10) a odtud

$$u'(1)(v(1) - u(1)) - u'(0)(v(0) - u(0)) \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K.$$

Samozřejmě ke každému $\xi \geq 0$ existuje $v \in K$ takové, že $v(0) = \xi$, $v(1) = u(1)$, tedy

$$-u'(0)(\xi - u(0)) \geq 0 \quad \text{pro všechna } \xi \geq 0.$$

Pokud $u(0) = 0$, pak odtud pouze $-u'(0) \geq 0$. Pokud $u(0) > 0$, pak $\xi - u(0)$ probíhá pro $\xi \geq 0$ interval $[-u(0), +\infty]$ a dostaneme $u'(0) = 0$. Podobně volbou srovnávacích funkcí v splňujících $v(0) = u(0)$, $v(1) \geq 0$ dostaneme

$$u'(1)(\xi - u(1)) \geq 0 \quad \text{pro všechna } \xi \geq 0.$$

Odtud $u'(1) \geq 0$, protože máme $u(1) \geq 0$. V případě $u(1) > 0$ dostáváme dokonce $u'(1) = 0$. Zavedeme-li tedy slabé řešení okrajové úlohy (1.11), (1.12) jako řešení variační nerovnice pro náš specifický funkcionál a konvexní množinu K, splňuje toto slabé řešení rovnici (1.11) ve smyslu skoro všude a okrajové podmínky (1.12) v klasickém smyslu. Toto slabé řešení se tedy liší od klasického (které ovšem pro nespojitou pravou stranu f nemůže existovat) pouze tím, že není dvakrát spojitě diferencovatelné (jen $u \in W_2^2(0,1)$) a rovnice tedy nemůže být splněna všude, ale jen s.v. Uvidíme později, že ve vícerozměrných příkladech analogicky zavedené slabé řešení se liší od klasického (které většinou neexistuje) i tím, že také okrajové podmínky jsou splněny jen v jistém zobecněném (slabém) smyslu.

Uvědomme si ještě, že $-u'(0)$ resp. $u'(1)$ odpovídá ve vícerozměrném případě derivaci ve směru vnější normály (viz příklad 1.2).

Poznámka 1.3. Z uvedeného postupu je vidět, že kdybychom uvažovali pravou stranu $f \in C([0,1])$, dostali bychom řešení $u \in C^2([0,1])$, tedy řešení variační nerovnice (1.10) by bylo zároveň klasickým řešením okrajové úlohy (1.11), (1.12). Naopak, mohli jsme uvažovat i obecnější funkce f nežli z $L_2(0,1)$. Uvidíme to v dalším, kde se budeme zabývat analogickou situací pro parciální rovnice a klasické řešení okrajové úlohy nedostaneme ani pro $f \in C(\overline{\Omega})$.

Dosud tedy pouze víme, že pokud u_0 realizuje minimum funkcionálu na konvexní množině, pak je řešením variační nerovnice, což může být například řešením jisté okrajové úlohy. Budeme se zabývat dalšími přirozenými otázkami:

- zda také (za vhodných předpokladů) každé řešení variační nerovnice je též minimizér funkcionálu,
- zda takové řešení skutečně existuje a zda je jediné,
- jaké další okrajové úlohy lze variačními nerovnicemi popsat vhodnou volbou prostoru $\mathbb{V}$, konvexní množiny K a operátoru T,
- zda a jak je možné dokázat existenci řešení obecné variační nerovnice (1.6) či (1.7) i bez předpokladu potenciálnosti.

Poznámka 1.4. Ukažme, že je-li K konvexní uzavřený kužel ve $\mathbb{V}$ s vrcholem v počátku, tj. K je konvexní uzavřená množina taková, že

$$0 \in K \text{ a pokud } u \in K, \text{pak také } tu \in K \text{ pro každé } t \geq 0,$$

pak (1.6) je ekvivalentní s úlohou

$$u \in K, \quad \langle T(u), v\rangle \geq 0 \text{ pro všechna } v \in K, \quad \langle T(u), u\rangle = 0. \tag{1.14}$$

První nerovnice v (1.14) plyne z (1.6) volbou $v = u + \tilde{v}$, $\tilde{v} \in K$ libovolné, rovnice $\langle Tu, u\rangle = 0$ plyne z (1.14) postupnou volbou $v = 2u$, $v = 0$. Opačně, (1.6) se dostane odečtením poslední rovnosti od předchozí nerovnosti v (1.14). Analogicky ovšem pro variační nerovnici (1.7), která je speciálním případem.

Zvláštní roli hrají konvexní funkcionály.

Definice 1.2. Buď $K \subset \mathbb{V}$ konvexní množina. Funkcionál $\Phi\colon K \to \mathbb{R}$ nazýváme konvexní respektive striktně konvexní na K, jestliže

$$\Phi(tu + (1-t)v) \le t\Phi(u) + (1-t)\Phi(v) \quad \text{pro všechna } u, v \in K,\ \ t \in (0,1),$$

respektive

$$\Phi(tu + (1-t)v) < t\Phi(u) + (1-t)\Phi(v) \quad \text{pro všechna } u, v \in K,\ \ t \in (0,1).$$

Lemma 1.1. *Buď $K \subset \mathbb{V}$ konvexní množina, $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ buď funkcionál G-diferencovatelný na K. Potom Φ je konvexní na K právě když*

$$\Phi(v) \ge \Phi(u) + \langle \Phi'(u), v - u\rangle \quad \textit{pro všechna } u, v \in K. \tag{1.15}$$

D ů k a z. Je-li Φ konvexní, pak pro všechna $u, v \in K$, $t \in (0,1)$ máme

$$\Phi(u + t(v-u)) \le t\Phi(v) + (1-t)\Phi(u),$$

což lze pro $t \in (0,1)$ psát jako

$$\frac{\Phi(u + t(v-u)) - \Phi(u)}{t} \le \Phi(v) - \Phi(u).$$

Limitním přechodem $t \to 0_+$ odtud

$$\langle \Phi'(u), v - u\rangle \le \Phi(v) - \Phi(u),$$

tj. platí (1.15). Opačně, je-li $w, v \in K$, $t \in (0,1)$, dostaneme užitím podmínky (1.15) (jednou pro $u = w + t(v-w)$ a v, podruhé pro stejné u a w místo v)

$$\begin{aligned}
&\Phi\,\underbrace{(w + t(v-w))}_{u} - t\Phi(v) - (1-t)\Phi(w)\\
&\le \Phi(u) - t\Phi(u) - t\langle \Phi'(u), v-u\rangle - (1-t)\Phi(u) - (1-t)\langle \Phi'(u), w-u\rangle\\
&= -t\langle \Phi'(u), v-u\rangle - (1-t)\langle \Phi'(u), w-u\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Tedy $\Phi(w + t(v-w)) \le t\Phi(v) + (1-t)\Phi(w)$, tj. Φ je konvexní. □

Nyní můžeme ukázat, že řešení variační nerovnice za rozumných předpokladů minimizuje funkcionál Φ na K (tj. opačné tvrzení k větě 1.1).

Věta 1.2. *Buď $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina, $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ funkcionál konvexní a G-diferencovatelný na K. Je-li u řešení variační nerovnice* (1.5), *pak platí* (1.4).

D ů k a z. Stačí si uvědomit, že platí-li (1.5), pak podle lemmatu 1.1 je

$$\Phi(v) \geq \Phi(u) + \langle \Phi'(u), v - u\rangle \geq \Phi(u) \quad \text{pro všechna } v \in K.$$

$\square$

Označme $\mathbb{V}^{**}$ duální prostor k prostoru $\mathbb{V}^*$, tj. prostor všech spojitých lineárních funkcionálů na prostoru $\mathbb{V}^*$.

Definice 1.3. Banachův prostor $\mathbb{V}$ je reflexivní, jestliže kanonické zobrazení $i\colon \mathbb{V} \to V^{**}$ definované předpisem $i(u)(u^*) = \langle u^*, u\rangle$ pro každé $u^* \in \mathbb{V}^*$, $u \in \mathbb{V}$, je zobrazením na $\mathbb{V}^{**}$.

Poznámka 1.5. (Eberleinova-Šmuljanova věta) Banachův prostor je reflexivní právě tehdy, jestliže každá omezená množina v něm je slabě kompaktní (tj. z každé omezené posloupnosti lze vybrat posloupnost slabě konvergentní). Viz např. [1].

Poznámka 1.6. Každý Hilbertův prostor je reflexivní. Prostory L_p, W_p^k (pro reálné $p > 1$ a celé $k > 0$) jsou reflexivní.

Definice 1.4. Funkcionál $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ nazýváme koercivní na K, jestliže

$$\lim_{v \in K,\, \|v\| \to \infty} \Phi(v) = +\infty. \tag{1.16}$$

Zformulujme nyní jednoduchou větu o existenci minima funkcionálu, která je spolu s větou 1.1 zároveň tvrzením o existenci řešení variační nerovnice. Je speciálním případem poněkud obecnější věty 1.4 níže.

Věta 1.3. (Existence minima) *Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina, $\Phi\colon K \to \mathbb{R}$ spojitý konvexní funkcionál koercivní na K. Pak funkcionál Φ nabývá minima na K, tj. existuje $u \in K$ splňující* (1.4).

Pokud je K omezená množina, pak ovšem předpoklad koercivity (1.16) je splněn automaticky.

Definice 1.5. Funkcionál $\Phi\colon K \to \mathbb{R}$ nazýváme slabě zdola polospojitý, jestliže platí implikace

$$u_n \in K, \quad u_n \rightharpoonup u \Longrightarrow \Phi(u) \leq \liminf \Phi(u_n).$$

Lemma 1.2. *Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina. Pak každý spojitý konvexní funkcionál $\Phi\colon K \to \mathbb{R}$ je slabě zdola polospojitý.*

D ů k a z . Ukážeme nejdříve, že Φ je slabě zdola polospojitý právě když množina $E(a) = \{u \in K;\ \Phi(u) \le a\}$ je slabě uzavřená pro každé $a \in \mathbb{R}$. Buď Φ slabě polospojitý zdola, $u_n \in E(a)$, $u_n \rightharpoonup u$, $u_n \in K$. Pak též $u \in K$, neboť konvexní uzavřená množina je slabě uzavřená (viz např. [1], Exercise 2.1.37). Ze slabé polospojitosti zdola plyne $\Phi(u) \le \liminf \Phi(u_n) \le a$, tj. $u \in E(a)$. Tedy $E(a)$ je slabě uzavřená.

Buď $E(a)$ slabě uzavřená pro každé $a \in \mathbb{R}$ a nechť Φ není slabě zdola polospojitý. Pak existuje posloupnost $u_n \in K$ taková, že $u_n \rightharpoonup u$, $\Phi(u) > \liminf \Phi(u_n)$. Zvolme a takové, že $\Phi(u) > a > \liminf \Phi(u_n)$. Můžeme předpokládat, že $u_n \in E(a)$. (Jinak bychom mohli vybrat podposloupnost s touto vlastností a pracovat s takovou podposloupností.) Ze slabé uzavřenosti $E(a)$ plyne $u \in E(a)$, tj. $\Phi(u) \le a$, což je spor. Tedy ekvivalence je dokázána.

Je-li Φ spojitý konvexní funkcionál, pak množina $E(a)$ je uzavřená a konvexní pro každé $a \in \mathbb{R}$, tedy je i slabě uzavřená, tedy Φ je slabě zdola polospojitý. $\square$

Z lemmatu 1.2 plyne, že věta 1.3 je důsledkem následujícího obecnějšího tvrzení.

Věta 1.4. (Existence minima) *Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina, $\Phi\colon K \to \mathbb{R}$ slabě zdola polospojitý funkcionál koercivní na K. Pak funkcionál Φ nabývá minima na K, tj. existuje u splňující* (1.4).

D ů k a z . Existují $v_n \in K$ taková, že $\Phi(v_n) \to \inf_{v\in K} \Phi(v) < +\infty$. Je $\|v_n\| \le C$ pro nějaké $C > 0$. Jinak by totiž existovala podposloupnost v_{k_n}, $\|v_{k_n}\| \to \infty$, a podle předpokladu koercivity (1.16) by bylo $\lim \Phi(u_{k_n}) = +\infty$, což by byl spor. Prostor $\mathbb{V}$ je reflexivní a proto existuje vybraná posloupnost v_{k_n}, $v_{k_n} \rightharpoonup u$. Množina K je konvexní a uzavřená, tedy slabě uzavřená, tedy $u \in K$. Ze slabé polospojitosti zdola $\Phi(u) \le \liminf \Phi(v_{k_n}) = \lim \Phi(v_n) = \inf_{v\in K} \Phi(v)$, tedy nutně $\Phi(u) = \min_{v\in K} \Phi(v)$. $\square$

Věta 1.5. (Jednoznačnost) *Je-li $K \subset \mathbb{V}$ konvexní a $\Phi\colon K \to \mathbb{R}$ striktně konvexní, pak existuje nejvýše jedno u splňující* (1.4).

D ů k a z . Buď $\Phi(u_1) = \Phi(u_2) = \min_{v\in K} \Phi(v)$. Z definice striktní konvexnosti

$$\Phi\Big(\frac{u_1 + u_2}{2}\Big) < \frac{1}{2}(\Phi(u_1) + \Phi(u_2)) = \min_{v\in K} \Phi(v),$$

což je spor. $\square$

Důsledek 1.1. Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina. Je-li $\Phi\colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ slabě zdola polospojitý, G-diferencovatelný, konvexní a koercivní funkcionál na K, $T = \Phi'$, pak (1.6) má alespoň jedno řešení. Je-li Φ navíc striktně konvexní, pak (1.6) má právě jedno řešení.

Je-li A potenciální operátor, tj. existuje funkcionál Φ_A splňující podmínku $\Phi'_A = A$, a je-li navíc Φ_A slabě zdola polospojitý, konvexní a koercivní, pak variační nerovnice (1.7) má pro každé $f \in \mathbb{V}^*$ alespoň jedno řešení. Je-li navíc Φ_A striktně konvexní, pak variační nerovnice (1.7) má pro každé $f \in \mathbb{V}^*$ právě jedno řešení.

Plyne to přímo z vět 1.1, 1.2, 1.4, 1.5, poznámky 1.1 a toho, že Φ_A je zřejmě konvexní resp. striktně konvexní resp. slabě zdola polospojitý právě když má tuto vlastnost funkcionál Φ definovaný předpisem $\Phi(u) = \Phi_A(u) + \langle f, u\rangle$.

Podle lemmatu 1.2 tvrzení zůstane v platnosti, pokud předpoklad slabé polospojitosti zdola nahradíme předpokladem spojitosti.

Snadno se ověří, že $\mathbb{V}$, K a Φ z příkladu 1.1 splňují všechny předpoklady vět 1.1, 1.2, 1.4, 1.5. (Dokážeme to podrobně později pro složitější situaci ve vyšší dimenzi – viz příklad 1.5). Tedy existuje právě jedno řešení okrajové úlohy (1.8), (1.9).

Budeme se dále zabývat vícerozměrnou analogií příkladu 1.1.

Poznámka 1.7. Je-li $\mathbb{V}$ podprostor Sobolevova prostoru $W_2^1(\Omega)$ (kde Ω je omezená oblast v $\mathbb{R}^N$) a $f \in L_2(\Omega)$, pak můžeme funkci f ztotožnit s funkcionálem $\tilde{f}$ definovaným předpisem $\tilde{f}(v) = \int_\Omega f(x)v(x)\,\mathrm{d}x$. Budeme někdy psát f místo $\tilde{f}$, tedy v tomto smyslu bude $f \in \mathbb{V}^*$, $L_2(\Omega) \subset \mathbb{V}^*$.

Příklad 1.2. *(Lineární eliptická rovnice se Signoriniho okrajovou podmínkou)* Buď Ω omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$ v $\mathbb{R}^N$, Γ_D, Γ_N otevřené disjunktní podmnožiny $\partial\Omega$, $\operatorname{meas}(\partial\Omega \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N)) = 0$, $a \geq 0$. Položme

$$\mathbb{V} = \{v \in W_2^1(\Omega);\ \ v = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_D \ \text{ ve smyslu stop}\}$$

(podrobněji o stopách viz pozn. 1.11 níže). Tedy $\mathbb{V}$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + uv)\,\mathrm{d}x,$$

kde ∇u značí gradient funkce u, tj.

$$\nabla u = \Big(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\Big), \quad \nabla u \cdot \nabla v = \sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}.$$

Viz např. [4]. Příslušná norma je dána výrazem

$$\|u\| = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2},$$

kde $|\nabla u|^2 = \nabla u \cdot \nabla u = \sum_{j=1}^N \big(\big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\big|^2\big)\,\mathrm{d}x$. Definujme operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$

předpisem

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + auv \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}.$$

Buď $f \in L_2(\Omega)$, tedy také $f \in \mathbb{V}^*$ ve smyslu poznámky 1.7. Pak řešení rovnice

$$A(u) = f$$

je slabým řešením okrajové úlohy

$$-\Delta u + au = f \text{ na } \Omega, \tag{1.17}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma_N, \tag{1.18}$$

kde $\frac{\partial u}{\partial n}$ značí derivaci ve směru vnější normály. Viz např. [4], pro případ $\Gamma_D = \partial\Omega$ (tj. Dirichletova podmínka je předepsána na celé hranici) též [1]. Položme navíc

$$K = \{v \in \mathbb{V};\ v \geq 0 \text{ na } \Gamma_N \text{ ve smyslu stop}\}.$$

Ukážeme, že řešení variační nerovnice (1.7) na K s uvažovaným prostorem $\mathbb{V}$, operátorem A a pravou stranou f je „slabým řešením" okrajové úlohy (1.17),

$$u = 0 \text{ na } \Gamma_D, \quad u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma_N. \tag{1.19}$$

O smyslu okrajových podmínek (1.19) viz pozn. 1.8 níže. Nerovnice (1.7) je (s použitím pozn. 1.7) ekvivalentní s úlohou

$$u \in K,$$

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) + au(v-u)\,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } v \in K.$$

Nechť u je řešení této nerovnice. Pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $v = u \pm \varphi \in K$, neboť $u \in K$, $\varphi = 0$ na $\partial\Omega$. Dosazením dostaneme

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi + au\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.20}$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že řešení u je tak hladké (např. $u \in C^2(\overline{\Omega})$), že je možno provést všechny následující úvahy. To ve skutečnosti obecně není pravda, ale všem následujícím úvahám lze dát přesný význam i bez předpokladu hladkosti – viz pozn. 1.14 níže. Užitím Greenovy formule (viz pozn. 1.12 níže) plyne z (1.20)

$$\int_\Omega (-\Delta u + au)\varphi\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\varphi\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

a odtud

$$-\Delta u + au = f.$$

Dirichletova podmínka $u = 0$ na Γ_D plyne z volby prostoru $\mathbb{V}$. Vynásobením poslední rovnosti $v - u$ a užitím Greenovy formule vyjde

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) + au(v-u)\,\mathrm{d}x - \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,\mathrm{d}\Gamma$$
$$= \int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } v \in \mathbb{V}.$$

Omezíme-li se na $v \in K$ a užijeme toho, že u je řešení nerovnice, dostaneme

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,\mathrm{d}\Gamma \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K. \tag{1.21}$$

Pro $w \in K$ libovolné je $v = u + w \in K$ a tedy z poslední nerovnosti plyne

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} w\,\mathrm{d}\Gamma \geq 0 \quad \text{pro všechna } w \in K.$$

Odtud $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ na Γ_N, neboť předpokládáme spojitost $\frac{\partial u}{\partial n}$ a kdyby $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) < 0$ pro nějaké $x_0 \in \Gamma_N$, pak by bylo i $\frac{\partial u}{\partial n}(x) < 0$ na okolí $U(x_0)$ bodu x_0 v $\partial\Omega$ a našli bychom hladkou funkci $w \in K$, $w > 0$ na $U(x_0)$, $w = 0$ na $\partial\Omega \setminus U(x_0)$, tedy $\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} w\,\mathrm{d}\Gamma < 0$, což je spor. Volbou $v = 0$ v (1.21) dostáváme $\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial n} u\,\mathrm{d}\Gamma \leq 0$. Víme už ale $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$, $u \geq 0$ na Γ_N a tedy $u\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na Γ_N. Tedy kdyby řešení variační nerovnice (1.7) s uvažovaným operátorem a konvexní množinou bylo hladké, bylo by řešením okrajové úlohy (1.17), (1.19). To už je důvod k tomu zavést slabé řešení úlohy (1.17), (1.18) jakožto řešení naší variační nerovnice. Ve skutečnosti řešení této variační nerovnice (tj. slabé řešení okrajové úlohy (1.17), (1.19)) sice zmíněnou hladkost nemá, ale ukážeme dále v poznámce 1.14, v jakém smyslu přesně úlohu (1.17), (1.19) splňuje.

Poznámka 1.8. Okrajové podmínky na Γ_N v (1.19) se nazývají Signoriniho okrajové podmínky. Jejich obecnější tvar je

$$u \geq \varphi, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (u-\varphi)\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \tag{1.22}$$

kde φ je zadaná rozumná funkce. Podrobněji např. [3], [10]. Pro jednoduchost v našem příkladu uvažujeme $\varphi = 0$. Smysl této okrajové podmínky je následující. Hodnota popisovaná funkcí u (např. teplota nebo koncentrace) v libovolném bodě $x \in \Gamma_N$ nesmí klesnout pod předepsanou hodnotu $\varphi(x)$. Pokud by proces popisovaný rovnicí měl vést k takovému poklesu, proudí hranicí do oblasti právě takové množství tepla či materiálu, jaké poklesu zabrání. Hranice je přitom uzavřená tam, kde hodnota u je nad předepsanou hranicí. Pokud φ je konstantní, pak si pod regulačním systémem zajišťujícím takový tok hranicí můžeme představit rezervoár obklopující Γ_N z vnějšku oblasti, který má nekonečnou kapacitu a je v něm koncentrace φ, přičemž na Γ_N je jednostranná membrána umožňující volný tok do oblasti, nikoli ven. Zdůrazněme, že naše rovnice popisuje stacionární stav příslušného evolučního procesu popsaného rovnicí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - au + f.$$

Poznamenejme ještě, že řízení teploty (stacionární i evoluční případ) lze realističtěji modelovat pomocí obecnějších variačních nerovnic (viz např. [7], [2]).

Poznámka 1.9. (Němyckého operátory) Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ s lipschitzovskou hranicí, $h(x,\xi)$ funkce definovaná pro s.v. $x \in \Omega$ a všechna $\xi \in \mathbb{R}^m$. Nechť h má Caratheodoryho vlastnost, tj. pro každé pevné $\xi \in \mathbb{R}^m$ je funkce $h(\cdot,\xi)$ měřitelná na Ω, pro s.v. $x \in \Omega$ je funkce $h(x,\cdot)$ spojitá na $\mathbb{R}^m$. Operátor H, který m-tici funkcí $u_1(x),\dots,u_m(x)$ na Ω přiřadí funkci

$$H(u_1,\dots,u_m)(x) = h(x,u_1(x),\dots,u_m(x)),$$

se nazývá Němyckého operátor daný funkcí h. Pro nás bude důležitá následující

Věta o Němyckého operátoru: Pokud existují reálná čísla $p_1,\dots,p_m$, r, $p_i \geq 1$, $r \geq 1$, a funkce $g \in L_r(\Omega)$ taková, že

$$|h(x,\xi_1,\dots,\xi_m)| \leq g(x) + c\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p_j/r}, \tag{1.23}$$

pak Němyckého operátor H je spojitým zobrazením prostoru $L_{p_1}(\Omega) \times \ldots \times L_{p_m}(\Omega)$ do $L_r(\Omega)$. Speciálně je-li

$$|h(x,\xi_1,\dots,\xi_m)| \leq C\Big(1 + \sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^{p/r}\Big)^r, \quad p,r \geq 1,$$

pak H je spojitý operátor $(L_p(\Omega))^m$ do $L_r(\Omega)$. Viz též [4] a tam uvedená literatura.

Existence řešení úlohy z příkladu 1.2.

Položme

$$\Phi(u) = \int_\Omega \frac{1}{2}(|\nabla u|^2 + a|u|^2) - fu\,\mathrm{d}x.$$

Ukážeme, že takto definovaný funkcionál Φ je spojitý, striktně konvexní, G-diferencovatelný, v případě $a > 0$ (a v případě $\operatorname{meas}(\Gamma_D) > 0$ také pro $a = 0$) i koercivní, a že je to potenciál k operátoru $A(u) - f$ z příkladu 1.2.

Funkce $h(\xi) = |\xi|^2$ je spojitá a splňuje podmínku růstu z věty o Němyckého operátoru z poznámky 1.9 s $m = 1$, $p = 2$, $r = 1$. Tedy Němyckého operátor $u \to |u|^2$ je spojité zobrazení $L_2(\Omega)$ do $L_1(\Omega)$. Speciálně pro každé $u \in W_2^1(\Omega)$ je $\Phi(u)$ konečné číslo, tj. funkcionál Φ je korektně definován. Je-li $u_n \to u$

ve $W_2^1(\Omega)$, pak $u_n \to u$ v $L_2(\Omega)$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_j} \to \frac{\partial u}{\partial x_j}$ v $L_2(\Omega)$ $(j = 1, \dots N)$. Odtud $|u_n|^2 \to |u|^2$ v $L_1(\Omega)$, $\left|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\right|^2 \to \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2$ v $L_1(\Omega)$. Tedy

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^2 + a|u_n|^2 \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega |\nabla u|^2 + a|u|^2 \,\mathrm{d}x,$$

tj. $\Phi(u_n) \to \Phi(u)$. Tedy Φ je spojitý. Funkce h je zároveň striktně konvexní a odtud snadno plyne, že Φ je striktně konvexní. Ukažme, že Φ je G-diferencovatelný. Buď $u, v \in \mathbb{V}$ a položme

$$g(t,x) = \frac{1}{2}(|\nabla(u(x) + tv(x))|^2 + a|u(x) + tv(x)|^2) - f(u(x) + tv(x)).$$

Potřebujeme dokázat, že existuje

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \left(\int_\Omega g(t,x)\,\mathrm{d}x\right).$$

Funkce g je měřitelná v x pro každé $t \in (-1,1)$, existuje konečná derivace $\frac{\partial g}{\partial t}(t,x)$ pro všechna $t \in (-1,1)$ a s.v. $x \in \Omega$, integrál $\int_\Omega g(t,x)\,\mathrm{d}x$ konverguje pro každé $t \in (-1,1)$ a platí

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial g}{\partial t}(t,\cdot)\right| &\le \sum_{j=1}^N \left|\left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + t\frac{\partial v}{\partial x_j}\right)\right| \frac{\partial v}{\partial x_j} + a|(u+tv)v| + |fv| \\
&\le \sum_{j=1}^N \left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\right| + \left|\frac{\partial v}{\partial x_j}\right|^2\right) + a(|uv| + |v|)^2 + |fv|.
\end{aligned}$$

Máme $u, v, \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L_2(\Omega)$ a z Hölderovy nerovnosti plyne uv, $\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}, fv \in L_1(\Omega)$. Tedy $\frac{\partial g}{\partial t}(t,\cdot)$ má integrabilní majorantu. Tím jsou ověřeny předpoklady věty o derivování integrálu podle parametru a odtud

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega g(t,x)\,\mathrm{d}x\right) = \int_\Omega \frac{\partial g}{\partial t}(t,x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } t \in (-1,1).$$

Speciálně

$$\lim_{t\to 0} \frac{\Phi(u+tv) - \Phi(u)}{t} = \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla v + auv - fv)\,\mathrm{d}x.$$

Poslední výraz je pro pevné u spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{V}$. (Ke spojitosti stačí užít Hölderovu nerovnost.) Tedy existuje diferenciál Gâteaux $\Phi'(u)$ a je

$$\langle \Phi'(u), v\rangle = \int_\Omega (\nabla u \nabla v + auv - fv)\,\mathrm{d}x.$$

Dále pro $a > 0$ je

$$\Phi(u) \ge \frac{1}{2}\min(1,a)\|u\|^2 - \|f\|_{L_2} \cdot \|u\|,$$

tedy Φ splňuje též podmínku koercivity (1.16). Podle vět 1.3, 1.5 existuje tedy za předpokladu $a > 0$ právě jeden bod $u \in K$ splňující $\Phi(u) = \min_{v\in K}\Phi(v)$ a tento bod u je podle vět 1.1, 1.2 jediným řešením nerovnice (1.7), tedy je též jediným slabým řešením okrajové úlohy (1.17), (1.19), jak jsme ukázali výše.

Poznámka 1.10. Je-li $\operatorname{meas}(\Gamma_D) > 0$, pak předpisem

$$\langle u, v\rangle_0 = \left(\int_\Omega \nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

je na $\mathbb{V}$ též definován skalární součin a

$$\|u\|_0 = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$

je ekvivalentní norma na $\mathbb{V}$, tj. existují $c_1, c_2 > 0$ taková, že

$$c_1\|u\| \le \|u\|_0 \le c_2\|u\| \quad \text{pro všechna } u \in \mathbb{V}.$$

Viz např. [8]. I v případě $a = 0$ tedy dostáváme

$$\Phi(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|_0^2 - \|f\|_{L_2}\|u\|_0,$$

tedy $\lim_{\|u\|\to\infty} \Phi(u) = +\infty$. Tedy v případě $\operatorname{meas}(\Gamma_D) > 0$ dostaneme i pro $a = 0$ existenci a jednoznačnost slabého řešení úlohy (1.17), (1.19).

Poznámka 1.11. (Stopy funkcí) Buď Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$, $p \ge 1$ reálné číslo. Existuje právě jedno spojité lineární zobrazení $T\colon W_p^1(\Omega) \to L_p(\partial\Omega)$ takové, že $Tu = u|_{\partial\Omega}$ (restrikce u na $\partial\Omega$) pro všechna $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Viz např. [8]. Funkci $Tu \in L_p(\partial\Omega)$ nazýváme stopou funkce $u \in W_p^1(\Omega)$. Místo Tu budeme často psát u nebo $u|_{\partial\Omega}$. Výrok $u = v$ na $\partial\Omega$ (nebo na $\Gamma \subset \partial\Omega$) ve smyslu stop bude znamenat $Tu = Tv$ s.v. na $\partial\Omega$ (nebo na $\Gamma \subset \partial\Omega$). Pokud budeme někdy psát pouze $u = v$ na $\partial\Omega$ (nebo na $\Gamma \subset \partial\Omega$) pro $u, v \in W_p^1(\Omega)$, budeme mít vždy na mysli rovnost ve smyslu stop. Stejně ovšem pro nerovnost $u \ge v$.

Poznámka 1.12. (Greenova formule) Je-li Ω omezená oblast v $\mathbb{R}^N$ s lipschitzovskou hranicí, $w, v \in C^1(\overline{\Omega})$, pak platí Greenova formule

$$\int_\Omega \frac{\partial w}{\partial x_j} v \,\mathrm{d}x = -\int_\Omega w \frac{\partial v}{\partial x_j} \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} w v n_j \,\mathrm{d}\Gamma,$$

kde n_j je j-tá složka jednotkového vektoru vnější normály n k $\partial\Omega$. Tato formule zůstává v platnosti i pokud pouze $w \in W_p^1(\Omega)$, $v \in W_q^1(\Omega)$ pro nějaká reálná $p \ge 1$, $q \ge 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (tedy speciálně pro $w, v \in W_2^1(\Omega)$). Přitom ovšem $\frac{\partial w}{\partial x_j}$, $\frac{\partial v}{\partial x_j}$ značí zobecněné derivace a w, v na $\partial\Omega$ v integrálu přes hranici se chápou ve smyslu stop (pozn. 1.11). Pro derivaci ve směru vnější normály $\frac{\partial u}{\partial n}$ platí

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j,$$

tedy pro $u \in W_p^2(\Omega)$, $v \in W_q^1(\Omega)$ je

$$\int_\Omega \Delta u \cdot v \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}\Gamma.$$

Poznámka 1.13. (Derivace podle normály) Pro funkci $u \in W_2^1(\Omega)$ je definována pouze její stopa na hranici, ale její derivace (tedy ani derivace ve směru normály) obecně není na hranici definována v žádném smyslu. Pokud $u \in W_2^1(\Omega)$ a navíc $\Delta u \in L_2(\Omega)$ (přičemž ještě nemusí být $u \in W_2^2(\Omega)$), pak lze definovat derivaci ve směru vnější normály $N(u)$ jakožto lineární spojitý funkcionál na $W_2^1(\Omega)$ definovaný předpisem

$$\langle N(u), v \rangle = \int_\Omega (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } v \in W_2^1(\Omega).$$

Pokud je u hladká funkce ($u \in C^2(\overline{\Omega})$), pak platí Greenova formule, tj. klasická derivace $\frac{\partial u}{\partial n}$ podle normály splňuje

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega (\Delta u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v) \, \mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } v \in W_2^1(\Omega).$$

Tedy v tom případě

$$\langle N(u), v \rangle = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, \mathrm{d}\Gamma, \tag{1.24}$$

tj. funkcionál $N(u)$ je reprezentován klasickou normálovou derivací. V obecném případě budeme psát $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na Γ (pro nějakou podmnožinu $\Gamma \subset \partial\Omega$), pokud $\langle N(u), v \rangle = 0$ pro každou funkci $v \in W_2^1(\Omega)$ takovou, že $v = 0$ na $\partial\Omega \setminus \Gamma$ ve smyslu stop (viz poznámku 1.11). Podobně budeme v obecném případě psát $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ na Γ, pokud $\langle N(u), v \rangle \geq 0$ pro každé $v \in W_2^1(\Omega)$, $v = 0$ na $\partial\Omega \setminus \Gamma$, $v \geq 0$ na Γ ve smyslu stop. Pro hladkou funkci u je zřejmě $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ resp. $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ na Γ podle této definice právě když $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ resp. $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ na Γ v klasickém smyslu.

Poznámka 1.14. (Přesný smysl úlohy (1.17), (1.19)) Na základě předchozí poznámky můžeme odvodit, v jakém smyslu obecně řešení variační nerovnice z příkladu 1.2 je řešením okrajové úlohy (1.17), (1.19). Vhodnou volbou testovacích funkcí jsme už získali (1.20), což znamená $-\Delta u + au = f$ ve smyslu distribucí (viz např. [6], stručně též [1], str. 38). Máme $u \in L_2(\Omega)$, $f \in L_2(\Omega)$ a proto Δu existuje nejen jako distribuce, ale jakožto funkce z $L_2(\Omega)$ a platí

$$-\Delta u + au = f \quad \text{s.v. } v \ \Omega.$$

Dirichletova podmínka $u = 0$ na Γ_D je splněna ve smyslu stop díky volbě prostoru $\mathbb{V}$ (viz pozn. 1.11). Dále postupujeme stejně jako v příkladu 1.2 za předpokladu hladkosti řešení u, ale místo klasické normálové derivace $\frac{\partial u}{\partial n}$ pracujeme s derivací chápanou jako funkcionál $N(u)$ z poznámky 1.13 a místo Greenovy formule používáme definici $N(u)$. Vynásobením $v-u$, integrací a užitím definice funkcionálu $N(u)$ dostaneme

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v-u) + au(u-v)\,\mathrm{d}x - \langle N(u), v-u\rangle = \int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x.$$

Omezíme-li se na $v \in K$ a užijeme toho, že u je řešení nerovnice, dostaneme

$$\langle N(u), v-u\rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna } \ v \in K.$$

Pro $w \in K$ libovolné je $v = w + u \in K$ a tedy z poslední nerovnosti plyne

$$\langle N(u), w\rangle \geq 0 \quad \text{pro všechna } \ w \in K.$$

To znamená (vzhledem k definici K a poznámce 1.13) $N(u) \geq 0$ na Γ_N. Volbou $v = 0$ dostaneme $\langle N(u), u\rangle \leq 0$. Vzhledem k tomu, že $u \in K$, je též $\langle N(u), u\rangle \geq 0$, tedy $\langle N(u), u\rangle = 0$. V tomto smyslu můžeme chápat podmínku $\frac{\partial u}{\partial n} \cdot u = 0$ na Γ_N z (1.19).

Poznámka 1.15. Dokažme zde pro úplnost následující známé tvrzení, které jsme použili v příkladu 1.1.

Je-li $f \in L_2(\Omega)$ a platí

$$\int_0^1 f(x)\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(0,1), \tag{1.25}$$

pak existuje konstanta C taková, že $f(x) = C$ pro s.v. $x \in (0,1)$. Ukážeme nejprve, že (1.25) platí právě když

$$\int_0^1 f(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ pro všechna } \psi \in \mathcal{D}(0,1) \text{ taková, že} \tag{1.26}$$

$$\int_0^1 \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0.$$

Je-li totiž $\psi = \varphi'$, $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$, pak $\int_0^1 \psi\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \varphi'\,\mathrm{d}x = \varphi(1) - \varphi(0) = 0$; naopak, je-li $\psi \in \mathcal{D}(0,1)$, $\int_0^1 \psi\,\mathrm{d}x = 0$, pak funkce $\varphi(x) = \int_0^x \psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ je nekonečně krát spojitě diferencovatelná, splňuje $\varphi' = \psi$ a $\varphi(x) = 0$ na $[0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon, 1]$, kde ε je tak malé, že $\psi(x) = 0$ na $[0,\varepsilon] \cup [1-\varepsilon,1]$, tedy je $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$. Tedy (1.25) je skutečně ekvivalentní s (1.26).

Zvolme pevné $\varphi_0 \in \mathcal{D}(0,1)$ takové, že $\int_0^1 \varphi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 1$. Pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ položme

$$\psi_\varphi(x) = \varphi(x) - \varphi_0(x)\int_0^1 \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Pak $\psi_\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$, $\quad \int_0^1 \psi_\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$. Tedy podle (1.26) máme

$$\int_0^1 f(\xi)\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_0^1 f(\xi)\psi_\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^1 f(\xi)\varphi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi \int_0^1 \varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$
$$= \int_0^1 C\varphi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \quad \text{ pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(0,1),$$

kde $C = \int_0^1 f(\xi)\varphi_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ nezávisí na φ. Z hustoty $\mathcal{D}(0,1)$ v $L_2(0,1)$ (viz např. [1] nebo [8]) plyne, že $\int_0^1 f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 C\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ i pro všechna $\varphi \in L_2(0,1)$, což znamená $f(x) = C$ s.v. na $(0,1)$.

2 Projekce na konvexní množinu. Metoda postupných aproximací

Předpokládejme nyní, že $\mathbb{V}$ je Hilbertův prostor. Podle Rieszovy věty o representaci pak lze každý funkcionál $u^* \in \mathbb{V}^*$ ztotožnit s bodem $u \in \mathbb{V}$ tak, že $u^*(v) = \langle u, v \rangle$ pro všechna $v \in \mathbb{V}$ (závorky nyní značí skalární součin), tedy $\mathbb{V}$ lze ztotožnit s duálem $\mathbb{V}^* = \mathbb{V}$.

Lemma 2.1. *Buď $\mathbb{V}$ reálný Hilbertův prostor, K konvexní uzavřená množina ve $\mathbb{V}$. Pak ke každému $u \in \mathbb{V}$ existuje právě jeden bod $P_K u \in K$ takový, že*

$$\|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|. \tag{2.1}$$

Tento bod je zároveň jediným bodem prostoru $\mathbb{V}$, splňujícím podmínky

$$u \in K, \ \langle u - P_K u, v - P_K u \rangle \leq 0 \quad \textit{pro každé } v \in K. \tag{2.2}$$

D ů k a z . Buď $u \in \mathbb{V}$. Existují $v_n \in K$ takové, že $\lim \|u - v_n\| = \inf_{v \in K} \|u - v\|$. Posloupnost v_n je zřejmě omezená a můžeme proto předpokládat $v_n \rightharpoonup v_0$ (viz pozn. 1.5, 1.6). Položíme $P_K u = v_0$. Máme $u - v_n \rightharpoonup u - P_K u$ a tedy $\|u - P_K u\| \leq \liminf \|u - v_n\| = \inf_{v \in K} \|u - v\|$. Konvexní uzavřená množina je též slabě uzavřená, tedy $P_K u \in K$. Proto nemůže být $\|u - P_K u\| < \inf_{v \in K} \|u - v\|$, tedy je $\|u - P_K u\| = \min_{v \in K} \|u - v\|$ a existence bodu splňujícího (2.1) je dokázána.

Dokažme, že z (2.1) plyne (2.2). Pro $u \in K$ je $P_K u = u$ a (2.2) je zřejmé. Buď $u \notin K$. Buď $v \in K$ libovolné a uvažujme 2-rozměrný podprostor $\mathbb{V}_2$ generovaný vektory $u - P_K u$, $v - P_K u$. Ten lze ztotožnit s eukleidovskou rovinou a(2.2) plyne z obrázku – úhel sevřený vektory $u - P_K u$, $v - P_K u$ je tupý.

Kdyby existovaly dva body $P_K u$, $\widetilde{P}_K u \in K$ splňující (2.2), pak

$$\langle u - P_K u, \widetilde{P}_K u - P_K u \rangle \leq 0, \quad \langle u - \widetilde{P}_K u, P_K u - \widetilde{P}_K u \rangle \leq 0.$$

Sečtením

$$\langle P_K u - \widetilde{P}_K u, P_K u - \widetilde{P}_K u \rangle \leq 0, \quad \text{tedy } P_K u = \widetilde{P}_K u,$$

tj. bod splňující (2.2) (a tedy i bod splňující (2.1)) je určen jednoznačně. □

Definice 2.1. Projekcí na konvexní uzavřenou množinu K v Hilbertově prostoru nazýváme zobrazení, přiřazující bodu $u \in \mathbb{V}$ bod $P_K u$ splňující (2.1), tj. nejbližší bod v K k bodu u.

Poznámka 2.1. Je-li K podprostor prostoru $\mathbb{V}$, pak P_K je ortogonální projekce prostoru $\mathbb{V}$ na K. Podmínka (2.2) je v tom případě ekvivalentní s podmínkou

$$\langle u - P_K u, v \rangle = 0 \quad \text{pro každé } v \in K,$$

t.j. $u - P_K u$ je ortogonální k podprostoru K. Projekce P_K je lineární zobrazení právě když K je podprostor.

Poznámka 2.2. Platí $\|P_K u - P_K v\| \leq \|u - v\|$ pro všechna $u, v \in K$, speciálně P_K je spojité zobrazení. Pro případ $N = 2$ (tj. když $\mathbb{V}$ je rovina) stačí nakreslit si obrázek. Obecně máme podle lemmatu 2.1

$$\langle u - P_K u, P_K v - P_K u\rangle \leq 0, \quad \langle v - P_K v, P_K u - P_K v\rangle \leq 0,$$

sečtením dostaneme $\langle u - v - (P_K u - P_K v), P_K v - P_K u\rangle \leq 0$, což znamená

$$\|P_K u - P_K v\|^2 \leq \langle u - v, P_K u - P_K v\rangle \leq \|u - v\| \cdot \|P_K u - P_K v\|.$$

Odtud plyne naše nerovnost.

Věta 2.1. *Buď $\gamma > 0$ libovolné dané. Pak $u \in \mathbb{V}$ je řešením nerovnice* (1.7) *právě když*

$$u = P_K(u - \gamma(A(u) - f)).$$

D ů k a z. Podle lemmatu 2.1 je poslední rovnost ekvivalentní s podmínkou

$$u \in K, \quad \langle u - \gamma(A(u) - f) - u, v - u\rangle \leq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K.$$

To je však ekvivalentní s (1.7). □

Zdůrazněme, že pokud K není podprostor, pak rovnice z věty 2.1 je nelineární i v případě, kdy A je lineární a $f = 0$ (viz též pozn. 2.1).

Věta 2.1 nám umožní k důkazu existence řešení variační nerovnice a jeho aproximaci využít

Banachův princip kontrakce (viz např. [1], Theorem 2.3.1) Buď $\mathbb{V}$ Banachův prostor, $B\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ buď operátor kontrakce, tj. existuje $C \in 0, 1)$ takové, že

$$\|B(u) - B(v)\| \leq C\|u - v\|.$$

Pak existuje právě jeden pevný bod $\bar{u}$ operátoru B, tj. právě jedno $\bar{u} \in \mathbb{V}$ takové, že $B(\bar{u}) = \bar{u}$. Je-li $u_0 \in \mathbb{V}$ libovolné, $u_n = Bu_{n-1}$ pro $u = 1, 2, \dots$, pak $u_n \to \bar{u}$,

$$\|u_n - \bar{u}\| \leq \frac{C^{n-1}}{1 - C}\|u_1 - u_0\| \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots$$

Definice 2.2. Operátor A se nazývá lipschitzovský, jesliže existuje $M > 0$ takové, že

$$\|A(u) - A(v)\| \leq M\|u - v\| \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}.$$

Věta 2.2. *Buď $\mathbb{V}$ Hilbertův prostor, K uzavřená konvexní množina ve $\mathbb{V}$, $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ lipschitzovský operátor splňující s nějakým $C > 0$ podmínku*

$$\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq C\|u - v\|^2 \quad \textit{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}. \tag{2.3}$$

Pak pro každé $f \in \mathbb{V}$ existuje právě jedno řešení variační nerovnice (1.7)*. Zvolíme-li pevné $\gamma \in \left(0, \frac{2C}{M^2}\right)$ (kde M je z definice lipschitzovskosti), $u_0 \in \mathbb{V}$*

a položíme

$$u_n = P_K(u_{n-1} - \gamma(A(u_{n-1} - f)),$$

pak $u_n \to u$, *kde* u *je řešením* (1.7). *Navíc*

$$\|u_n - u\| \leq \frac{(1 - 2\gamma C + \gamma^2 M^2)^{n-1}}{2\gamma C - \gamma^2 M^2}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

D ů k a z . Podle věty 2.1 a Banachova principu kontrakce stačí dokázat, že operátor $S(u) = P_K(u - \gamma(A(u) - f))$ je operátorem kontrakce s konstantou $C = 1 - 2\gamma C + \gamma^2 M^2$. Podle pozn. 2.2, předpokladu lipschitzovskosti a (2.3) dostáváme

$$\begin{aligned}
\|S(u) - S(v)\|^2 &= \|P_K(u - \gamma(A(u) - f)) - P_K(v - \gamma(A(v) - f))\|^2 \\
&\leq \|u - v - \gamma(A(u) - A(v))\|^2 \\
&= \langle u - v, u - v\rangle - 2\gamma\langle u - v, A(u) - A(v)\rangle \\
&\quad + \gamma^2\langle A(u) - A(v), A(u) - A(v)\rangle \\
&\leq \|u - v\|^2 - 2\gamma C\|u - v\|^2 + \gamma^2 M^2\|u - v\|^2 \\
&= (1 - 2\gamma C + \gamma^2 M^2)\|u - v\|^2.
\end{aligned}$$

Tedy S je operátor kontrakce, pokud $\gamma \in \left(0, \frac{2C}{M^2}\right)$, neboť pak $1 - 2\gamma C + \gamma^2 M^2 < 1$. Samozřejmě je $1 - 2\gamma C + \gamma^2 M^2 \geq 0$, což plyne z výše uvedeného odhadu. (Plyne to ovšem i rovnou z toho, že předpoklad lipschitzovskosti a (2.3) zaručují $M \geq C$ a v tom případě je uvažovaný kvadratický výraz nezáporný pro všechna γ.) □

Příklad 2.1. *(Nelineární eliptická rovnice s jednostrannou okrajovou podmínkou)* Buď Ω omezená oblast s lipschitzovskou hranicí $\partial\Omega$ v $\mathbb{R}^N$, Γ_D, Γ_N otevřené disjunktní podmnožiny $\partial\Omega$, $\operatorname{meas}(\partial\Omega \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N)) = 0$, $a \geq 0$. Uvažujme funkce $a_j(x, \xi) = a_j(x, \xi_0, \dots, \xi_N)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, definované na $\Omega \times \mathbb{R}^{N+1}$, které mají Caratheodoryho vlastnost (viz pozn. 1.9). Předpokládejme, že existuje $g \in L_2(\Omega)$ a $m, C > 0$ tak, že jsou splněny následující podmínky:

$$|a_j(x, \xi) - a_j(x, \eta)| \leq m\left(\sum_{i=0}^{N} |\xi_i - \eta_i|^2\right)^{1/2} \tag{2.4}$$

pro s.v. $x \in \Omega$, všechna $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N+1}$, $j = 0, \dots, N$,

$$\sum_{j=0}^{N}(a_j(x, \xi) - a_j(x, \eta))(\xi_j - \eta_j) \geq C\sum_{j=0}^{N} |\xi_j - \eta_j|^2 \tag{2.5}$$

pro s.v. $x \in \Omega$, a všechna $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{N+1}$.

Položme $\mathbb{V} = \{\varphi \in W_2^1(\Omega);\ \varphi = 0 \text{ na } \Gamma_D \text{ ve smyslu stop}\}$ jako v příkladu 1.2.

Definujme operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ předpisem

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^{N} a_j(x; u, \nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0(x, u, \nabla u)v \, \mathrm{d}x.$$

Ukážeme, že pro

$$K = \{\varphi \in \mathbb{V};\ \varphi \geq 0 \text{ na } \Gamma_0 \text{ ve smyslu stop}\} \tag{2.6}$$

(s nějakým $\Gamma_0 \subset \Gamma_N$) a $f \in L_2(\Omega)$ (tj. také $f \in \mathbb{V}^* = \mathbb{V}$ ve smyslu poznámky 1.7) je řešení nerovnice (1.7) slabým řešením okrajové úlohy

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}(a_j(x, u, \nabla u) + a_0(x, u, \nabla u)) = f \ \text{ na } \ \Omega, \tag{2.7}$$

$$u = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_D, \quad \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u)n_j = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_N \setminus \Gamma_0, \tag{2.8}$$

$$u \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u)n_j \geq 0, \quad u \cdot \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u)n_j = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_0, \tag{2.9}$$

kde n_j značí n-tou složku vektoru vnější normály. Dále ukážeme, že dokonce pro každou konvexní uzavřenou množinu K ve $\mathbb{V}$ jsou splněny předpoklady věty 2.2, tedy speciálně je zaručena existence a jednoznačnost slabého řešení úlohy (2.7)–(2.9). Toto řešení se dostane metodou postupných aproximací.

V prvé řadě operátor A je spojitý operátor $\mathbb{V}$ do $\mathbb{V}$, neboť Němyckého operátory definované funkcemi a_j jsou za předpokladu (2.4) spojité operátory $(L_2(\Omega))^{N+1}$ do $L_2(\Omega)$ (viz pozn. 1.9). S použitím Hölderovy nerovnosti a předpokladu (2.4) dostáváme

$$\begin{aligned}
\|A(u) - A(v)\| &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \langle A(u) - A(v), \varphi\rangle \\
&= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \int_\Omega \Big[\sum_{j=1}^{N}(a_j(x, u, \nabla u) - a_j(x, v, \nabla v))\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \\
&\qquad + (a_0(x, u, \nabla u) - a_0(x, v, \nabla v))\varphi\Big] \, \mathrm{d}x \\
&\leq \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{j=1}^{N}\Big(\int_\Omega |a_j(x, u, \nabla u) - a_j(x, v, \nabla v)|^2 \, \mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \Big|\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\Big|^2 \, \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\
&\qquad + \Big(\int_\Omega |a_0(x, u, \nabla u) - a_0(x, v, \nabla v)|^2 \, \mathrm{d}x\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\varphi|^2 \, \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\
&\leq (N+1)m\Big(\int_\Omega |\nabla(u - v)|^2 + |u - v|^2 \, \mathrm{d}x\Big)^{1/2} \\
&= (N+1)m\|u - v\|,
\end{aligned}$$

tedy operátor A je lipschitzovský. Z předpokladu (2.5) dostaneme

$$\begin{aligned}\langle A(u)-A(v),u-v\rangle &= \sum_{j=1}^N \int_\Omega \Big[(a_j(x,u,\nabla u)-a_j(x,v,\nabla v))\frac{\partial(u-v)}{\partial x_j} \\ &\quad + (a_0(x,u,\nabla u)-a_0(x,v,\nabla v))(u-v)\Big]\,\mathrm{d}x \\ &\geq C\int_\Omega (|\nabla(u-v)|^2+|u-v|^2)\,\mathrm{d}x \\ &= C\|u-v\|^2.\end{aligned}$$

Jestliže tedy K je libovolná konvexní uzavřená množina ve $\mathbb{V}$, pak podle věty 2.2 existuje právě jedno řešení nerovnice (1.7) pro každou pravou stranu $f\in\mathbb{V}$. Toto řešení se dostane metodou postupných aproximací: je-li $\gamma\in\big(0,\frac{2C}{(N+1)^2m^2}\big)$, $u_0\in K$ libovolné, $u_n=P_K(u_{n-1}-\gamma(A(u_{n-1})-f))$ pro $n=1,2,\ldots$, pak $u_n\to u$, kde u je zmíněné řešení. Navíc

$$\|u_n-u\|\leq\frac{(1-2\gamma C+\gamma^2(N+1)^2m^2)^{n-1}}{2\gamma C-\gamma^2(N+1)^2m^2},\quad n=1,2,\ldots.$$

Zbývá dokázat, že pro K z (2.6) je řešení variační nerovnice slabým řešením okrajové úlohy (2.7), (2.8), (2.9). Nerovnice (1.7) má tvar

$$\begin{aligned}u\in K,\quad &\int_\Omega\sum_{j=1}^N a_j(x,u,\nabla u)\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)+a_0(x,u,\nabla u)(v-u)\,\mathrm{d}x \\ &\geq\int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x\quad\text{pro všechna } v\in K.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že všechny funkce a_j i řešení u jsou tak hladké, že můžeme provést všechny následující operace. (To ve skutečnosti není pravda, ale i bez tohoto předpokladu lze použít stejné úvahy jako v pozn. 1.14). Stejně jako v příkladu 1.2 z (2.10) plyne volbou $v=u\pm\varphi$ pro $\varphi\in\mathcal{D}(\Omega)$ libovolné a užitím Greenovy formule

$$-\sum_{j=1}^N\frac{\partial}{\partial x_j}(a_j(x,u,\nabla u)+a_0(x,u,\nabla u))=f\quad\text{na }\Omega\ .$$

Vynásobením rovnice výrazem $v-u$ a opětovým užitím Greenovy formule dostaneme

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\sum_{j=1}^N a_j(x,u,\nabla u)\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j}-\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)+a_0(x,u,\nabla u)(v-u)\,\mathrm{d}x \\ &\quad-\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^N a_j(x,u,\nabla u)n_j(v-u)\,\mathrm{d}S=\int_\Omega f(v-u)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Odtud a z toho, že je splněna nerovnice (2.10), plyne

$$\int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u) n_j (v - u) \, \mathrm{d}S \geq 0 \quad \text{pro všechna } \ v \in K.$$

Volbou $v = u + w$, $w \in K$, $w = 0$ na $\Gamma_N \setminus \Gamma_0$ dostaneme

$$\int_{\Gamma_0} \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u) n_j w \, \mathrm{d}S \geq 0 \quad \text{pro všechna } \ w = 0 \ \text{ na} \Gamma_N \setminus \Gamma_0, \ \ w \geq 0 \ \text{ na } \ \Gamma_0,$$

což znamená (v případě hladkých funkcí) $\sum a_j(x, u, \nabla u) n_j \geq 0$ na Γ_0 (srov. s úvahami v příkladu 1.2). Analogicky volbou $v = u \pm w$, $w = 0$ na Γ_0

$$\int_{\Gamma_n \setminus \Gamma_0} \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u) n_j w \, \mathrm{d}S = 0 \quad \text{pro všechna } w \in \mathbb{V}, \ \ w = 0 \ \text{ na } \ \Gamma_0,$$

což znamená (v případě hladkých funkcí) $\sum a_j(x, u, \nabla u) n_j = 0$ na $\Gamma_N \setminus \Gamma_0$. Volbou $v = 0$ dostáváme nyní

$$\int_{\Gamma_N} \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u) n_j u \, \mathrm{d}S = \int_{\Gamma_0} \sum_{j=1}^{N} a_j(x, u, \nabla u) n_j u \, \mathrm{d}S \leq 0,$$

odkud vzhledem k nezápornosti integrandu plyne poslední podmínka v (2.9)

3 Monotonní operátory

Definice 3.1. Řekneme, že operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ je

(α) monotonní, jestliže $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \geq 0$ pro každé $u, v \in \mathbb{V}$;

(β) striktně monotonní, jestliže $\langle A(u) - A(v), u - v\rangle > 0$ pro $u, v \in \mathbb{V}$, $u \neq v$.

Lemma 3.1. *Obsahuje-li množina K s každými dvěma body také jejich součet a obsahuje-li nulový prvek prostoru $\mathbb{V}$, pak bod $u \in \mathbb{V}$ je řešením úlohy* (1.7) *právě když $u \in K$ a*

$$\langle A(u), v\rangle \geq \langle f, v\rangle \quad \textit{pro každé } v \in K, \tag{3.1}$$

$$\langle A(u), u\rangle = \langle f, u\rangle. \tag{3.2}$$

D ů k a z. Nechť platí (1.7). Dosadíme-li $v = w + u$ pro $w \in K$ libovolné a píšeme opět v místo w, dostaneme (3.1). Volbou $v = 2u$ a $v = 0$ dostaneme (3.2). Opačně, odečtením (3.2) od (3.1) dostáváme ihned (1.7). □

Lemma 3.2. *Jeli operátor A monotonní a spojitý a $K \subset \mathbb{V}$ je konvexní uzavřená množina, pak je bod $u \in \mathbb{V}$ řešením úlohy* (1.7) *právě když platí*

$$u \in K, \quad \langle A(v), v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle \quad \textit{pro každé } v \in K. \tag{3.3}$$

D ů k a z. Platí-li (1.7), pak z monotonnosti operátoru A plyne

$$\langle A(v), v - u\rangle = \langle A(v) - A(u), v - u\rangle + \langle A(u), v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle$$

pro libovoné $v \in K$, tj. (3.3).

Nechť naopak platí (3.3). Pro $w \in K$, $t \in [0, 1]$ je $u + t(w - u) \in K$, neboť množina K je konvexní. Z (3.3) dostáváme

$$t\langle A(u + t(w - u)), w - u\rangle \geq t\langle f, w - u\rangle.$$

Pro $t \in (0, 1]$ můžeme obě strany dělit číslem t a pak provést (s užitím spojitosti operátoru A) limitní přechod $t \to 0+$. Dostaneme tak (1.7). □

Definice 3.2. *Řekneme, že operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ je koercivní na K, jestliže existuje bod $v_0 \in K$ takový, že*

$$\lim_{v \in K,\, \|v\| \to \infty} \frac{\langle A(v), v - v_0\rangle}{\|v\|} = +\infty. \tag{3.4}$$

Věta 3.1. *Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, K uzavřená konvexní množina ve $\mathbb{V}$, $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ spojitý a monotonní operátor. Je-li množina K neomezená, předpokládejme navíc, že A je koercivní na K. Pak pro každé $f \in \mathbb{V}^*$ existuje řešení úlohy* (1.7).

D ů k a z . Větu dokážeme nejdříve za dodatečného předpokladu, že K je omezená. V tom případě uvažujme posloupnost uzavřených konvexních množin K_m $(m = 1, 2, \dots)$ takových, že

$$K_m \subset K_{m+1} \subset K, \quad m = 1, 2, \dots, \ K_m \subset \mathbb{V}_m, \ \mathbb{V}_m \text{ je } m\text{-rozměrný} \tag{3.5}$$
$$\text{podprostor prostoru } \mathbb{V}, \ \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \text{ je hustá v } K.$$

Ukážeme, že pro každé m existuje řešení úlohy

$$u \in K_m, \quad \langle Au_m, v - u_m\rangle \geq \langle f, w - u_m\rangle \text{ pro všechna } w \in K_m. \tag{3.6}$$

Buď tedy m pevné. Na prostoru $\mathbb{V}_m$ zaveďme skalární součin $\langle \cdot, \cdot \rangle_m$. Je-li $g \in \mathbb{V}^*$, pak zobrazení $w \to \langle g, w\rangle$ je spojitý lineární funkcionál na $\mathbb{V}_m$. Podle Rieszovy věty o reprezentaci spojitých lineárních funkcionálů na Hilbertově prostoru proto existuje právě jedno $\pi g \in \mathbb{V}_m$ takové, že

$$\langle g, w\rangle = \langle \pi g, w\rangle_m \quad \text{pro všechna } w \in \mathbb{V}_m.$$

Tedy (3.6) lze psát ve tvaru

$$u_m \in K_m, \quad \langle \pi A(u_m), w - u_m\rangle_m \geq \langle \pi f, w - u_m\rangle_m \quad \text{pro všechna } w \in K_m.$$

Označíme-li P_m projekci na konvexní uzavřenou množinu K_m v prostoru $\mathbb{V}_m$, pak poslední nerovnost je podle věty 2.1 (ve které uvažujeme $\gamma = 1$ a πA, πf místo A, f) ekvivalentní s rovnicí

$$u_m = P_m(u_m + \pi f - \pi A(u_m)). \tag{3.7}$$

Zobrazení $u \to P_m(u + \pi f - \pi A(u))$ je spojité zobrazení omezené konvexní uzavřené množiny K_m do sebe a proto podle Browerovy věty o pevném bodu (viz např. [1], Theorem 5.13) existuje pevný bod tohoto zobrazení, tj. u_m splňující (3.7), tj. také (3.6).

Ukážeme dále, že $u_m \rightharpoonup u$, kde u je řešení původní úlohy (1.7). Předpokládáme stále, že K je omezená a tedy posloupnost u_m je omezená. Protože $\mathbb{V}$ je reflexivní, existuje tedy podposloupnost u_{n_m} a $u \in \mathbb{V}$ takové, že $u_{n_m} \rightharpoonup u$ pro $m \to +\infty$ (viz pozn. 1.5). Konvexní uzavřená množina je slabě uzavřená (viz např. [1]), tedy $u \in K$.

Podle lemmatu 3.2 je (3.6) ekvivaletní s úlohou

$$u_m \in K_m, \quad \langle A(v), w - u_m\rangle \geq \langle f, w - u_m\rangle \quad \text{pro všechna } w \in K_m.$$

Podle předpokladu (3.5) k libovolnému $v \in K$ existují $v_m \in K_m$ taková, že $v_m \to v$. Položíme-li v poslední nerovnici $w = v_m$, dostaneme limitním přechodem

$$u \in K, \quad \langle A(v), v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle.$$

Ale $v \in K$ bylo libovolné, tedy máme (3.3), což je ale podle lemmatu 3.2) ekvivalentní s úlohou (1.7).

Buď nyní K neomezená. Pro každé $R > 0$ položme $K_R = K \cap B_R(0)$, kde $B_R(0) = \{v \in \mathbb{V};\ \|v\| \leq R\}$ (koule s poloměrem R a středem v počátku). Množina K_R je konvexní a uzavřená a proto podle první části důkazu pro každé $R > 0$ existuje u_R takové, že

$$u_R \in K_R,\ \langle A(u_R), v - u_R\rangle \geq \langle f, v - u_R\rangle \quad \text{pro všechna } v \in K_R. \tag{3.8}$$

Nejprve ukažme, že z koercivity operátoru A plyne existence $C > 0$ takového, že $\|u_R\| \leq C$ pro všechna $R > 0$. Předpokládejme, že to není pravda, tj. existuje posloupnost R_n taková, že $R_n \to \infty$, $\|u_{R_n}\| \to \infty$. Buď v_0 prvek z definice koercivity. Pro $R > \|v_0\|$ je $v_0 \in K_R$ a tedy

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{\langle A(u_{R_n}), u_{R_n} - v_0\rangle}{\|u_{R_n}\|} &= \limsup_{n\to\infty} \frac{\langle A(u_{R_n}), u_{R_n} - v_0\rangle}{\|u_{R_n} - v_0\|}\frac{\|u_{R_n} - v_0\|}{\|u_{R_n}\|} \\ &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\langle f, u_{R_n} - v_0\rangle}{\|u_{R_n} - v_0\|}\frac{\|u_{R_n} - v_0\|}{\|u_{R_n}\|} \leq \|f\|.\end{aligned}$$

To je spor s předpokladem koercivity (3.4), neboť podle něho by měl výraz na začátku těchto odhadů konvergovat do nekonečna.

Buď nyní $R > C$. Ukážeme, že pak je u_R řešení původní variační nerovnice (1.7). Pro $w \in K$ libovolné existuje $\xi > 0$ tak malé, že $v = (1-\xi)u_R + \xi w \in K_R$. Dosazením do (3.8) dostáváme

$$\xi\langle A(u_R), w - u_R\rangle \geq \xi\langle f, w - u_R\rangle.$$

Vydělením ξ a z libovolnosti $w \in K$ plyne (1.7). □

Věta 3.2. *Je-li operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ striktně monotonní, $K \subset \mathbb{V}$ je uzavřená konvexní množina, pak úloha* (1.7) *má nejvýše jedno řešení.*

D ů k a z. Kdyby u_1, u_2 byla dvě řešení úlohy (1.7), platilo by speciálně

$$\begin{aligned}\langle A(u_1), u_2 - u_1\rangle &\geq \langle f, u_2 - u_1\rangle, \\ \langle A(u_2), u_1 - u_2\rangle &\geq \langle f, u_1 - u_2\rangle.\end{aligned}$$

Sečtením těchto nerovností dostáváme $\langle A(u_1) - A(u_2), u_2 - u_1\rangle \geq 0$. Odtud a z toho, že operátor A je striktně monotonní, plyne $u_1 = u_2$. □

Věta 3.3. *Je-li operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ spojitý a monotonní, $K \subset \mathbb{V}$ je uzavřená konvexní množina, pak všechna řešení úlohy* (1.7) *tvoří konvexní uzavřenou množinu.*

D ů k a z. Provede se snadno na základě lemmatu 3.2. □

Poznámka 3.1. V případě $K = \mathbb{V}$ je nerovnice (1.7) ekvivalentní s podmínkou

$$\langle A(u), w\rangle = \langle f, w\rangle \quad \text{pro všechna } w \in \mathbb{V},$$

tedy s rovnicí $A(u) = f$. Tedy pokud A je spojitý, monotonní a koercivní na $K = \mathbb{V}$, pak věta 3.1 zaručuje existenci řešení zmíněné rovnice. Za předpokladu striktní monotonnosti věta 3.2 zaručuje jeho jednoznačnost.

Příklad 3.1. *(Rovnice s p-Laplaciánem a jednostrannou okrajovou podmínkou s kosou derivací)* Buď opět Ω omezená oblast s lipschitzovskou hranicí v $\mathbb{R}^N$, Γ_D, Γ_N otevřené disjunktní podmnožiny $\partial\Omega$, $\mathrm{meas}(\partial\Omega \setminus (\Gamma_D \cup \Gamma_N)) = 0$, $a \geq 0$. Pomocí variační nerovnice lze formulovat následující okrajovou úlohu (pro dané reálné $p \geq 2$):

$$-\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a|u|^{p-2}u = f \quad \text{na } \Omega, \tag{3.9}$$

$$u = 0 \quad \text{na } \Gamma_D, \tag{3.10}$$

$$u \geq 0,\ \sum_{j=1}^{N}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_j \geq 0,\ u \cdot \sum_{j=1}^{N}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}n_j = 0 \text{ na } \Gamma_N, \tag{3.11}$$

kde n_j je j-tá složka jedotkového vektoru vnější normály $n = [n_1, \dots, n_N]$. Tedy $\sum_{j=1}^N \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j$ je pro $p = 2$ derivace ve směru vnější normály, pro $p > 2$ je to tzv. „kosá derivace“ odpovídající v jistém smyslu našemu diferenciálnímu operátoru, jak uvidíme níže. Položíme

$$\mathbb{V} = \{v \in W_p^1(\Omega) \colon v = 0 \text{ na } \Gamma_D \text{ ve smyslu stop}\},$$
$$K = \{v \in \mathbb{V} \colon v \geq 0 \text{ na } \Gamma_N \text{ ve smyslu stop}\}.$$

Pak $\mathbb{V}$ je reflexivní Banachův prostor s normou

$$\|u\| = (\int_\Omega \sum_{j=1}^{N}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^p + |u|^p \,\mathrm{d}x)^{1/p}$$

a K je uzavřená konvexní množina ve $\mathbb{V}$. Definujme operátor $A : \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ předpisem

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega \sum_{j=1}^{N}\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j} + a|u|^{p-2}uv \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}.$$

Němyckého operátor $u \to |u|^{p-2}u$ je (podle věty o Němyckého operátoru z poznámky 1.9) spojité zobrazení prostoru $L_p(\Omega)$ do $L_{p^*}(\Omega)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ (tj. $p^* = \frac{p}{p-1}$), neboť $\frac{p}{p^*} = p - 1$ a funkce $h(s) = |s|^{p-2}s$ splňuje předpoklad (1.23) s

$m=1$, $p_1=p$, $r=p^*$. Tedy operátor $\frac{\partial u}{\partial x_j} \to \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}$ je spojité zobrazení prostoru $\mathbb{V}$ do $L_{p^*}(\Omega)$. Pro $u,v\in\mathbb{V}$ máme tedy speciálně $\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L_{p^*}(\Omega)$, $\frac{\partial v}{\partial x_j}\in L_p(\Omega)$. Odtud plyne, že výše uvedeným vztahem je pro každé $u\in\mathbb{V}$ definován prvek $A(u)\in\mathbb{V}^*$. (Spojitost tohoto funkcionálu plyne z Hölderovy nerovnosti.) Takto definovaný operátor $A\colon\mathbb{V}\to\mathbb{V}^*$ je spojitý. Je-li totiž $u_n\to u$ ve $\mathbb{V}$, pak s užitím Hölderovy nerovnosti a zmíněné spojitosti Němyckého operátoru dostáváme

$$
\begin{aligned}
\|A(u_n)-A(u)\|_* = \sup_{\|v\|\le 1}\int_\Omega\biggl(&\sum_{j=1}^N\Bigl(\Bigl|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\Bigr|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr)\frac{\partial v}{\partial x_j}\\
&+a(|u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u)v\biggr)\,\mathrm{d}x\\
\le \sup_{\|v\|\le 1}&\sum_{j=1}^N\Bigl(\int_\Omega\Bigl|\Bigl|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\Bigr|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|^{p-2}\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|\Bigr|^{p^*}\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p^*}\\
&\times\Bigl(\int_\Omega\Bigl|\frac{\partial v}{\partial x_j}\Bigr|^p\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p}\\
&+\Bigl(\int_\Omega\bigl||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u\bigr|^{p^*}\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p^*}\cdot\Bigl(\int_\Omega|v|^p\,\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p}\\
\le \sum_{j=1}^N&\Bigl(\int_\Omega\Bigl|\Bigl|\frac{\partial u_n}{\partial x_j}\Bigr|^{p-2}\frac{\partial u_n}{\partial x_j}-\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|^{p^*}\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p^*}\\
&+\Bigl(\int_\Omega\bigl||u_n|^{p-2}u_n-|u|^{p-2}u\bigr|^{p^*}\mathrm{d}x\Bigr)^{1/p^*}\to 0.
\end{aligned}
$$

Ihned se zjistí, že v případě $a>0$ je A koercivní na libovolné K obsahující $v_0=0$:

$$\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{\langle A(u),u\rangle}{\|u\|}=\lim_{\|u\|\to\infty}\frac{1}{\|u\|}\int_\Omega\sum_{j=1}^N\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|^p+|u|^p\,\mathrm{d}x=\lim_{\|u\|\to\infty}\|u\|^{p-1}=+\infty.$$

Pokud navíc $\operatorname{meas}\Gamma_D>0$, pak Φ je koercivní i pro $a=0$ (podrobně viz pozn. 1.10). Z monotonnosti funkce $h(s)=|s|^{p-2}s$ plyne snadno, že A je striktně monotonní. A je navíc potenciální, neboť je $A=\Phi'$, kde

$$\Phi(u)=\frac{1}{p}\int_\Omega\Bigl(\sum_{j=1}^N\Bigl|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Bigr|^p+|u|^p\Bigr)\,\mathrm{d}x.$$

Ukažme ještě, že operátor A je i striktně monotonní. Užijeme toho, že ke každému $q>0$ existuje $C>0$ takové, že

$$\int_0^1|a+tb|^q\,\mathrm{d}t\ge C|b|^q\quad\text{pro všechna reálná } a,b. \tag{3.12}$$

Podrobně viz pozn. 3.2 níže. Pro libovolnou diferencovatelnou funkci g (speciálně pro $g(s) = |s|^{p-2}s$) platí

$$g(t_2) - g(t_1) = \int_0^1 g'(t_1 + \xi(t_2 - t_1))(t_2 - t_1)\,\mathrm{d}\xi.$$

Dostáváme tak

$$\begin{aligned}
&\langle A(u) - A(v), u - v\rangle \\
&\quad = \int_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j} - \Big|\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big) \\
&\qquad + a(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v)(u - v)\Bigg]\,\mathrm{d}x \\
&\quad = (p-1)\int_\Omega\int_0^1 \Bigg[\sum_{j=1}^N \Big|\frac{\partial v}{\partial x_j} + \xi\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)\Big|^{p-2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)^2 \\
&\qquad + a|v + \xi(u - v)|^{p-2}(u - v)^2\Bigg]\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&\quad \geq C\int_\Omega \Bigg[\sum_{j=1}^N \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j} - \frac{\partial v}{\partial x_j}\Big)^2 + |u - v|^{p-2}(u - v)^2\Bigg]\,\mathrm{d}x \\
&\quad \geq C_1\|u - v\|^p.
\end{aligned}$$

Poslední výraz je ovšem kladný pro $u \neq v$. V případě $\operatorname{meas}\Gamma_D > 0$ dostáváme tento odhad i pro $a = 0$. Jsou tedy ověřeny předpoklady vět 3.1, 3.2 a z nich plyne existence a jednoznačnost slabého řešení naší variační nerovnice. Ukážeme dále, že je to skutečně slabé řešení zmíněné okrajové úlohy.

Je-li u řešení nerovnice, pak obvyklým způsobem (užitím testovacích funkcí $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ a Greenovy formule – viz příklad 1.2 a pozn. 1.12 – dostaneme

$$-\sum_{j=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a|u|^{p-2}u = f \quad \text{na } \Omega.$$

Srov. s příkladem 1.2 a pozn. 1.14. Odtud násobením funkcí $v - u$, integrací a užitím Greenovy formule

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{j=1}^N \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big(\frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + |u|^{p-2}u(v - u)\,\mathrm{d}x& \\
- \int_{\Gamma_N} \sum \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_j} n_j (v - u)\,\mathrm{d}\Gamma& \\
= \int_\Omega f(v - u)\,\mathrm{d}x.&
\end{aligned}$$

Porovnáním s původní nerovnicí (zapsanou pomocí integrálů) odtud

$$\int_{\Gamma_N} \sum_{j=1}^{N} \Big|\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_j} n_j (v-u)\,\mathrm{d}\Gamma \geq 0$$
$$\text{pro všechna } v \in \mathbb{V},\ \ v \geq 0 \text{ na } \Gamma_N.$$

Odtud se okrajové podmínky na Γ_N odvodí úplně stejně jako v příkladu 1.2.

Poznámka 3.2. Pokud $\operatorname{sign} a = \operatorname{sign} b$, pak nerovnost (3.12) je zřejmá s $C = \int_0^1 t^q\,\mathrm{d}t = \frac{1}{q+1}$; pro $a < 0$, $b > 0$, $|a| < b$ je

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |a+tb|^q\,\mathrm{d}t &= \int_0^{-a/b} (-a-tb)^q\,\mathrm{d}t + \int_{-a/b}^1 (a+tb)^q\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-a}^0 \frac{y^q}{b}\,\mathrm{d}y + \int_0^{a+b} \frac{y^q}{b}\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{(-a)^{q+1}}{(q+1)b} + \frac{(a+b)^{q+1}}{(q+1)b} \geq C\frac{(-a+a+b)^{q+1}}{(q+1)b}.
\end{aligned}$$

Podobně se (3.12) dokáže i pro ostatní případy.

Běžná jsou další zobecnění třídy monotonních operátorů, např. pdeudomonotonní operátory, operátory typu M nebo typu S, pro něž je opět možno opět použít Galerkinovu metodu. Viz např. [9]. Umožňuje to uvažovat obecnější diferenciální rovnice, např. v příkladu 3.1 není nutný předpoklad $a \geq 0$.

4 Metoda penalizace

Víme už, že v případě potenciálních operátorů řešit variační nerovnici vlastně znamená hledat bod, ve kterém vhodný funkcionál nabývá svého minima na konvexní uzavřené množině K. Metoda penalizace v případě potenciálního operátoru spočívá v nahrazení tohoto funkcionálu posloupností funkcionálů definovaných na celém prostoru $\mathbb{V}$ takových, že posloupnost jejich minimizérů na $\mathbb{V}$ se blíží k minimizéru původního funkcionálu na K.

Definice 4.1. Penalizačním funkcionálem (penalizátorem) příslušným množině K nazveme funkcionál Ψ na $\mathbb{V}$ takový, že

$$\Psi(v) = 0 \text{ pro všechna } v \in K, \quad \Psi(v) > 0 \text{ pro všechna } v \in \mathbb{V} \setminus K. \tag{4.1}$$

Původní funkcionál Φ z kapitoly 1 nahradíme funkcionálem Φ_ε definovaným předpisem

$$\Phi_\varepsilon(v) = \Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(v).$$

Jde nyní o to, za jakých předpokladů existují u_ε taková, že

$$\Phi(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(u_\varepsilon) = \min_{v\in\mathbb{V}}\Big(\Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(v)\Big) \tag{4.2}$$

a přitom v nějakém smyslu platí $u_\varepsilon \to u_0$ pro $\varepsilon \to 0_+$, kde

$$u_0 \in K, \quad \Phi(u_0) = \min_{v\in K}\Phi(v). \tag{4.3}$$

Věta 4.1. *Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, $K \subset \mathbb{V}$ uzavřená konvexní množina, $\Phi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ slabě zdola polospojitý konvexní funkcionál koercivní na K a zdola omezený na $\mathbb{V}$. Buď $\Psi : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ slabě zdola polospojitý konvexní penalizační funkcionál příslušný množině K, koercivní na $\mathbb{V}$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in \mathbb{V}$ splňující (4.2). Je-li $\varepsilon_n \to +\infty$, pak existuje vybraná posloupnost ε_{k_n} taková, že $u_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup u_0$, kde u_0 splňuje (4.3).*

Důkaz. Je-li $u_n \rightharpoonup u$, pak za našich předpokladů pro každé pevné $\varepsilon > 0$ je

$$\Phi(u) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(u) \le \liminf \Phi(u_n) + \frac{1}{\varepsilon}\liminf \Psi(u_n) \le \liminf\Big(\Phi(u_n) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(u_n)\Big),$$

$$\lim_{v\in K,\, \|v\|\to\infty}\Big(\Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(v)\Big) = \lim_{v\in K,\, \|v\|\to\mathbb{V}}\Phi(v) = +\infty,$$

$$\lim_{v\in \mathbb{V}\setminus K,\, \|v\|\to\infty}\Big(\Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(v)\Big) \ge C + \lim_{v\in \mathbb{V}\setminus K,\, \|v\|\to+\infty}\frac{1}{\varepsilon}\Psi(v) = +\infty,$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je konstanta, kterou je Φ podle předpokladu omezen na celém $\mathbb{V}$ zdola. Tedy funkcionál $\Phi_\varepsilon = \Phi + \frac{1}{\varepsilon}\Psi$ je (pro každé pevné $\varepsilon > 0$) slabě zdola polospojitý a koercivní. Zřejmě je i konvexní. Podle věty 1.4 a předpokladu (4.1) pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $u_\varepsilon \in \mathbb{V}$ takové, že

$$\Phi(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(u_\varepsilon) = \min_{v\in\mathbb{V}}\Big(\Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon}\Psi(v)\Big) \le \min_{v\in K}\Phi(v). \tag{4.4}$$

Buď $\varepsilon_n \to 0_+$. Posloupnost u_{ε_n} je omezená, neboť jinak by podle předpokladu koercivity bylo

$$\lim\Big(\Phi(u_{\varepsilon_n}) + \frac{1}{\varepsilon_n}\Psi(u_{\varepsilon_n})\Big) = +\infty$$

a to by byl spor s (4.4). Vzhledem k reflexivnosti prostoru $\mathbb{V}$ existuje vybraná posloupnost ε_{k_n} taková, že $u_n := u_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup u_0$ pro nějaké $u_0 \in \mathbb{V}$. Z (4.4) plyne omezenost $\frac{1}{\varepsilon_n}\Psi(u_n)$ a tedy $\Psi(u_n) \to 0$. Ze slabé polospojitosti zdola dostaneme $\Psi(u_0) \le \liminf \Psi(u_n) = 0$, tedy $\Psi(u_0) = 0$, tj. vzhledem k (4.1) $u_0 \in K$.

Dále z předpokladu polospojitosti zdola funkcionálu Φ, (4.4) a (4.1) plyne

$$\begin{aligned}\Phi(u_0) \le \liminf \Phi(u_n) &= \liminf\Big[\Big(\min_{v\in\mathbb{V}}(\Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon_{k_n}}\Psi(v)\Big) - \frac{1}{\varepsilon_{k_n}}\Psi(u_n)\Big]\\ &\le \liminf \min_{v\in\mathbb{V}}\Big(\Phi(v) + \frac{1}{\varepsilon_{k_n}}\Psi(v)\Big) \le \min_{v\in K}\Phi(v),\end{aligned}$$

tedy nutně platí (4.3). □

Poznámka 4.1. Pokud Φ je navíc striktně konvexní, pak u_ε jsou určeny jednoznačně a $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ pro $\varepsilon \rightharpoonup 0_+$, kde u_0 je jediný bod splňující podmínku (4.3). První tvrzení plyne z věty 1.5 a z toho, že součet striktně konvexního a konvexního funkcionálu je striktně konvexní. Kdyby neplatilo druhé tvrzení, dostali bychom podobnými úvahami jako v předcházejícím důkazu existenci posloupností $\varepsilon_{k_n} \to 0_+$, $\varepsilon_{s_n} \to 0_+$ takových, že $u_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup u^1$, $u_{\varepsilon_{s_n}} \rightharpoonup u^2$, $u^1 \ne u^2$, u^1, u^2 splňují $\Phi(u^1) = \Phi(u^2) = \min_{v\in K}\Phi(v)$. To by byl spor s větou 1.5.

Z hlediska existence řešení nerovnice věta 4.1 nedává nic nového (viz věta 1.4). Vypovídá však o možnosti aproximace řešení úlohy o minimu funkcionálu na konvexní uzavřené množině (tj. variační úlohy s vazbou danou množinou K) pomocí řešení variačních úloh bez vazby.

Poznámka 4.2. Připomeňme, že vnoření $W_2^1 \subset L_2$ je kompaktní (viz např. [1], [8]). Odtud plyne, že pokud $\mathbb{V}$ je nějaký podprostor prostoru $W_2^1(\Omega)$ a $u_n \rightharpoonup u$ ve $\mathbb{V}$, pak $u_n \to u$ v L_2 .

Dále budeme vyšetřovat metodou penalizace obecnější případ, kdy operátor A není potenciální.

Definice 4.2. Řekneme, že operátor $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ je ohraničený, jestliže zobrazuje omezené množiny (v normě prostoru $\mathbb{V}$) na omezené množiny (v normě prostoru $\mathbb{V}^*$).

Definice 4.3. Operátorem penalizace příslušným množině K rozumíme operátor $\beta\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ takový, že

$$\beta u = 0 \quad \text{právě když } u \in K. \tag{4.5}$$

Naším cílem je ukázat, že řešení nerovnice lze za jistých předpokladů aproximovat řešením penalizační rovnice

$$A(u) + \frac{1}{\varepsilon}\beta u = f. \tag{4.6}$$

Věta 4.2. *Buď $\mathbb{V}$ reflexivní Banachův prostor, K uzavřená konvexní množina ve $\mathbb{V}$, $A\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ spojitý, monotonní, ohraničený a koercivní operátor na K s $v_0 = 0 \in K$. Nechť $\beta\colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ je spojitý, monotonní operátor penalizace příslušný K. Buď $f \in \mathbb{V}^*$ dané. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje řešení $u_\varepsilon \in \mathbb{V}$ penalizační rovnice (4.6). Z každé posloupnosti $\varepsilon_n \to 0_+$ lze vybrat podposloupnost ε_{k_n} tak, že $u_n := u_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup u$, kde u je řešení nerovnice (1.7). Je-li A navíc striktně monotonní, pak řešení u_ε penalizační rovnice je určeno jednoznačně a $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ pro $\varepsilon \to 0_+$, kde u je jediné řešení nerovnice (1.6).*

Jestliže A navíc splňuje podmínku (2.3), pak $u_\varepsilon \to u$ pro $\varepsilon \to 0_+$.

D ů k a z. Z předpokladů plyne, že pro dané $\varepsilon > 0$ je operátor $A + \frac{1}{\varepsilon}\beta$ spojitý a monotonní. Z předpokladu $0 \in K$, (4.5) a monotonnosti operátoru β dostaneme $\langle \beta u, u\rangle = \langle \beta u - \beta(0), u - 0\rangle \geq 0$, tedy z koercivity operátoru A s $v_0 = 0$ plyne

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u, u\rangle}{\|u\|} \geq \lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\langle A(u), u\rangle}{\|u\|} = +\infty. \tag{4.7}$$

Podle věty 3.1, ve které vezmeme $K = \mathbb{V}$ (viz pozn. 3.1), pro každé pevné $\varepsilon > 0$ existuje řešení $u_\varepsilon \in \mathbb{V}$ penalizační rovnice (4.6). Po vynásobení prvkem $u_\varepsilon/\|u_\varepsilon\|$ máme

$$\frac{\langle A(u_\varepsilon), u_\varepsilon\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta u_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle}{\|u_\varepsilon\|} = \frac{\langle f, u_\varepsilon\rangle}{\|u_\varepsilon\|} \leq \|f\|_*.$$

Odtud a z (4.7) plyne existence $C > 0$ takového, že $\|u_\varepsilon\| \leq C$ pro všechna $\varepsilon > 0$. Buď $\varepsilon_n \to 0_+$. Z reflexivity prostoru $\mathbb{V}$ plyne existence vybrané posloupnosti ε_{k_n} takové, že $u_n := u_{\varepsilon_{k_n}} \rightharpoonup u$ pro nějaké $u \in \mathbb{V}$.

Z (4.6) máme $\beta u_n = \varepsilon_{k_n}(f - Au_n)$, přičemž $\{Au_n\}$ je omezená posloupnost, neboť A je ohraničený. Tedy $\beta u_n \to 0$ a s užitím (4.5) a monotonnosti

$$\langle \beta v, v - u\rangle = \lim \langle \beta v - \beta u_n, v - u_n\rangle \geq 0 \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{V}.$$

Volbou $v = u + tw$ ($t > 0$, $w \in \mathbb{V}$ libovolné) odtud

$$\langle \beta(u + tw), w\rangle \geq 0.$$

Limitní přechod $t \to 0$ dává

$$\langle \beta u, w\rangle \geq 0 \quad \text{pro každé } w \in \mathbb{V},$$

ale to znamená $\beta u = 0$, tedy $u \in K$ podle (4.5). Zbývá odvodit nerovnost v (1.7).

S užitím penalizační rovnice (4.6), předpokladu (4.5) a monotonnosti operátorů A, β dostáváme pro libovolné $v \in K$

$$\begin{aligned}\langle A(v) - f, v - u_n\rangle &= \langle A(v) - A(u_n), v - u_n\rangle + \langle A(u_n) - f, v - u_n\rangle \\ &= \langle A(v) - A(u_n), v - u_n\rangle + \frac{1}{\varepsilon_{k_n}}\langle \beta v - \beta u_n, v - u_n\rangle \geq 0.\end{aligned}$$

Limitním přechodem

$$\langle A(v) - f, v - u\rangle \geq 0 \quad \text{pro každé } v \in K$$

a tedy u je řešením nerovnice (1.7) podle lemmatu 3.2.

Je-li A navíc striktně monotonní, pak též $A + \frac{1}{\varepsilon}\beta$ je striktně monotonní a řešení u_ε úlohy (4.6) (pro libovolné pevné $\varepsilon > 0$) je určeno jednoznačně podle věty 3.2 a pozn. 3.1. Kdyby neplatilo $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, pro $\varepsilon \to 0$, kde u je jediné řešení nerovnice (1.7), pak stejnými úvahami jako výše bychom ukázali, že existuje vybraná posloupnost taková, že $u_{s_n} \rightharpoonup \widetilde{u} \neq u$, kde $\widetilde{u}$ je další řešení nerovnice (1.7), což by byl spor s jednoznačností (věta 3.2).

Nechť navíc A splňuje podmínku (2.3). Buď $\varepsilon_n \to 0$, $u_n := u_{\varepsilon_n}$. Pak s užitím penalizační rovnice (4.6) a toho, že $\beta u = 0$, $u_n \rightharpoonup u$ dostáváme

$$\begin{aligned}\|u_n - u\|^2 &\leq \langle A(u_n) - A(u), u_n - u\rangle + \frac{1}{\varepsilon_n}\langle \beta u_n - \beta u, u_n - u\rangle \\ &= \langle A(u_n) - A(u), u_n - u\rangle + \langle f - A(u_n), u_n - u\rangle \\ &= \langle f - A(u), u_n - u\rangle \to 0,\end{aligned}$$

tedy $u_n \to u$. Protože ε_n byla libovolná posloupnost splňující $\varepsilon_n \to 0$, plyne odtud $u_\varepsilon \to u$ pro $\varepsilon \to 0_+$, neboť jinak by existovala posloupnost $\varepsilon_n \to 0$ taková, že $\|u_{\varepsilon_n} - u\| > \delta$ s nějakým $\delta > 0$. □

Poznámka 4.3. Buď $\mathbb{V}$ Hilbertův prostor a položme $\beta = I - P_K$, kde P_K je projekce na K z definice (2.1). Pak β je zřejmě spojitý operátor penalizace příslušný množině K. Dále z lipschitzovskosti P_K

$$\langle \beta u - \beta v, u - v\rangle = \langle u - v, u - v\rangle - \langle P_K u - P_K v, u - v\rangle \geq \|u - v\|^2 - \|u - v\|^2 \geq 0,$$

t.j. β je monotonní. Tedy operátor β z předpokladů věty 3.1 v případě Hilbertova prostoru vždy existuje. Většinou však pracujeme s jinými operátory nežli je tento univerzální penalizátor, neboť ho neumíme použitelným způsobem vyjádřit.

Příklad 4.1. *(Penalizace pro Signoriniho okrajovou podmínku)* Uvažujme znovu nerovnici na množině $K = \{\varphi \in \mathbb{V};\ \varphi \geq 0 \text{ na } \Gamma_N\}$, kde $\mathbb{V} = \{\varphi \in W_2^1(\Omega);\ \varphi = 0$ na $\Gamma_D\}$ a operátor A definovaný předpisem

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla v + auv \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V},$$

kde $a > 0$ jako v příkladu 1.2. Z příkladu 1.2 už víme, že pro libovolné $f \in L_2(\Omega)$

existuje právě jedno řešení úlohy (1.7) a je to zároveň slabé řešení okrajové úlohy

$$-\Delta u + au = f \quad \text{na } \Omega, \tag{4.8}$$
$$u = 0 \text{ na } \Gamma_D, \quad u \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad u \cdot \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ na } \Gamma_N.$$

Chceme teď užít naše informace o metodě penalizace. Operátor $\beta = I - P_K$ z poznámky výše přímo užít nelze, protože vyjádřit projekci P_K explicitně neumíme. Označíme u^+ a u^- kladnou a zápornou část u, tj. $u^+ \geq 0$, $u^- \geq 0$, $u = u^+ - u^-$. Definujme operátor $\beta \colon \mathbb{V} \to \mathbb{V}^*$ předpisem

$$\langle \beta u, v \rangle = -\int_{\partial\Omega} u^- v \,\mathrm{d}\Gamma \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}.$$

Zřejmě je to operátor penalizace, je spojitý a

$$\langle \beta u - \beta v, u - v \rangle = -\int_{\partial\Omega} (u^- - v^-)(u - v) \,\mathrm{d}\Gamma \geq 0 \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V},$$

tedy β je též monotonní. Pro dané $\varepsilon > 0$ je funkce u řešením penalizační rovnice (4.6) právě když

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + auv \,\mathrm{d}x - \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u^- v \,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \tag{4.9}$$
$$\text{pro všechna } v \in \mathbb{V}.$$

Předpokládejme opět pro jednoduchost, že řešení úlohy (4.9) je tak hladké (alespoň $u \in W_2^2$), že můžeme užít následující úvahy. (Ve skutečnosti takovou hladkost zaručenu nemáme, ale mohli bychom postupovat podobně jako v poznámce 1.14). Dosazením libovolného $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ dostaneme s použitím Greenovy formule

$$-\Delta u + au = f \quad \text{na } \Omega.$$

Vynásobením libovolnou funkcí $v \in \mathbb{V}$, integrací a užitím Greenovy formule dále

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v + auv - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}\Gamma = \int_\Omega fv \,\mathrm{d}x \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{V}.$$

Porovnáním s (4.9) dostáváme

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \,\mathrm{d}\Gamma = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\partial\Omega} u^- v \,\mathrm{d}\Gamma \quad \text{pro každé } v \in \mathbb{V}.$$

(V posledních integrálech se vlastně integruje přes Γ_N, protože $v = 0$ na Γ_D pro $v \in \mathbb{V}$.) To ovšem znamená

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} u^- \quad \text{na } \Gamma_N.$$

Tedy řešení penalizační rovnice jsou v našem případě slabá řešení okrajové úlohy

$$-\Delta u + au = f \quad \text{na } \Omega, \tag{4.10}$$
$$u = 0 \text{ na } \Gamma_D, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{1}{\varepsilon} u^- \text{ na } \Gamma_N.$$

Operátor A je spojitý, ohraničený, v případě $a > 0$ též koercivní a splňuje podmínku (2.3). Tedy podle věty 4.2 pro každé $\varepsilon > 0$ existuje právě jedno slabé řešení u_ε okrajové úlohy (4.10) a platí $u_\varepsilon \to u$ pro $\varepsilon \to 0$ ve W_2^1, kde u je jediné slabé řešení úlohy (4.8). Pokud $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$, pak A je koercivní a splňuje podmínku (2.3) i v případě $a = 0$ (srov. s pozn. 1.10). Poslední tvrzení tedy zůstává pro $\operatorname{meas} \Gamma_D > 0$ v platnosti i pro $a = 0$.

Podotkněme ještě, že pokud nepředpokládáme hladkost funkce u a užijeme úvahy z pozn. 1.14, dostaneme pouze $\Delta u \in L_2(\Omega)$ (nemusí být $u \in W_2^2(\Omega)$), rovnici (4.10) pouze s.v. v Ω, okrajové podmínky na Γ_D a Γ_N pouze ve smyslu stop (pozn. 1.11) a funkcionálu $N(u)$ (pozn. 1.13).

5 Další příklady

Příklad 5.1. *(Úloha s volnou hranicí)*

Buď $\mathbb{V} = \mathring{W}_2^1(\Omega)$,

$$K = \{\varphi \in \mathbb{V};\ \varphi \geq 0 \text{ s.v. na } \Omega\},$$

$$\langle A(u), v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + auv \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V},$$

$f \in L_2(\Omega)$. Na prostoru $\mathbb{V}$ můžeme uvažovat skalární součin

$$\langle u, v\rangle = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}$$

a příslušnou normu $\|u\| = \langle u, v\rangle^{1/2}$, která je ekvivalentní se základní Sobolevskou normou (viz pozn. 1.10).

Ukážeme, že nerovnice (1.7) odpovídá následující úloze s volnou hranicí: hledá se podoblast $\Omega_+ \subset \Omega$ a funkce u taková, že

$$u > 0 \text{ na } \Omega_+; \quad -\Delta u + au = f \quad \text{na } \Omega_+, \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{na } \partial\Omega_+ \cap \Omega \quad \text{(derivace ve směru vnější normály k } \partial\Omega_+\text{)},$$

$$u = 0 \quad \text{na } \overline{\Omega} \setminus \Omega_+ \quad \text{(speciálně na } \partial\Omega\text{)}.$$

Tedy hledá se oblast Ω_+ taková, že na ní existuje kladné řešení rovnice, splňující na volné hranici (tj. na $\partial\Omega_+ \cap \Omega$) zároveň Dirichletovu i Neumannovu okrajovou podmínku a na zbytku $\partial\Omega_+ \cap \partial\Omega$ pouze Dirichletovu podmímku. Pro zadané Ω_+ ovšem obecně taková funkce neexistuje, úloha by byla přeurčená (můžeme požadovat na každé části hranice buď Dirichletovu nebo Neumannovu podmínku, tady chceme na části hranice obě, a navíc chceme řešení kladné). Oblast Ω_+ je neznámá stejně jako funkce u.

Buď tedy u řešení úlohy (1.7). Definujme

$$\Omega_+ = \{x \in \Omega;\ u(x) > 0\}.$$

Ukážeme, že pokud u je dostatečně hladké a zároveň hranice $\partial\Omega_+$ je dostatečně hladká (tak, že lze provést následující úvahy), pak u je řešením úlohy s volnou hranicí (5.1). Máme

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(v - u) + au(v - u) \,\mathrm{d}x \geq \int_\Omega f(v - u) \,\mathrm{d}x \quad \text{pro každé } v \in K. \tag{5.2}$$

Ke každému $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_+)$ zřejmě existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $v = u \pm \varepsilon\varphi \in K$.

Dosazením dostáváme

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + a u \varphi \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_+).$$

Použitím Greenovy formule

$$\int_\Omega (-\Delta u + au)\varphi \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_+)$$

a odtud

$$-\Delta u + au = f \qquad \text{na } \Omega_+.$$

Vynásobíme poslední rovnici libovolnou funkcí tvaru $v-u$, $v \in K$, a integrujeme přes Ω_+ s užitím Greenovy formule, dostaneme

$$\int_{\Omega_+} \nabla u \cdot \nabla(v-u) + au(v-u)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,\mathrm{d}\Gamma = \int_{\Omega_+} f(v-u)\,\mathrm{d}x$$

pro všechna $v \in K$. První integrál vlevo je možno nahradit integrálem přes celé Ω, neboť $u \equiv 0$ na $\Omega \setminus \Omega_+$, tedy též $\frac{\partial u}{\partial x_j} \equiv 0$ na $\Omega \setminus \Omega_+$. Odtud a z (5.2) dostáváme

$$\int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,\mathrm{d}\Gamma \geq \int_{\Omega\setminus\Omega_+} f(v-u)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } v \in K.$$

Ke každé funkci $v \in K$ existuje posloupnost $v_n \in K$ taková, že $v_n = v$ na Ω_+, $v_n = u$ na $\Omega \setminus \Omega_n$, $|v_n| \leq |u| + |v|$ na Ω, kde $\Omega_n = \left\{x \in \Omega\colon \operatorname{dist}(x, \Omega_+) < \frac{1}{n}\right\}$. Píšeme-li v_n místo v v poslední nerovnosti, dostaneme

$$\int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial u}{\partial n}(v_n-u)\,\mathrm{d}\Gamma \geq \int_{\Omega_n\setminus\Omega_+} f(v_n-u)\,\mathrm{d}x. \tag{5.3}$$

Přitom $\operatorname{meas}(\Omega_n \setminus \Omega_+) \to 0$ pro $n \to +\infty$, tedy s použitím Hölderovy nerovnosti a toho, že $f, u, v \in L_2(\Omega)$, dostaneme

$$\left|\int_{\Omega_n\setminus\Omega_+} f(v_n-u)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_{\Omega_n\setminus\Omega_+} |f|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_{\Omega_n\setminus\Omega_+} (|v| + 2|u|)^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \to 0.$$

Máme $v_n = v$ na $\partial\Omega_+$ a limitním přechodem $n \to \infty$ proto z (5.3) plyne

$$\int_{\partial\Omega_+} \frac{\partial u}{\partial n}(v-u)\,\mathrm{d}\Gamma \geq 0 \quad \text{pro všechna } v \in K.$$

Je ovšem $v = u = 0$ na $\partial\Omega$, tedy poslední integrál je prakticky integrálem jen přes $\partial\Omega_+ \cap \Omega$. Dosazením $v = w + u$ pro libovolné $w \in K$ dostaneme

$$\int_{\partial\Omega_+\cap\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} w\,\mathrm{d}\Gamma \geq 0 \quad \text{pro všechna } w \in K,$$

tedy $\frac{\partial u}{\partial n} \geq 0$ na $\partial\Omega_+ \cap \Omega$. Zároveň ale $\frac{\partial u}{\partial n} \leq 0$ na $\partial\Omega_+ \cap \Omega$, neboť $u > 0$ na Ω_+, $u = 0$ na $\Omega \setminus \Omega_+$. Tedy $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ na $\partial\Omega_+ \cap \Omega$.

Existence a jednoznačnost řešení plyne již z vět 1.3, 1.5 (je možno užít variační přístup jako v příkladu 1.2) nebo z vět 3.1, 3.2 (metoda monotonie). Také lze použít metodu postupných aproximací, tj.větu 2.2. Rovněž je možno užít metodu penalizace s penalizačním funkcionálem

$$\Psi(u) = \int_\Omega (u^-)^2 \,\mathrm{d}x$$

(věta 4.1) nebo s operátorem penalizace

$$\langle \beta u, v\rangle = -\int_\Omega u^- v \,\mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } u, v \in \mathbb{V}$$

(věta 4.2). Uvědomme si, že řešení u_ε penalizační rovnice (4.6) jsou slabá řešení okrajové úlohy

$$\begin{aligned} -\Delta u + au - \frac{1}{\varepsilon}u^- &= f \quad \text{na } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{na } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Z věty 4.2 plyne $u_\varepsilon \to u$ v normě W_2^1 pro $\varepsilon \to 0_+$, kde u je jediné slabé řešení zmíněné úlohy s volnou hranicí.

Poznámka 5.1. Ukažme ještě, že nerovnici (1.7) v uvažovaném případě lze chápat též jako úlohu

$$-\Delta u + au - f \geq 0, \quad u \geq 0, \quad (-\Delta u + au - f)u = 0 \quad \text{s.v. na } \Omega. \tag{5.4}$$

Volbou $v = u+w$, $w \in K\cap\mathcal{D}(\Omega)$ libovolné, a užitím Greenovy formule dostáváme totiž z (5.2)

$$\int_\Omega (-\Delta u + au - f)w \,\mathrm{d}x \geq 0 \quad \text{pro všechna } w \in \mathcal{D}(\Omega), \;\; w \geq 0 \text{ na } \Omega.$$

Odtud ihned plyne první nerovnost v (5.4). Druhá nerovnost je dána přímo tvarem K. Volbou $v = 2u$, $v = 0$ a užitím Greenovy formule (je $u = 0$ na $\partial\Omega$) dostaneme

$$\int_\Omega (-\Delta u + au - f)u \,\mathrm{d}x = 0.$$

Z nezápornosti obou činitelů v integrandu plyne poslední podmínka v (5.4).

Příklad 5.2. *(Omezení gradientu)* Uvažujme opět prostor a operátor z příkladu 5.1 a položme

$$K = \{\varphi \in \mathbb{V} \colon |\nabla\varphi| \leq 1 \text{ s.v. v } \Omega\}.$$

Ukážeme, že řešení nerovnice (1.7) s daným $f \in L_p(\Omega)$, $p \geq 2$, je v jistém smyslu řešením následující úlohy:

hledají se podmnožiny $\Omega_0, \Omega_1 \subset \Omega$, $\Omega_0 \cup \Omega_1 = \Omega$ takové, že existuje funkce $u \in \mathbb{V}$ splňující následující podmínky:

$$\begin{gathered} |\nabla u| < 1, \quad -\Delta u + au = f \quad \text{na } \Omega_1, \\ |\nabla u| = 1 \quad \text{na } \Omega_0, \\ u = 0 \quad \text{na } \partial\Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial x_j} \quad \text{jsou spojité na } \partial\Omega_0 \cap \partial\Omega_1. \end{gathered} \tag{5.5}$$

Dá se dokázat následující tvrzení o regularitě řešení naší nerovnice: je-li $f \in L_p(\Omega)$ a u řešení nerovnice (1.7), pak $u \in W_p^2(\Omega)$. Je $W_p^2(\Omega) \subset C^1(\overline{\Omega})$ pro $p > N$. Uvažujme tedy $f \in L_p(\Omega)$, $p \geq 2$, $p > N$. Pak $\frac{\partial u}{\partial x_j} \in C(\overline{\Omega})$, spec. ∇u je spojitá funkce. Označme

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{x \in \Omega : |\nabla u(x)| < 1\}, \\ \Omega_0 &= \{x \in \Omega : |\nabla u(x)| = 1\}. \end{aligned}$$

Tedy množina Ω_1 je otevřená, Ω_0 uzavřená. Předpokládejme navíc, že hranice množiny Ω_1 je dostatečně hladká, takže můžeme na Ω_1 užít Greenovu formuli. Dokázat tuto hladkost je ovšem ve skutečnosti obtížné. Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1)$, pak $|\nabla u| \leq 1 - \eta$ na $\operatorname{supp} \varphi$ (s nějakým $\eta > 0$). Tedy existuje $\varepsilon > 0$ malé takové, že $u \pm \varepsilon\varphi \in K$. (Stačí vzít $\varepsilon < \eta \cdot \max_{x \in \operatorname{supp} \varphi} |\nabla \varphi(x)|$.) Dosazením do (1.7) přepsané pomocí integrálů dostaneme

$$\pm\varepsilon \int_\Omega \nabla u \nabla v + au\varphi \, \mathrm{d}x \geq \pm\varepsilon \int_\Omega f\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Odtud ihned plyne

$$\int_{\Omega_1} \nabla u \nabla v + au\varphi \, \mathrm{d}x = \int_{\Omega_1} f\varphi \, \mathrm{d}x \quad \text{pro všechna } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1),$$

tedy

$$-\Delta u + au = f \quad \text{na } \Omega_1.$$

Podrobně viz pozn. 1.14. Ostatní podmínky v (5.5) plynou z předchozího.

Existence a jednoznačnost řešení nerovnice (1.7) jsou opět zaručeny obecnými větami z předchozích kapitol.

Literatura

[1] P. Drábek, J. Milota: Lectures on Nonlinear Analysis. Vydavatelský servis, Plzeň

[2] G. Duvaut J.-L. Lions: Les inéquations en méchanique et en physique. Dunod, Paris 1972. Též ruský a anglický překlad.

[3] A. Friedman: Variational Principles and Free-Boundary Problems. John Wiley & Sons 1982.

[4] S. Fučík, A. Kufner: Nelineární diferenciální rovnice. SNTL, Praha 1978.

[5] D. Kinderlehrer, G. Stampacchia: An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. Academic Press, New york, 1980.

[6] A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin: Základy teorie funkcí a funkcionální analýzy. SNTL, Praha 1975. (Překlad z ruštiny)

[7] M. Kučera: Úloha o kontrole teploty. Sborník 5. semináře z parciálních diferenciálních rovnic, Alšovice 1980, 13–33.

[8] A. Kufner, S. Fučík, O. John: Function Spaces. Nordhoff International publishing, Leyden 1977.

[9] J. L. Lions: Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires. Dunod Gauthier-Villars, Paris 1969. Též ruský a anglický překlad.

[10] J. F. Rodrigues: Obstacle Problems in Mathematical Physics. North-Holand 1987.