Matematické modelování ve fyzice

J. Felcman
Karlova Univerzita v Praze

KNM PRESS • PRAHA
2004

PŘEDMLUVA

1. přednáška

Matematické modelování ve fyzice - charakteristika předmětu v kontextu pre- a postgraduálního studia

1. `felcman@karlin.mff.cuni.cz`
   - Tel. 2 2191 3392
   - KNM č. dv. 422
2. Matematické modelování ve fyzice - anotace
   - F/3/MOD
   - M/3/MOD
   - M/3/VM
   - M/4/VM
3. Požadavky ke zkoušce
   - státnice (prospěl s vyznamenáním)
   - sylabus
4. Tituly
   - PhD (angličtina + projekt)
   - RNDr.
   - Mgr.
   - Bc
5. Studium v zahraničí - ERASMUS
6. Ceny udělované studentùm
7. SVOČ
8. Hodnocení učitelů - srozumitelnost 'on line'
9. Náhrada
   - 18.10. 2004 (Uni Braunschweig)
   - 25.10. 2004 (Uni Braunschweig)
   - 01.11. 2004 (Uni Braunschweig)
   - 08.11. 2004 (Uni Braunschweig)
10. Zkouška (10. leden 2005)

    část písemná

    část ústní

Práce na tomto textu byla částečně podporována Grantovou agenturou České Republiky (projekty č. 201/02/0684 a 101/01/0938), Grantovou agenturou Karlovy Univerzity (projekt č. 275/2001/B-MAT/MFF) a Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy České Republiky (projekt č. MSM113200007).

Děkuji panu Petru Šedivému, studentu MFF UK, který napsal v LaTeXu tento učební text a přispěl tak podstatnou měrou k jeho realizaci.

Praha, září 2003 J. F.

OBSAH

ÚVOD

- mechanika tekutin
- základní úlohy teorie pružných a pružně plastických těles

Literatura k přednášce: (Feistauer *et al.*, 2003), (Feistauer, 1993), (Kurzweil, 1986), (Nečas and Hlaváček, 1981)

- Reálné situace, modely, diskretizace, počítačová realizace
- Příklad charakterizující problematiku matematického modelování (přednáška na konferenci - fólie)

1

ZÁKLADNÍ ROVNICE MECHANIKY TEKUTIN

2. přednáška

Veličiny popisující proudění

- ρ hustota
- $\boldsymbol{v}$ rychlost
- E celková energie
- p tlak, atd.
- ...

jsou funkcemi prostorových souřadnic a času.

$$f = f(x,t), \quad x = (x_1, x_2, x_3),\ t \text{ - čas}$$

$x \in \Omega_t \ (\subset \mathbb{R}^3)$	- oblast vyplněná tekutinou v čase t
$t \in (0,T),\ T > 0$	- časový interval v němž uvažujeme proudění

Označme

$$\mathcal{M} = \{(x,t);\, x \in \Omega_t, t \in (0,T)\} \subset \mathbb{R}^4$$

oblast, v níž je funkce f definována. Předpokládáme, že $\mathcal{M}$ je otevřená.

Poznámka 1.1 Je-li $\Omega_t = \Omega$ (nezávislá na čase t, pak) je $\mathcal{M} = \Omega \times (0,T)$ otevřená.

Poznámka 1.2 Změna Ω_t v čase spojitá $\Rightarrow \mathcal{M}$ je otevřená.

Tekutiny mají diskrétní (molekulovou, atomovou) strukturu.
Matematický model - předpokládáme, že tekutina je kontinuum.

Základní hypotéza V každém čase $t \in (0,T)$ v každém bodě $x \in \Omega_t$ se nalézá právě jedna částice tekutiny.

Základní předpoklad Funkce popisující proudění jsou nekonečněkrát spojitě diferencovatelné (později tento předpoklad oslabíme).

Poznámka 1.3 Druhý zákon termodynamiky - za předpokladu dostatečné hladkosti funkcí je zákon splněn.

1.1 Popis proudění

Uvedeme dvě možnosti popisu proudění

1.1.1 *Lagrangeův popis proudění*

Lagrangeův popis uvažuje pohyb každé individuální částice.
Trajektorie částice je popsána rovnicí

$$x = \boldsymbol{\varphi}(X, t) \tag{1.1.1}$$

(t.j. $x_i = \varphi_i(X, t), \ i = 1, 2, 3$). X reprezentuje tzv. *referenci* určující částici. Obvykle se používá jako reference X bod, v němž se částice nalézá v čase t_0

$$X = \boldsymbol{\varphi}(X, t_0).$$

Někdy používáme detailnější popis trajektorie

$$x = \boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t). \tag{1.1.2}$$

Pak ovšem

$$X = \boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t_0),$$

za předpokladu, že reference jsou identické se souřadnicemi částic v čase t_0.

X_1, X_2, X_3 - Lagrangeovy souřadnice
x_1, x_2, x_3 - Eulerovy souřadnice

Lagrangeův popis ve tvaru 1.1.2 se používá, jestliže uvažujeme pohyb části tekutiny (piece of fluid) tvořené v každém čase t týmiž částicemi a vyplňující v čase t oblast $\mathcal{V}(t) \subset \mathbb{R}^3$.

Rychlost a *zrychlení* částice dané referencí X jsou definované

$$\text{a)} \qquad \hat{\boldsymbol{v}}(X, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(X, t) \qquad \left(= \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(X, t_0;\, t)\right) \tag{1.1.3}$$

$$\text{b)} \qquad \hat{\boldsymbol{a}}(X, t) = \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}(X, t) \qquad \left(= \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t^2}(X, t_0;\, t)\right)$$

(za předpokladu existence derivací)

1.1.2 *Eulerův popis proudění*

Sledování trajektorie každé individuální částice je (někdy) nevýhodné a nákladné (policejní kontrola rychlosti vozidel). *Eulerův popis* je založen na určení *rychlosti* $\boldsymbol{v}(x, t)$ částice tekutiny procházející bodem x v čase t. Vzhledem k (1.1.1) a (1.1.3) můžeme psát

$$\boldsymbol{v}\,(x, t) = \hat{\boldsymbol{v}}\,(X, t) = \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}\,(X, t) \quad \text{kde } x = \boldsymbol{\varphi}(X, t).$$

Za předpokladu

$$\boldsymbol{v} \in C^1(\mathcal{M})^3, \tag{1.1.4}$$

zrychlení částice procházející bodem x v čase t je

$$\boldsymbol{a}(x,t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}(x,t) + \sum_{i=1}^{3} v_i(x,t) \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_i}(x,t),$$

neboli

$$\boldsymbol{a} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad})\, \boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\boldsymbol{v}}{\mathrm{D}t}$$

(Pro jednoduchost proměnné x a t nepíšeme.)

Poznámka 1.4 Značíme

$$\mathrm{grad}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{\mathrm{T}}$$

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{D}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla$$

'Materiální (totální) derivace = lokální drivace + konvektivní derivace'

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i\, b_i$$

Zkušební otázka 1.1 Lagrangeův a Eulerův popis proudění

1.1.3 *Přechod od Eulerova k Lagrangeovu popisu*

Tento problém je ekvivalentní určení trajektorií částic tekutiny na základě daného rychlostního pole $\boldsymbol{v}(x,t)$. Trajektorie částice procházející bodem $X \in \Omega_{t_0}$ v čase $t_0 \in (0,T)$ je dána jako řešení počáteční úlohy

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{v}(x,t), \qquad x(t_0) = X \tag{1.1.5}$$

Věta 1.5 *Za předpokladu $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathcal{M})^3$ platí:*

1. Pro každé $(X, t_0) \in \mathcal{M}$ (tedy pro každou počáteční podmínku) má úloha 1.1.5 právě jedno maximální řešení $\boldsymbol{\varphi}(X, t_0; t)$ (definované pro t z intervalu $(\alpha_{X,t_0}, \beta_{X,t_0})$) (Meze intervalu závisí na počáteční podmínce!).

2. Zobrazení $\boldsymbol{\varphi}$ má spojité parciální derivace 1.řádu podle X_1, X_2, X_3, t_0, t a spojité derivace $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t \partial X_i}$, $\frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}}{\partial t_0 \partial X_i}$, $i = 1,2,3$, v množině

$$\{(X, t_0; t);\ (X, t_0) \in \mathcal{M},\ t \in (\alpha_{X,t_0}, \beta_{X,t_0})\}\,.$$

Důkaz (Kurzweil, 1986) Věta 10.1.1, 11.1.5, 13.1.1 □

Poznámka 1.6 Řešení problému 1.1.5 se nazývá maximální, je-li každé řešení tohoto problému jeho restrikcí.

Zkušební otázka **1.2** Přechod od Eulerova k Lagrangeovu popisu

↓↓↓↓↓

3. přednáška

1.2 Věta o transportu

Nechť funkce $F = F(x,t) : \mathcal{M} \to I\!R$ je Eulerova reprezentace nějaké veličiny (transportované částicemi tekutiny) a uvažujme systém částic vyplňující omezenou oblast $\mathcal{V}(t) \subset \Omega_t$ v čase t. Celkové množství veličiny dané funkcí F, která je obsažena v objemu $\mathcal{V}(t)$ v čase t je rovno integrálu

$$\mathcal{F}(t) = \int_{\mathcal{V}(t)} F(x,t)\,dx. \tag{1.2.1}$$

Příklad 1.7 $F(x,t) := \rho(x,t)$ - hustota

$$m(\mathcal{V}(t),t) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)\,dx. \tag{1.2.2}$$

$m(\mathcal{V}(t),t)$ - hmotnost tekutiny v objemu $\mathcal{V}(t)$

V dalším nás bude zajímat okamžitá změna F v závislosti na čase, tj. časová derivace

$$\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} F(x,t)\,dx. \tag{1.2.3}$$

Příklad 1.8 Zákon zachování hmotnosti (ZZH) (Hmotnost m objemu tekutiny $\mathcal{V}(t)$ nezávisí na čase t.)

Tedy

$$\frac{d\,m(\mathcal{V}(t),t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)\,dx = 0$$

Ukážeme, že platí (viz věta o trasportu (později))

$$\frac{d\mathcal{F}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} F(x,t)\,dx = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(F\boldsymbol{v})(x,t)\right] dx \tag{1.2.4}$$

kde div $\boldsymbol{v}$=$\sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

Příklad 1.9 S využitím tohoto vztahu lze zákon zachování hmotnosti vyjádřit jako tzv. rovnici kontinuity $(F := \rho)$

$$\text{R.K.} \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}) = 0, \qquad \boldsymbol{v} - \text{rychlost}$$

Problém je, že v (1.2.4) nemůžeme přímo použít větu o záměně derivace a integrálu, neboť oblast přes kterou integrujeme také závisí na čase. Proto použijeme nejprve vhodnou substituci, kterou se oblast závisející na čase převede na oblast, která již na čase nezávisí. A potom již provedeme záměnu derivace a integrálu. Předpokládejme

$$F \in C^1(\mathcal{M})$$
$$\boldsymbol{v} \in C^1(\mathcal{M})^3$$
$$\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t)$$

- je řešení z věty 1.5 o řešení problému 1.1.5

$$\frac{dx}{dt} = \boldsymbol{v}(x,t), \qquad x(t_0) = X.$$

$\boldsymbol{\varphi}$ definuje změnu oblasti $\mathcal{V}(t)$ v závislosti na čase t. Nechť t_0 je libovolný, ale pevný časový okamžik a

$$\mathcal{V}(t_0) \subset \Omega_{t_0}$$

Pak

$$\mathcal{V}(t) = \{\boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t); X \in \mathcal{V}(t_0)\}$$

(za předpokladu, že $\boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t)$ je definované pro každé $X \in \mathcal{V}(t_0)$).

Označme $J(X,t)$ Jacobian zobrazení

$$\mathcal{V}(t_0) \ni X \longrightarrow \boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t) \in \mathcal{V}(t) :$$

$$J(X,t) = \det \frac{D\boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t)}{DX} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_2}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_2}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_1}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_2}, & \frac{\partial \varphi_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} (X,\, t_0;\, t). \qquad (1.2.5)$$

Lemma 1.10 *Nechť $t_0 \in (0,T)$, $\mathcal{V}(t_0)$ je omezená oblast a nechť $\overline{\mathcal{V}(t_0)} \subset \Omega_{t_0}$. Pak exisuje interval $(t_1, t_2) \ni t_0$ tak, že*

a) zobrazení ‘ $\mathcal{V}(t_0) \ni X \longrightarrow x = \boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t) \in \mathcal{V}(t)$’ je spojitě diferencovatelné, vzájemně jednoznačné zobrazení $\mathcal{V}(t_0)$ na $\mathcal{V}(t)$ s Jacobianem (1.2.5)*, který je spojitý a omezený a splňuje podmínku:*

$$J(X,t) > 0 \;\; \forall X \in \mathcal{V}(t_0),\; \forall t \in (t_1, t_2)$$

b) platí

$$\frac{\partial J}{\partial t}(X,t) = J(X,t)\,\mathrm{div}\;\boldsymbol{v}(x,t)$$
$$x = \boldsymbol{\varphi}(X, t_0;\, t)$$

Důkaz (technický, podrobnosti viz (Feistauer, 1993) strana 27, Lemma 1.4.5)

Ad *a)*

Podle věty o lokální jednoznačnosti řešení problému (1.1.5) (viz (Kurzweil, 1986), věta 10.11) existuje $\varepsilon > 0$ :: $\forall t \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ zobrazení '$\mathcal{V}(t_0) \ni X \longrightarrow x \in \mathcal{V}(t)$' je vzájemně jednoznačné

Jeho spojitá diferencovatelnost plyne ze spojité diferencovatelnosti řešení problému 1.1.5. viz 2.část věty 1.5 Dále

$$\boldsymbol{\varphi}(X, t_0) = X \Rightarrow J(X, t_0) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial X_1}, & \frac{\partial X_1}{\partial X_2}, & \frac{\partial X_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial X_2}{\partial X_1}, & \frac{\partial X_2}{\partial X_2}, & \frac{\partial X_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial X_3}{\partial X_1}, & \frac{\partial X_3}{\partial X_2}, & \frac{\partial X_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0$$

J je spojitý. Proto $\exists\, (t_1, t_2) \subset (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ :: J je kladný a omezený na (t_1, t_2).

Ad *b)*

Při výpočtu derivace $\frac{\partial J}{\partial t}$, uvažujeme determinant $J(X, t)$ jako funkci 9 proměnných.

$$J(X, t) = \overline{J}\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_3}{\partial X_3}\right)$$

Jacobian $J(X, t)$ vyjádříme rozvojem podle i-tého řádku, $i \in \{1, 2, 3\}$

$$J(X, t) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j} D_{ij}(X, t)$$

kde $D_{ij}(X, t)$ je algebraický doplněk prvku $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}$
$D_{ij}(X, t)$ nezávisí na $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}$ takže $\frac{\partial D_{ij}}{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}\right)}(X, t) = 0$

Protože $\overline{J}(X, t)$ je lineární kombinace prvků $\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}$ s koeficienty $D_{ij},\ i, j = 1, 2, 3$ platí

$$\frac{\partial \overline{J}}{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}\right)} = D_{ij} \quad i, j = 1, 2, 3$$

Pak

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \overline{J}}{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}\right)} \frac{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j}\right)}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial X_j \partial t}$$

$$\overbrace{=}^{\text{záměna pořadí derivací}} \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t \partial X_j} = \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij} \frac{\partial\left(\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial t}\right)}{\partial X_j}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial X_j} = \sum_{i,j=1}^{3} D_{ij} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_j}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_j} D_{ij} \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{k=i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_j} D_{ij} \right) + \sum_{k\neq i} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \varphi_k}{\partial X_j} D_{ij} \right) \right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} J + \sum_{k\neq i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} 0 \right) = J \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = J \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

$\square$

Věta 1.11 *(o transportu)*
Nechť $t_0 \in (0,T)$, $\mathcal{V}(t_0)$ je omezená oblast a nechť $\overline{\mathcal{V}(t_0)} \subset \Omega_{t_0}$. $\boldsymbol{\varphi}$ definuje změnu oblasti $\mathcal{V}(t_0)$ v čase, $\boldsymbol{\varphi}$ nechť má vlastnosti z předcházejího lemmatu. φ je spojitě diferencovatelné vzájemně jednoznačné zobrazení oblasti $\mathcal{V}(t_0)$ na $\mathcal{V}(t)$ s Jacobianem (1.2.5), který je spojitý, omezený a splňuje podmínku: $J(X,t) > 0 \quad \forall X \in \mathcal{V}(t_0)$, $\forall t \in (t_1,t_2)$, kde (t_1,t_2) je znám. Nechť $F = F(X,t)$ má spojité a omezené derivace prvního řádu na množině $\{(x,t); t \in (t_1,t_2), x \in \mathcal{V}(t)\}$
Pak $\forall t \in (t_1,t_2)$ existuje konečná derivace

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F(x,t)\, dx = \int_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial F}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}\, (F\boldsymbol{v})(xt) \right] dx$$

4. přednáška

Důkaz Věta o substituci

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t)} F(x,t)\, dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}(t_0)} F(\boldsymbol{\varphi}(X,t_0;\,t),t)\, J(X,t)\, dX = \int_{\mathcal{V}(t_0)} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} \right) J + F\, J \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right] dX$$

$$= \int_{\mathcal{V}(t_0)} \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial F}{\partial x_j} v_j + F \operatorname{div} \boldsymbol{v} \right] J\, dX = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial F}{\partial t} + \nabla F\, \boldsymbol{v} + F \operatorname{div} \boldsymbol{v}\, dx = \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial F}{\partial t} + \operatorname{div}(F\boldsymbol{v})\, dx$$

$\square$

Cvičení 1.12 $\operatorname{div}(F\boldsymbol{v}) = \nabla F \cdot \boldsymbol{v} + F \operatorname{div} \boldsymbol{v}$

Zkušební otázka 1.3 Věta o transportu

Poznámka 1.13 Aplikací Greenovy věty dostáváme

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}(t)} F(x,t)\,dx}_{\text{okamžitá změna}} = \underbrace{\int\limits_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\,dx}_{\text{rychlost změny } F} + \underbrace{\int\limits_{\partial\mathcal{V}(t)} (F\,\boldsymbol{v})(x,t)\cdot n(t)\,dS}_{\text{tok veličiny hranicí}}$$

Poslední integrál vyjadřuje tok veličiny F hranicí. Je to důsledek závislosti $\mathcal{V}(t)$ na t.

Nyní již můžeme odvodit matematické formulace základních fyzikálních zákonů. ZZH - zákon zachování hmotnosti, ZZHy - zákon zachování hybnosti, ZZE - zákon zachování energie a ZZMH - zákon zachování momentu hybnosti. Ze kterých odvodíme základní diferenciální rovnice mechaniky tekutin. R.K. - rovnice kontinuity, N.S. - pohybové (Navier-Stokesovy) rovnice, R.E. - rovnice pro energii a ze ZZMH plyne symetrie tenzoru napětí.

1.3 Rovnice kontiniuty

Hustota tekutiny je funkce

$$\rho : \mathcal{M} = \{(x,t); t \in (0,T), x \in \Omega_t\} \to (0,\infty)$$

pomocí které můžeme vyjádřit hmotnost $m(\mathcal{V};\,t)$ tekutiny v libovolné oblasti $\mathcal{V} \subset \Omega_t$

$$m(\mathcal{V};\,t) = \int\limits_{\mathcal{V}} \rho(x,t)\,dx$$

Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{M})$ a $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathcal{M})^3$. A dále uvažujme libovolný čas $t_0 \in (0,T)$ a pohybující se část tekutiny tvořenou v každém časovém okamžiku týmiž částicemi a vyplňující v čase t_0 omezenou oblast $\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \Omega_{t_0}$ zvanou *kontrolní objem*. Symbolem $\mathcal{V}(t)$ označíme oblast vyplněnou těmito částicemi v čase $t \in (t_1,t_2)$, kde (t_1,t_2) je interval obsahující t_0 s vlastnostmi z lemmatu 1.10

Platí tedy $\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V}$ a podmínky a)–b) z lemmatu 1.10 jsou splněny.
Zákon zachování hmotnosti:
Hmotnost objemu tekutiny $\mathcal{V}(t)$ nezávisí na čase t.

$$\frac{dm(\mathcal{V}(t);\,t)}{dt} = 0 \qquad t \in (t_1,t_2)$$

Použitím věty o transportu dostáváme

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathcal{V}(t)} [\frac{\partial\rho}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v})(x,t)]\,dx = 0$$

Dosazením $t := t_0$ a využitím toho, že $\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V}$ dostáváme

$$\int\limits_{\mathcal{V}} [\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t_0) + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v})(x,t_0)]\,dx = 0$$

pro libovolné $t_0 \in (0,T)$ a libovolný kontrolní objem $\mathcal{V}$ v Ω_{t_0}
Ze spojitosti integrandu plyne (viz následující lemma)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,t_0) + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v})(x,t_0) = 0$$

pro libovolné $t_0 \in (0,T)$. Píšeme-li t místo t_0 dostáváme
rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v}) = 0 \qquad t \in (0,T),\ x \in \Omega_t \tag{1.3.1}$$

Lemma 1.14 *Nechť $\Omega \subset I\!R^3$ je otevřená množina, $f \in C(\Omega)$*
Pak $f \equiv 0$ v $\Omega \Leftrightarrow \int\limits_{\mathcal{V}} f\,dx = 0$ pro každou otevřenou množiny $\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \Omega$

Důkaz

$\Longrightarrow$ to je zřejmé, pokud $f \equiv 0$ pak samozřejmě $\int\limits_{\mathcal{V}} f\,dx = 0 \quad \forall\,\mathcal{V} \subset \Omega$

$\Longleftarrow$ Postupujme sporem
$\int\limits_{\mathcal{V}} f\,dx = 0 \quad \forall\,\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \Omega \quad \& \quad \exists\,x_0 \in \Omega\ ::\ f(x_0) > 0$
Ze spojitosti f plyne, že $\exists\,U(x_0)\ ::\ f(x) > 0 \quad \forall x \in U(x_0)$
Pak ovšem $\int\limits_{U(x_0)} f\,dx > 0$ a to je spor □

1.3.1 *Jiné tvary rovnice kontinuity*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\rho\cdot\boldsymbol{v} + \rho\,\operatorname{div}\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\operatorname{div}\boldsymbol{v}$$

$$\frac{\mathrm{D}\rho}{\mathrm{D}t} + \rho\,\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

Proudění můžeme rozdělit do několika skupin-stacionární, nestacionární, stlačitelné, nestlačitelné

Poznámka 1.15 Stacionární proudění, tedy $\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$. Rovnice kontinuity má tedy následující tvar

$$\operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v}) = 0$$

Poznámka 1.16 Nestlačitelné proudění, tedy $\rho \equiv konst.$ Rovnice kontinuity pro nestlačitelné proudění má tvar

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0$$

Zkušební otázka 1.4 Odvození rovnice kontinuity

1.4 Pohybové rovnice

Jsou odvozeny ze *zákona zachování hybnosti*: Okamžitá změna (časová derivace) celkové hybnosti objemu tekutiny tvořeného v každém časovém okamžiku týmiž částicemi a vyplňujícího v čase t objem $\mathcal{V}(t)$ je rovna síle působící na $\mathcal{V}(t)$.
Nechť $\rho \in C^1(\mathcal{M})$, $\boldsymbol{v} \in C^1(\mathcal{M})^3$. Celková hybnost objemu tekutiny $\mathcal{V}(t)$ je dána

$$\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathcal{V}(t);\, t) = \int\limits_{\mathcal{V}(t)} (\rho\, \boldsymbol{v})(x,t)\, dx$$

Označíme-li $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{V}(t))$ sílu působící na objem $\mathcal{V}(t)$, lze zákon zachování hybnosti zapsat

$$\text{ZZHy}: \qquad \frac{d\boldsymbol{\mathcal{H}}(\mathcal{V}(t);\, t)}{dt} = \boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{V}(t);\, t), \qquad t \in (t_1, t_2).$$

Aplikací věty o transportu dostáváme

$$\int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, v_i)(x,t) + \operatorname{div}(\rho\, v_i\, \boldsymbol{v})(x,t)\right] dx = \mathcal{F}_i(\mathcal{V}(t);\, t),$$

$$i = 1, 2, 3, \;\; t \in (t_1, t_2).$$

Vezmeme-li v úvahu, že $t_0 \in (0,T)$ je libovolný časový okamžik a $\mathcal{V}(t_0) = \mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \Omega_{t_0}$, kde $\mathcal{V}$ je libovolný kontrolní objem, dostaneme zákon zachování hybnosti ve tvaru, kde píšeme t místo t_0 :

$$\int_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)(x,t) + \operatorname{div}(\rho v_i \boldsymbol{v})(x,t)\right] dx = \mathcal{F}_i(\mathcal{V}; t), \tag{1.4.1}$$

$$\begin{aligned} &i = 1, 2, 3, \;\text{ pro libovolné } t \in (0,T) \\ &\text{a pro libovolný kontrolní objem } \mathcal{V} \text{ v } \Omega_t. \end{aligned}$$

Vektor $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{V}; t)$ se složkami $\mathcal{F}_i(\mathcal{V}; t)$ označuje sílu působící na objem $\mathcal{V}$ v čase t.

Abychom mohli přepsat (1.4.1) ve tvaru diferenciální rovnice, je třeba vyjádřit vektor $\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{V}; t)$ v integrálním tvaru.

Síly v tekutinách dělíme podle jejich charakteru na objemové a plošné.

1.4.1 *Objemová síla*

Objemová síla (také nazývaná vnější síla, neboť je obvykle způsobena vnějšími vlivy) $\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\mathcal{V}; t)$ působící v čase t na částice obsažené v kontrolním objemu $\mathcal{V} \subset \overline{\mathcal{V}} \subset \Omega_t$, jako např. gravitace, elektromagnetická nebo elektrostatická síla, je vyjádřena svou hustotou (vztaženou na jednotku hmotnosti) $\boldsymbol{f} \in C^1(\mathcal{M})^3$:

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_v(\mathcal{V}; t) = \int_{\mathcal{V}} (\rho\, \boldsymbol{f})(x,t)\, dx. \tag{1.4.2}$$

Příklad 1.17 Gravitační síla $\boldsymbol{f} = (0, 0, -g)$ $\quad g-$ gravitační konstanta

Poznámka 1.18 Gravitační síla je *potenciální*, t.j. existuje její potenciál $U \in C^1(\mathcal{M}) :: \boldsymbol{f} = \nabla U$ $(U = -g\, x_3)$. Potenciální síly se někdy nazývají *konzervativní.*

1.4.2 *Plošná síla*

Plošná síla (nebo také vnitřní, protože vyplývají z vnitřní interakce mezi objemy) $\boldsymbol{\mathcal{F}}_s(\mathcal{V};\, t)$, představuje působení tekutiny vně oblasti $\mathcal{V}$ v čase t na kontrolní objem $\mathcal{V}$ a je vyjádřena *vektorem napětí* $\boldsymbol{T}(x, t, n)$.

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_s(\mathcal{V};\, t) = \int\limits_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{T}(x, t, n(x))\, dS \tag{1.4.3}$$

Kde $n(x)$ je jednotková vnější normála k $\partial\mathcal{V}$ v bodě x. Předpokládáme, že $\boldsymbol{T} \in C(\mathcal{M} \times \mathcal{S}_1)^3$, kde $\mathcal{S}_1$ je povrch jednotkové koule s centrem v počátku

Příklad 1.19 Tlaková síla

$$\boldsymbol{T}(x, t, n) = -p(x, t)\, n - \text{hustota tlakové síly}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}_s(\mathcal{V};\, t) = -\int\limits_{\partial\mathcal{V}} p(x, t)\, n(x)\, dS$$

kde p je tlak
Vektor-$p(x, t)\, n(x)$, vyjadřující hustotu tlakové síly, je ortogonální k $p(x, t)\, n(x)$, v každém bodě $x \in \partial\mathcal{V}$ a jeho tečná složka k $\partial\mathcal{V}$ je nulová

1.4.3 *Eulerovy rovnice*

V tekutinách je střední volná dráha podstatně větší a mezimolekulární síly menší než v tělesech. Tato vlastnost způsobuje, že tekutiny mají relativně malou odolnost proti silám způsobující změnu jejich tvaru. Tato vlastnost se nazývá *vazkost*. Vazké síly zmenšují rozdíl rychlostí mezi tekutinou a okolím. To připomíná tření a proto se někdy setkáváme s označením *vnitřní tření*. Třecí síly způsobují ulpívání tekutin na stěnách kolem proudící tekutiny.
často je vazkost tak malá, že ji zanedbáváme. Pak mluvíme o modelu *nevazkého proudění* (jak ukazují experimenty, každá tekutina má nějakou vazkost; proto je pojem nevazkého proudění pouze idealizací)
Uvažujme nevazké proudění. To znamená, že neuvažujeme vnitřní tření a předpokládáme, že vzájemná interakce mezi objemy je dána pouze tlakovou silou. Celková síla působící na kontrolní objem $\mathcal{V}$ v čase t je tvaru

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{V};\, t) = \int\limits_{\mathcal{V}} (\rho\, \boldsymbol{f})(x, t)\, dx - \int\limits_{\partial\mathcal{V}} p(x, t)\, n(x)\, dS$$

1.4.3.1 *Konzervativní tvar* Nechť $p \in C^1(\mathcal{M})$. Použitím Greenovy věty dostáváme

$$\boldsymbol{\mathcal{F}}(\mathcal{V};\, t) = \int\limits_{\mathcal{V}} (\rho\, \boldsymbol{f} - \nabla p)(x, t)\, dx$$

V tomto případě zní ZZHy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) + \operatorname{div}(\rho\, v_i\, \boldsymbol{v}) = \rho\, f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}, \qquad i = 1,2,3\,, \quad t \in (0,T), \quad x \in \Omega_t$$

Tyto rovnice se nazývají *Eulerovými rovnicemi* pohybu, zapsané v divergentním (nebo konzervativním) tvaru.

1.4.3.2 *Konvektivní tvar* Aplikací věty o transportu jednoduše odvodíme *konvektivní tvar* Eulerových rovnic

$$\rho\,\frac{\partial v_i}{\partial t} + \underbrace{v_i\,\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \operatorname{div}(\rho\,\boldsymbol{v})}_{=0\ \Leftarrow\ \text{R.K.}} + \nabla v_i \cdot (\rho\,\boldsymbol{v}) = \rho\, f_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j\,\frac{\partial v_i}{\partial x_j} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3$$

t.j.

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\rho}\,\nabla p$$

Eulerovy rovnice v konvektivním tvaru

Poznámka 1.20 Nestlačitelné Eulerovy rovnice

$$\rho \equiv 0$$

$$\begin{array}{rc} \text{R.K.} & \operatorname{div}\boldsymbol{v} = 0 \\ \text{E.R.} & \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \nabla p \end{array}$$

kde $p := \frac{p}{\rho}$ je systém 4 rovnic o 4 neznámých ($\boldsymbol{f}$ je dána)

Poznámka 1.21 můžeme psát

$$\sum_{j=1}^{3} v_j\,\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_j} = (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\,\boldsymbol{v} = (\nabla\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}$$

kde

$$\nabla\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

t.j. aplikujeme operátor ∇ také na vektor

Cvičení 1.22 Tlak na dno nádoby

5. přednáška

1.5 Tenzor napětí

Celková povrchová síla působící v čase t na kontrolní objem $\mathcal{V}$ z vnějšku, má tvar $\boldsymbol{\mathcal{F}}_s(\mathcal{V};\, t) = \int\limits_{\partial\mathcal{V}} \boldsymbol{T}(x, t, n(x))\, dS$

Vektor napětí $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}(x, t, n(x))$ závisí na bodě x, čase t a vnější jednotkové normále $n(x)$ k $\partial\mathcal{V}$ v bodě x (t.j. T závisí na orientaci povrchu $\partial\mathcal{V}$). Podle Newtonova třetího zákona, tekutina působí na povrch $\partial\mathcal{V}$ z opačného směru (t.j z vnitřku $\mathcal{V}$) silou $-\boldsymbol{\mathcal{F}}_s(\mathcal{V};\, t)$. Tedy

$$\boldsymbol{T}(x, t, n(x)) = -\boldsymbol{T}(x, t, -n(x))$$

Vektor napětí $\boldsymbol{T}$ může být vyjádřen pomocí jeho vlastních hodnot pro jisté normály. Zvolme normály rovnoběžné k souřadnicovým osám a položme

$$\tau_{ji} = T_i(x, t, e_j), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veličiny $\tau_{ji}(x, t),\ i, j = 1, 2, 3$ se nazývají *prvky tenzoru napětí.*
Prvky $\tau_{ii},\ i = 1, 2, 3$ se nazývají *normálová napětí*, a prvky $\tau_{ij},\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, 3$ se nazývají *tečná napětí.*

Poznámka 1.23 Uvažujme dva cartézské systémy souřadnic x_1, x_2, x_3 a $x_1^\star, x_2^\star, x_3^\star$ v $\mathbb{R}^3$. Tranformace od x_i k $x_i^\star$ je dána vztahem

$$\boldsymbol{x}^\star = \mathbb{A}\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^\star$$

kde

$$\boldsymbol{x}^\star = \begin{pmatrix} x_1^\star \\ x_2^\star \\ x_3^\star \end{pmatrix},\ \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

a $\mathbb{A} = (a_{ij})_{ij=1}^3$ je ortonormální matice. Což znamená, že

$$\mathbb{A}\,\mathbb{A}^T = \mathbb{I} \tag{1.5.4}$$

kde $\mathbb{I}$ značí jednotkovou matici.
Veličina reprezentovaná prvky $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$ se nazývá *tenzor prvního řádu* nebo *vektor*, v trasformaci souřadného systému 1.5.4 s ortonormální maticí se $\boldsymbol{b}$ změní v

$$\boldsymbol{b}^\star = \mathbb{A}\,\boldsymbol{b}$$

Veličina reprezentovaná v souřadném systému x_1, x_2, x_3 maticí $\mathcal{T} = (\tau_{ij})_{i,j=1}^3$ se nazývá *tenzorem druhého řádu*, transformace ji změní na

$$\mathcal{T}^\star = \mathbb{A}\,\mathcal{T}\,\mathbb{A}^{-1}\ \left(= \mathbb{A}\,\mathcal{T}\,\mathbb{A}^T\right)$$

Nyní se zabývejme vztahem mezi prvky $\tau_{ji}(x,t)$ a vektorem $\boldsymbol{T}(x,t,n(x))$. Ukážeme, že platí

$$T_i(x,t,n(x)) = \sum_{j=1}^{3} n_j\,\tau_{ji}(x,t), \quad i = 1,2,3$$

Pro tento účel uvažujeme libovolné $\mathcal{O} \subset \Omega_t$ a $\mathcal{V} = \mathcal{V}_h$, kde $\mathcal{V}_h \subset \Omega_t$ je čtyřstěn $\mathcal{O}ABC$ (viz obr.)
Značení:

$$\begin{aligned} n &\perp ABC \\ (\partial\mathcal{V})_0 &= ABC \\ (\partial\mathcal{V})_1 &= A\mathcal{O}C \\ (\partial\mathcal{V})_2 &= B\mathcal{O}C \\ (\partial\mathcal{V})_3 &= A\mathcal{O}B \\ |(\partial\mathcal{V})_i| &- \text{obsah}(\partial\mathcal{V})_i \\ |\mathcal{V}_h| &- \text{objem } \mathcal{V}_h \\ h &- \text{vzálenost počátku od roviny } ABC \end{aligned}$$

platí

$$\begin{aligned} |(\partial\mathcal{V})_i| &= |(\partial\mathcal{V})_0|\,n_i \\ |\mathcal{V}_h| &= \frac{1}{3}|(\partial\mathcal{V})_0|\,h \end{aligned}$$

Napišme nyní ZZHy pro $\mathcal{V}_h$

$$\int_{\mathcal{V}_h} \left[\frac{\partial(\rho\,v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,v_i\,\boldsymbol{v})\right](x,t)\,dx = \int_{\mathcal{V}_h} (\rho\,f_i)(x,t)\,dx + \int_{\partial\mathcal{V}_h} T_i(x,t,n)\,dS$$

Naším cílem je ukázat, že

$$T_i(x,t,n) = \sum_{j=1}^{3} n_j\,\tau_{ji}(x,t)\,\left(= \sum_{j=1}^{3} n_j\,T_i(x,t,e_j)\right)$$

tedy

$$\int_{\partial\mathcal{V}_h} T_i(x,t,n)\,dS = \int_{\mathcal{V}_h} \underbrace{\left[\frac{\partial(\rho\,v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,v_i\,\boldsymbol{v}) - \rho\,f_i\right](x,t)}_{F_i(x,t)}\,dx$$

nyní přenásobíme celou rovnici $\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}$ a dostaneme

$$\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{\partial\mathcal{V}_h} T_i(x,t,n)\,dS = \frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{\mathcal{V}_h} F_i(x,t)\,dx \tag{1.5.5}$$

ale

$$\int\limits_{\partial\mathcal{V}_h} T_i(x,t,n)\,dS = \int\limits_{(\partial\mathcal{V})_0} T_i(x,t,n)\,dS +$$

$$+\int\limits_{(\partial\mathcal{V})_1} T_i(x,t,-e_1)\,dx_2\,dx_3 - \int\limits_{(\partial\mathcal{V})_2} T_i(x,t,e_2)\,dx_1\,dx_3 - \int\limits_{(\partial\mathcal{V})_3} T_i(x,t,e_3)\,dx_1\,dx_2$$

protože vnější jednotková normála k $(\mathcal{V}_h)_i$ je $-e_i$ a ještě používáme třetí Newtonův zákon

Nyní pokud $h \to 0$ pak

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{(\partial\mathcal{V})_0} T_i(x,t,n)\,dS &\overset{h\to 0}{\to} T_i(\mathcal{O},t,n)\\
-\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{(\partial\mathcal{V})_1} T_i(x,t,e_1)\,dx_2\,dx_3 &\overset{h\to 0}{\to} -n_1\tau_{1i}(\mathcal{O},t)\\
-\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{(\partial\mathcal{V})_2} T_i(x,t,e_2)\,dx_1\,dx_3 &\overset{h\to 0}{\to} -n_2\tau_{2i}(\mathcal{O},t)\\
-\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{(\partial\mathcal{V})_3} T_i(x,t,e_3)\,dx_1\,dx_2 &\overset{h\to 0}{\to} -n_3\tau_{3i}(\mathcal{O},t)\\
\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}\int\limits_{\mathcal{V}_h} F_i(x,t)\,dx &\overset{h\to 0}{\to} 0
\end{aligned} \tag{1.5.6}$$

takže ze vztahu 1.5.5 pro $h \to 0$ dostáváme

$$T_i(\mathcal{O},t,n) - \sum_{j=1}^{3} n_j\,\tau_{ji}(\mathcal{O},t) = 0$$

$\mathcal{O}$ byl libovolný bod, takže můžeme psát $\mathcal{O} := x \in \Omega_t$ a máme

$$T_i(x,t,n) = \sum_{j=1}^{3} n_j\,\tau_{ji}(x,t)$$

Zbývá tedy dokázat, že limity v 1.5.6 jsou správné

Funkce $T_i(\,\cdot\,,t,n)$ je spojitá (t je pevný čas a n je konstantní vektor)

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ :: \ \forall x \in \bar{\mathcal{V}}_h \ 0 < h < \delta$$

$$T_i(\mathcal{O}, t, n) - \epsilon < T_i(x, t, n) < T_i(\mathcal{O}, t, n) + \epsilon$$

Tuto rovnici zintegrujeme přes $(\partial\mathcal{V})_0$ a vynásobíme $\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|}$

$$T_i(\mathcal{O}, t, n) - \epsilon < \frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|} \int\limits_{(\partial\mathcal{V})_0} T_i(\mathcal{O}, t, n)\, dS < T_i(\mathcal{O}, t, n) + \epsilon$$

čili

$$\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|} \int\limits_{(\partial\mathcal{V})_0} T_i(x, t, n)\, dS \overset{h \to 0}{\to} T_i(\mathcal{O}, t, n)$$

Zbývající vztahy se dokážou stejným způsobem.
Dále

$$\frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|} \int\limits_{\mathcal{V}_h} F_i(x, t)\, dx \leq \frac{1}{|(\partial\mathcal{V})_0|} \frac{1}{3} |(\partial\mathcal{V})_0|\, h\, M \overset{h \to 0}{\to} 0$$

což vyplývá ze spojitosti funkce $F_i(\,\cdot\,, t)$ a kompaktnosti množiny $\bar{\mathcal{V}}_h \subset \Omega_t$. ($M$ nezávisí na h.)

Poznámka 1.24 Pokud je vektor n rovnoběžný s nějakou souřadnicovou rovinou, např. x_1, x_2 můžeme použít k důkazu stejný postup pro kontrolní objem z obrázku.

1.6 Pohybové rovnice obecných tekutin

Předpokládejme $\rho, v_i, \tau_{ij} \in C^1(\mathcal{M})$ a $f_i \in C(\mathcal{M})$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Zákon zachování hybnosti pak lze zapsat

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \left[\frac{\partial(\rho\, v_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\, v_i\, \boldsymbol{v}) \right] (x, t)\, dx = \int\limits_{\mathcal{V}} (\rho\, f_i)(x, t)\, dx + \int\limits_{\partial\mathcal{V}} \sum_{j=1}^{3} n_j(x)\, \tau_{ji}(x, t)\, dS$$

pro každé $t \in (0, T)$ a libovolný kontrolní objem $\mathcal{V}$ v Ω_t
Použitím Greenovy věty dostáváme *pohybové rovnice obecných tekutin v diferenciálním konzervativním tvaru:*

$$\frac{\partial(\rho\, v_i)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\, v_i\, \boldsymbol{v}) = \rho\, f_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, \quad i = 1, 2, 3$$

Což se dá také zapsat jako

$$\frac{\partial(\rho\, \boldsymbol{v})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = \rho\, \boldsymbol{f} + \mathrm{div}\mathcal{T}$$

1.7 Zákon zachování momentu hybnosti; symetrie tenzoru napětí

Předpokládejme, že $\rho, v_i, \tau_{ij} \in C^1(\mathcal{M})$ and $f_i \in C(\mathcal{M})$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Podobně jako výše uvažujme kontrolní objem $\mathcal{V} = \mathcal{V}(t)$ tvořený v každém časovém okamžiku $t \in (t_1, t_2)$ týmiž částicemi. Zákon zachování momentu hybnosti může být formulován následovně:
Okamžitá změna momentu hybnosti objemu tekutiny $\mathcal{V}(t)$ v libovolném čase t je rovna součtu momentů objemových a povrchových sil působících na tento objem. čili

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}(t)} x\times(\rho\,\boldsymbol{v})(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathcal{V}(t)} x\times(\rho\,\boldsymbol{f})(x,t)\,dx + \int\limits_{\partial\mathcal{V}(t)} x\times\boldsymbol{T}(x,t,n(x))\,dS \quad (1.7.7)$$

Dá se dokázat následující důležitý výsledek

Věta 1.25 *Zákon zachování momentu hybnosti platí právě tehdy když je tenzor napětí $\mathcal{T}$ symetrický*

<u>6. přednáška</u>

Důkaz ukážeme, že platí

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}(t)} x\times(\rho\,\boldsymbol{v})(x,t)\,dx = \int\limits_{\mathcal{V}(t)} x\times\boldsymbol{g}(x,t)\,dx$$

kde

$$\boldsymbol{g}_i(x,t) = \frac{\partial(\rho\,v_i)}{\partial t}(x,t) + \operatorname{div}(\rho\,v_i\,\boldsymbol{v})(x,t)$$

$$x\times(\rho\,\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} x_2\,\rho\,v_3 - x_3\,\rho\,v_2 \\ x_3\,\rho\,v_1 - x_1\,\rho\,v_3 \\ x_1\,\rho\,v_2 - x_2\,\rho\,v_1 \end{pmatrix}$$

chceme dokázat, že

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}(t)} x_2\,\rho\,v_3 - x_3\,\rho\,v_2\,dx =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[x_2\left(\frac{\partial(\rho\,v_3)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,v_3\,\boldsymbol{v})\right) - x_3\left(\frac{\partial(\rho\,v_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\,v_2\,\boldsymbol{v})\right)\right]dx$$

ale

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\mathcal{V}(t)} (x_2\,\rho\,v_3 - x_3\,\rho\,v_2)\,dx \overbrace{=}^{\text{věta o transportu}}$$

$$= \int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial(x_2\,\rho\,v_3)}{\partial t} + \operatorname{div}(x_2\,\rho\,v_3\,\boldsymbol{v}) - \frac{\partial(x_3\,\rho\,v_2)}{\partial t} - \operatorname{div}(x_3\,\rho\,v_2\,\boldsymbol{v})\right]dx =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[\frac{\partial x_2}{\partial t}\, \rho\, v_3 + x_2\, \frac{\partial(\rho\, v_3)}{\partial t} + x_2 \operatorname{div}(\rho\, v_3\, \boldsymbol{v}) + \nabla x_2 \cdot \rho\, v_3\, \boldsymbol{v} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial x_3}{\partial t}\, \rho\, v_2 - x_3\, \frac{\partial(\rho\, v_2)}{\partial t} - x_3 \operatorname{div}(\rho\, v_2\, \boldsymbol{v}) - \nabla x_3 \cdot \rho\, v_2\, \boldsymbol{v} \right] dx =$$

$$\int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[v_2\, \rho\, v_3 + x_2\, \frac{\partial(\rho\, v_3)}{\partial t} + x_2 \operatorname{div}(\rho\, v_3\, \boldsymbol{v}) + \rho\, v_3\, v_2 - \right.$$

$$\left. - v_3\, \rho\, v_2 - x_3\, \frac{\partial(\rho\, v_2)}{\partial t} - x_3 \operatorname{div}(\rho\, v_2\, \boldsymbol{v}) - \rho\, v_2\, v_3 \right] dx =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[x_2 \left(\frac{\partial(\rho\, v_3)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\, v_3\, \boldsymbol{v}) \right) - x_3 \left(\frac{\partial(\rho\, v_2)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\, v_2\, \boldsymbol{v}) \right) \right] dx$$

což jsme chtěli dokázat
Nyní můžeme zákon zachování momentu hybnosti zapsat

$$\int\limits_{\mathcal{V}(t)} [x \times \boldsymbol{g}(x,t)] = \int\limits_{\mathcal{V}(t)} x \times (\rho\, \boldsymbol{f})(x,t)\, dx + \int\limits_{\partial\mathcal{V}(t)} x \times \boldsymbol{T}(x,t,n(x))\, dS$$

První složka výsledného vektoru je

$$\int\limits_{\mathcal{V}(t)} (x_2\, g_3 - x_3\, g_2)\, dx = \int\limits_{\mathcal{V}(t)} (x_2\, \rho\, f_3 - x_3\, \rho\, f_2)\, dx +$$

$$\underbrace{+ \int\limits_{\partial\mathcal{V}(t)} (x_2 \sum_{j=1}^{3} n_j \tau_{j3} - x_3 \sum_{j=1}^{3} n_j \tau_{j2})\, dS}_{\sum_{j=1}^{3} \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\partial}{\partial x_j} (x_2\, \tau_{j3} - x_3\, \tau_{j2})\, dx}$$

tedy

$$\int\limits_{\mathcal{V}(t)} [x_2(g_3 - \rho\, f_3) - x_3(g_2 - \rho\, f_2)]\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathcal{V}(t)} \left[x_2 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j3} + \tau_{j3} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_2}{\partial x_j} - x_3 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j2} - \tau_{j2} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right] dx$$

$$\int\limits_{\mathcal{V}} \left[x_2\, \overbrace{(g_3 - \rho\, f_3 - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j3})}^{\text{ZZHy}} - x_3\, \overbrace{(g_2 - \rho\, f_2 - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{j2})}^{\text{ZZHy}} \right] dx =$$

$$= \int_{\mathcal{V}(t)} (\tau_{23} - \tau_{32})\, dx$$

Použitím ZZHy

$$0 = \int_{\mathcal{V}(t)} (\tau_{23} - \tau_{32})\, dx$$

Protože kontrolní objem $\mathcal{V}$ může být zvolen libovolně, vidíme, že $\tau_{23} = \tau_{32}$. Podobně dokážeme rovnosti $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ pro zbývající indexy i, j.
Takže tenzor $\mathcal{T}$ je symetrický. Opačným postupem dokážeme ze symetrie tenzoru $\mathcal{T}$ zákon zachování momentu hybnosti. □

1.8 Navier-Stokesovy rovnice

Vztahy mezi tenzorem napětí a ostatními veličinami popisujícími proudění tekutin jsou charakterizovány tzv. *rheologickými rovnicemi* tekutin. Nejjednodušší rheologická rovnice

$$\mathcal{T} = -p\,\mathbb{I},$$

popisuje nevazké proudění. Kde p je tlak a $\mathbb{I}$ je jednotkový tenzor:

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1,\ 0,\ 0 \\ 0,\ 1,\ 0 \\ 0,\ 0,\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vedle tlakových sil, hrají také roli smykové třecí síly jež jsou důsledkem *vazkosti.* Proto v případě vazkého proudění přidáváme ke členu $-p\,\mathbb{I}$ ještě člen $\mathcal{T}'$ popisující smykové napětí:

$$\mathcal{T} = -p\,\mathbb{I} + \mathcal{T}'.$$

K vyjádření vazké části $\mathcal{T}'$ tenzoru napětí, používáme *Stokesovy postuláty:*
1) $\mathcal{T} = -p\,\mathbb{I} + \mathcal{T}'$.

2) Tenzor $\mathcal{T}'$ je spojitou funkcí tenzoru rychlosti deformace,

$$\mathbb{D} = \mathbb{D}(\boldsymbol{v}) = (d_{ij})_{i,j=1}^{3}, \quad d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right),$$

která nezávisí explicitně na x a t a dalších fyzikálních veličinách.
3) Tekutina je *izotropní* médium. To znamená, že její vlastnosti jsou stejné ve všech směrech.
4) Je-li tenzor rychlosti deformace nulový, pak na tekutinu působí pouze tlakové síly. čili jestliže $\mathbb{D} = 0$, pak $\mathcal{T} = -p\,\mathbb{I}$.
5) Vztah mezi $\mathcal{T}'$ a $\mathbb{D}$ je lineární.

V matematické řeči, můžeme tyto postuláty zapsat takto:
1*) $\mathcal{T} = -p\,\mathbb{I} + \mathcal{T}'$.

2*) $\mathcal{T}' = f(\mathbb{D})$, f je spojitá.
3*) f je invariantní vzhledem k transformaci souřadnic: $\mathbb{S}\mathcal{T}'\mathbb{S}^{-1} = f(\mathbb{S}\,\mathbb{D}\,\mathbb{S}^{-1})$ pro každou ortonormální matici $\mathbb{S}$.
4*) $f(0) = 0$.
5*) Zobrazení f je lineární.

Věta 1.26 *Za předpokladů 1*)–5*), má tenzor napětí následující tvar*

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})\, \mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D},$$

ke λ, μ jsou konstanty nebo skalární funkce termodynamických veličin.

Důkaz Využijeme dvou tvrzení, které dokážeme později:
1. div$\boldsymbol{v}$ je rovna součtu vlastních čísel matice $\mathbb{D}$ (a tedy je invariantní vzhledem k trasformaci souřadnic s ortonormální maticí)
2. Libovolná ortonormální transformace, transformující $\mathbb{D}$ na diagonální matici transformuje také $\mathcal{T}'$ na diagonální matici

Uvažujme transformaci souřadnic s maticí $\tilde{\boldsymbol{S}}$:: $(\bar{x} = \tilde{\boldsymbol{S}}x + \bar{c})$

$$\tilde{\boldsymbol{S}}\mathbb{D}\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d_{11}},\, 0,\, 0 \\ 0,\, \bar{d_{22}},\, 0 \\ 0,\, 0,\, \bar{d_{33}} \end{pmatrix}$$

Z tvrzení 2 plyne

$$\tilde{\boldsymbol{S}}\mathcal{T}'\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1} = \tilde{\mathcal{T}}' = \begin{pmatrix} \bar{\tau_{11}},\, 0,\, 0 \\ 0,\, \bar{\tau_{22}},\, 0 \\ 0,\, 0,\, \bar{\tau_{33}} \end{pmatrix}$$

Stokesův 5. postulát (linearita f) dává

$$\bar{\tau_{ii}}' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\bar{d_{jj}} \tag{1.8.8}$$

Uvažujme takovou transformaci souřadnic, že

$$\boldsymbol{S}\mathbb{D}\boldsymbol{S}^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{d_{11}},\, 0,\, 0 \\ 0,\, \bar{d_{33}},\, 0 \\ 0,\, 0,\, \bar{d_{22}} \end{pmatrix}$$

t.j.

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1,\, 0,\, 0 \\ 0,\, 0,\, 1 \\ 0,\, -1,\, 0 \end{pmatrix}$$

z 1.8.8 plyne

$$\bar{\tau_{11}}' = \alpha_{11}\, \bar{d_{11}} + \alpha_{12}\, \bar{d_{22}} + \alpha_{13}\, \bar{d_{33}}$$

Po transformaci

$$\bar{\tau}_{11}' = \alpha_{11}\,\bar{d}_{11} + \alpha_{12}\,\bar{d}_{33} + \alpha_{13}\,\bar{d}_{22}$$

čili

$$0 = \alpha_{12}(\bar{d}_{22} - \bar{d}_{33}) + \alpha_{13}(\bar{d}_{33} - \bar{d}_{22})$$

Obecně, ale $\bar{d}_{22} \neq \bar{d}_{33}$, dostáváme tedy rovnost

$$\alpha_{12} = \alpha_{13}$$

a tedy

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{11}' &= \alpha_{11}\,\bar{d}_{11} + \alpha_{12}\,\bar{d}_{22} + \alpha_{13}\,\bar{d}_{33} \\ &= \underbrace{(\alpha_{11} - \alpha_{12})}_{2\mu_1:=}\bar{d}_{11} + \underbrace{\alpha_{12}}_{\lambda_1:=}\underbrace{(\bar{d}_{11} + \bar{d}_{22} + \bar{d}_{33})}_{\mathrm{div}\boldsymbol{v}} \end{aligned}$$

Podobně pro $i = 2, 3$

$$\bar{\tau}_{22}' = 2\mu_2\,\bar{d}_{22} + \lambda_2\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

$$\bar{\tau}_{33}' = 2\mu_3\,\bar{d}_{33} + \lambda_3\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

tedy

$$\bar{\tau}_{ii}' = 2\mu_i\,\bar{d}_{ii} + \lambda_i\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

Dále ukážeme, že

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$$

K tomu použijeme transformaci souřadnic s následující maticí

$$\begin{pmatrix} 0,\ 1,\ 0 \\ 0,\ 0,\ 1 \\ 1,\ 0,\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{(záměna proměnných dána permutací)} \quad \begin{pmatrix} 1,\ 2,\ 3 \\ 2,\ 3,\ 1 \end{pmatrix}$$

před transformací

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}'_{11},\ 0,\ 0 \\ 0,\ \bar{\tau}'_{22},\ 0 \\ 0,\ 0,\ \bar{\tau}'_{33} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \bar{d}'_{11},\ 0,\ 0 \\ 0,\ \bar{d}'_{22},\ 0 \\ 0,\ 0,\ \bar{d}'_{33} \end{pmatrix}$$

po transformaci

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau}'_{22},\ 0,\ 0 \\ 0,\ \bar{\tau}'_{33},\ 0 \\ 0,\ 0,\ \bar{\tau}'_{11} \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \bar{d}'_{22},\ 0,\ 0 \\ 0,\ \bar{d}'_{33},\ 0 \\ 0,\ 0,\ \bar{d}'_{11} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{1.řádek před trafo.} \quad \bar{\tau}'_{11} &= 2\mu_1\bar{d}_{11} + \lambda_1\mathrm{div}\boldsymbol{v} \\ \text{3.řádek po trafo.} \quad \bar{\tau}'_{11} &= 2\mu_3\bar{d}_{11} + \lambda_3\mathrm{div}\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

$$\text{máme tedy} \quad 0 = 2(\mu_1 - \mu_3)\bar{d_{11}} + (\lambda_1 - \lambda_3)\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

Předpokládejme, že div$\boldsymbol{v} \neq 0$, $\bar{d_{11}} = 0$ pak $\lambda_1 = \lambda_3$
a předpokládáme-li $\bar{d_{11}} \neq 0 \ \Rightarrow \ \mu_1 = \mu_3$
Podobně dostaneme $\mu_1 = \mu_2$ a $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\bar{\mathcal{T}}' = 2\mu\bar{\mathbb{D}} + \lambda\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathbb{I}$$

A na závěr se vraťme k tenzorům $\mathcal{T}'$ a $\mathbb{D}$

$$\mathcal{T}' = 2\mu\mathbb{D} + \lambda\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}\mathbb{I}$$

Nyní dokažme tvrzení ze začátku důkazu. Tvrzení 1. div$\boldsymbol{v}$ je rovna součtu vlastních čísel matice $\mathbb{D}$ (a tedy je invariantní vzhledem k trasformaci souřadnic s ortonormální maticí)

Ukážeme tedy, že div$\boldsymbol{v} = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_{ii},\ \lambda_i -$ vlastní čísla matice$\mathbb{D}$

$$\det(\lambda\,\mathbb{I} - \mathbb{D}) = \det\begin{pmatrix} \lambda - d_{11}, & , & \\ , & \lambda - d_{22}, & \\ , & , & \lambda - d_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{i=1}^{3}(\lambda - d_{ii}) + a_0\lambda + a_1 = \lambda^3 + \lambda^2\mathrm{div}\boldsymbol{v} + b_0\lambda + b_1$$

kde $d_{ii} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$.
Na druhou stranu, ale platí

$$\det(\lambda\,\mathbb{I} - \mathbb{D}) = (\lambda - \lambda_1)\,(\lambda - \lambda_2)\,(\lambda - \lambda_3) = \lambda^3 + \lambda^2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + c_o\lambda + c_1$$

$\mathbb{D}$ a $\boldsymbol{S}\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{S}^{-1}$ mají stejná vlastní čísla (podobné matice mají stejná čísla)

$$\det(\lambda\,\mathbb{I} - \boldsymbol{S}\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{S}^{-1}) = \det(\lambda\,\boldsymbol{S}\,\mathbb{I}\,\boldsymbol{S}^{-1} - \boldsymbol{S}\,\mathbb{D}\,\boldsymbol{S}^{-1}) = \det(\boldsymbol{S}\,(\lambda\,\mathbb{I} - \mathbb{D})\,\boldsymbol{S}^{-1}) = \det(\lambda\,\mathbb{I} - \mathbb{D})$$

Tvrzení 2. Libovolná ortonormální transformace, transformující $\mathbb{D}$ na diagonální matici transformuje také $\mathcal{T}'$ na diagonální matici. Předpokládejme proto

$$\bar{\mathbb{D}} = \begin{pmatrix} \bar{d_{11}}, & , & \\ , & \bar{d_{22}}, & \\ , & , & \bar{d_{33}} \end{pmatrix} = \tilde{\boldsymbol{S}}\,\mathbb{D}\,\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1}$$

položme $\bar{\mathcal{T}}' = \tilde{\boldsymbol{S}}\,\mathcal{T}'\,\tilde{\boldsymbol{S}}^{-1}$ a označme $\tilde{\tau'_{ij}}$ hodnoty vstupující do matice $\bar{\mathcal{T}}'$. Z předpokladů na invarianci f máme

$$\bar{\mathcal{T}}' = f(\bar{\mathbb{D}})$$

Ukážeme, že $\bar{\mathcal{T}}'$ je diagonální matice. Uvažujme ortonormální matici

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1, & , & \\ & , -1, & \\ & , & , -1 \end{pmatrix}$$

(Vynásobení touto maticí zleva (nebo zprava) změní znaménka posledních dvou řádků (nebo posl. dvou sloupců))

před

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau'_{11}}, \bar{\tau'_{12}}, \bar{\tau'_{13}} \\ \bar{\tau'_{21}}, \bar{\tau'_{22}}, \bar{\tau'_{23}} \\ \bar{\tau'_{31}}, \bar{\tau'_{12}}, \bar{\tau'_{33}} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \bar{d_{11}}, & , & \\ & , \bar{d_{22}}, & \\ & , & , \bar{d_{33}} \end{pmatrix}$$

po

$$\begin{pmatrix} \bar{\tau'_{11}}, -\bar{\tau'_{12}}, -\bar{\tau'_{13}} \\ -\bar{\tau'_{21}}, \bar{\tau'_{22}}, \bar{\tau'_{23}} \\ -\bar{\tau'_{31}}, \bar{\tau'_{12}}, \bar{\tau'_{33}} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} \bar{d_{11}}, & , & \\ & , \bar{d_{22}}, & \\ & , & , \bar{d_{33}} \end{pmatrix}$$

Porovnáním výsledku se vstupními hodnotami matice $\mathcal{T}'$, dostáváme $-\bar{\tau_{12}}' = \bar{\tau_{12}}'$, takže $\bar{\tau_{12}}' = 0$, podobně $\bar{\tau_{13}}' = 0, \bar{\tau_{21}}' = 0, \bar{\tau_{31}}' = 0$. Analogicky, s využitím následující matice

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} -1, & , & \\ & , 1, & \\ & , & , -1 \end{pmatrix}$$

máme, že $\bar{\tau_{13}}' = 0 = \bar{\tau_{31}}'$. čili

$$\bar{\mathcal{T}}' = \begin{pmatrix} \bar{\tau_{11}}', & , & \\ & , \bar{\tau_{22}}', & \\ & , & , \bar{\tau_{33}}' \end{pmatrix}$$

□

<u>7. přednáška</u>

Pokud tenzor napětí závisí lineárně na tenzoru rychlosti deformace jako v předcházející větě, pak tekutinu nazýváme *Newtonovskou*, což je příklad plynů.

Předpokládejme, že $\rho \in C^1(\mathcal{M})$ a $\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}$ a $\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial x_i \partial x_j} \in C(\mathcal{M})$, $i, j = 1, 2, 3$ a dosazením vztahu

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda\, \mathrm{div} \boldsymbol{v})\mathbb{I} + 2\mu\mathbb{D}$$

do rovnic obecných tekutin, dostaneme tzv. *Navier-Stokesovy rovnice*

$$\frac{\partial(\rho\, \boldsymbol{v})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\, \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v}) = \rho\, \boldsymbol{f} - \nabla p + \nabla(\lambda\, \mathrm{div} \boldsymbol{v}) + \mathrm{div}(2\mu\, \mathbb{D}) \tag{1.8.9}$$

1.8.1 *Vlastnosti koeficientů vazkosti*

μ a λ jsou první a druhý *koeficient vazkosti*, μ je také nazýván *dynamickou viskozitou.* V kinetické teorii plynů je odvozena podmínka

$$\mu \geq 0, \quad 3\lambda + 2\mu \geq 0$$

Pro jednoatomové plyny platí $3\lambda+2\mu = 0$. Tato podmínka je většinou používána i v případě složitějších plynů.

Poznámka 1.27 Rovnost $3\lambda + 2\mu = 0$ je odvozena za předpokladu, že vztah

$$-3p = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ii}$$

platí pro nevazké proudění, je také splněna v případě vazkého proudění. Pak

$$-3p = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ii} = -3p + 3\lambda \operatorname{div}\boldsymbol{v} + 2\mu \operatorname{div}\boldsymbol{v}$$

$$\mathcal{T} = (-p + \lambda \operatorname{div}\boldsymbol{v})\mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D} \quad (d_{ij})_{i,j=1}^{3} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$$

Koeficienty vazkosti mohou být funkcemi termodynamických veličin. Nejjasnější je závislost na absolutní teplotě. často používaná Sutherlandova formule

$$\mu = \frac{c_1\,\Theta^{3/2}}{\Theta + c_2}$$

je odvozená v kinetické teorii plynů. (Zde c_1 a c_2 jsou konstanty závisející na tekutině.)

1.8.2 *Reynoldsovo číslo*

Ve zkoumání vazkých proudění je důležité bezrozměrné *Reynoldsovo číslo*. Je definováno takto

$$Re = \frac{U^* L^* \rho^*}{\mu^*}$$

kde U^* je charakteristická rychlost, L^* charakteristická délka, ρ^* charakteristická hustota a μ^* charakteristická vazkost. Vlastnosti proudění jsou různé pro malé Reynoldsovo číslo (laminární proudění) a velké Reynoldsovo číslo (turbulentní proudění). Reynoldsovo číslo je důležité při porovnávání proudění.

1.8.3 *Různé tvary Navier-Stokesových rovnic*

Za předpokladu $\mathbb{D} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ mohou být Navier-Stokesovy rovnice zapsány ve tvaru (pokud ρ a $\boldsymbol{v}$ jsou dostatečně regulární a splňují rovnici kontinuity a koeficienty vazkosti μ a λ jsou konstanty)

$$[\mathrm{div}(2\mu\mathbb{D})]_i = [2\mu\,\mathrm{div}\mathbb{D}]_i = 2\mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\right) =$$

$$= \mu\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \mu\Delta v_i + \mu\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

pak můžeme 1.8.9 zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial(\rho\,\boldsymbol{v})}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho\,\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}) = \rho\,\boldsymbol{f} - \nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{v} + (\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

kde $\mu \geq 0$, $3\lambda + 2\mu \geq 0 \Rightarrow \lambda \geq -\frac{2}{3}\mu$ tedy $\mu + \lambda \geq \frac{1}{3}\mu$
μ je dynamický koeficient vazkosti a $\eta = \mu + \lambda$ je tzv. *bulk vazkost*. Pokud položíme $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, pak $\eta = \frac{1}{3}\mu$. Ve vazkých plynech $\mu > 0$, $\eta > 0$
Nakonec s využitím rovnice kontinuity, můžeme vyjádřit Navier-Stokesovy rovnice v *nekonzervativním tvaru*

$$\rho\left[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\Delta)\,\boldsymbol{v}\right] = \rho\,\boldsymbol{f} - \nabla p + \mu\Delta\boldsymbol{v} + (\mu+\lambda)\nabla\mathrm{div}\boldsymbol{v}$$

nestlačitelné, vazké proudění

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\Delta)\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v}$$

kde

$$p := \frac{p}{\rho}, \quad \nu = \frac{\mu}{\rho}\ \text{-kinematický koeficient vazkosti}$$

Stacionární Stokes:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0\\ -\nu\Delta\boldsymbol{v} + \nabla p &= \boldsymbol{f}\end{aligned}$$

Stacionární Navier-Stokes:

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\boldsymbol{v} &= 0\\ -\nu\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\Delta)\,\boldsymbol{v} + \nabla p &= \boldsymbol{f}\end{aligned}$$

8. přednáška

1.9 Práce a výkon

Víme, že konstantní síla působící na hmotné částice pohybující se po přímce, koná práci, která je rovna součinu síly a dráhy. Obecně, poukud se částice pohybují po křivce $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(x^1, x^2)$ spojující body x^1 a x^2 vlivem (obecně nekonstantní) síly $\boldsymbol{F}$, je práce definována jako integrál

$$\int\limits_{\vec{\boldsymbol{\varphi}}(x^1,x^2)} \boldsymbol{F} \cdot \mathtt{dS}$$

kde je jednotkový tečný vektor ke křivce $\vec{\boldsymbol{\varphi}}(x^1, x^2)$. Což znamená, že silové pole $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, t)$ působící na částice tekutiny, jejihž trajektorie je dána rovnicí

$$x = \boldsymbol{\varphi}(X, t)$$

představuje během časového intervalu $[t_0, t]$ práci

$$A(t) = \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(X, \tau), \tau) \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(X, \tau)\, d\tau = \int\limits_{t_0}^{t} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(X, \tau), \tau) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(X, \tau), \tau)\, d\tau$$

Výkon je definován jako časová derivace práce t.j.

$$\tilde{W}(t) = \frac{dA(t)}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{\varphi}(X, t), t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{\varphi}(X, t), t)$$

Takže výkon síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici v bodě x a čase t je roven

$$W(x, t) = \boldsymbol{F}(x, t) \cdot \boldsymbol{v}(x, t)$$

1.10 Rovnice energie

Připomeňme, že výkon síly $\boldsymbol{F}$ působící na částici v bodě x a čase t je

$$W(x, t) = \boldsymbol{F}(x, t) \cdot \boldsymbol{v}(x, t).$$

Stejně jako v předchozím uvažujeme část tekutiny reprezentovanou kontrolním objemem $\mathcal{V}(t)$. Zákon zachování energie můžeme vyslovit následovně: *Okamžitá změna (časová derivace) cekové energie objemu tekutiny tvořeného v každém časovém okamžiku týmiž částicemi a vyplňujího objem $\mathcal{V}(t)$ v čase tje rovna součtu výkonu objemových a povrchových sil a množství tepla dodaného systému.*

Značíme $\mathcal{E}(\mathcal{V}(t))$ celková energie objemu tekutiny $\mathcal{V}(t)$ a $Q(\mathcal{V}(t))$ je množství tepla předaného objemu $\mathcal{V}(t)$ v čase t. Vezmeme-li do úvahy charakter vnějších a vnitřních sil působících na oblast $\mathcal{V}(t)$, vyjádřený hustotou $\boldsymbol{f}$ objemových sil a tenzorem napětí $\boldsymbol{T}$, dostaneme rovnost vyjadřující zákon zachování energie:

$$\frac{d}{dt}\mathcal{E}(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x, t) \boldsymbol{f}(x, t) \cdot \boldsymbol{v}(x, t)\, dx$$

$$+\int_{\partial\mathcal{V}(t)} \boldsymbol{T}(x,t,\boldsymbol{n}(x))\cdot\boldsymbol{v}(x,t)\,dS + Q(\mathcal{V}(t)).$$

Dále můžeme psát

a) $\mathcal{E}(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} E(x,t)\,dx,$

b) $E = \rho\left(e + \dfrac{|\boldsymbol{v}|^2}{2}\right),$

c) $Q(\mathcal{V}(t)) = \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)q(x,t)\,dx - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{q}(x,t)\cdot\boldsymbol{n}(x)\,dS.$

Kde E je celková energie, e je specifická vnitřní energie (t.j. na jednotku hmotnosti) $|\boldsymbol{v}|^2/2$ je hustota kinetické energie, q reprezentuje hustotu tepelných zdrojů (vztažený na jednotku hmotnosti) a $\mathbf{q}$ je tepelný tok. Dále platí *Fourierův zákon*,

$$\mathbf{q} = -k\,\mathrm{grad}\,\theta,$$

kde k koeficient tepelné vodivosti a θ je absolutní teplota. Z druhého zákona termodynamiky (viz později) lze dokázat $k \geq 0$. Experimenty ukazují, že k je funkce absolutní teploty: $k = k(\theta)$. často předpokládáme, že k je konstanta.

Dosazením předchozích vztahů do rovnosti reprezentující ZZE, dostaneme

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} E(x,t)\,dx \\
&= \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)\boldsymbol{f}(x,t)\cdot\boldsymbol{v}(x,t)\,dx \\
&+ \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ji}(x,t)\,n_j(x)\,v_i(x,t)\,dS \\
&+ \int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)q(x,t)\,dx - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \mathbf{q}(x,t)\cdot\boldsymbol{n}(x)\,dS.
\end{aligned}$$

Stejně jako v předchozím předpokládáme hladkost funkcí popisující proudění. Tedy ρ, u, v_i, τ_{ij}, $q_i \in C^1(\mathcal{M})$, a f_i, $q \in C(\mathcal{M})$ $(i,\, j = 1,2,3)$. Použitím věty o transportu, Greenovy věty a lemma 1.14, odvodíme *rovnici energie* zapsanou v konzervativním tvaru:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}(E\boldsymbol{v}) \\
&= \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} + \mathrm{div}(\mathcal{T}\boldsymbol{v}) + \rho q - \mathrm{div}\,\mathbf{q}.
\end{aligned}$$

Pro *Newtonovskou tekutinu* máme

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathrm{div}(E\boldsymbol{v}) = \rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} - \mathrm{div}(p\boldsymbol{v}) + \mathrm{div}(\lambda\boldsymbol{v}\ \mathrm{div}\,\boldsymbol{v})$$

$$+\operatorname{div}(2\mu \mathtt{D}(\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}) + \rho q - \operatorname{div}\mathbf{q}.$$

Systém rovnic tvořený R.K., N.S., R.E. tvoří tzv. *úplný systém rovnic Newtonovské tekutiny.*

1.10.1 *Termodynamické vztahy*

Abychom doplnili systém zákonů zachování, musíme přidat další vztahy odvozené z termodynamiky.

	rovnice	neznámé
R.K.	1	$\rho,\, v_1, v_2, v_3$
N.S.	3	$\rho,\, v_1, v_2, v_3\, p$
R.E.	1	$e,\, v_1, v_2, v_3, p\,, \theta$
	5	7

Absolutní teplota θ, hustota ρ a tlak p se nazývají *stavovými veličinami.* Všechny tyto veličiny jsou kladné funkce. Plyn je charakterizován stavovou rovnicí

$$p = p(\rho, \theta) \qquad \text{(6. rovnice)}$$

a vztahem

$$e = e(\rho, \theta) \qquad \text{(7. rovnice).}$$

často uvažujeme tzv. *dokonalý plyn* (také nazývaný ideální plyn) jehož stavové veličny splňují stavovou rovnici ve tvaru

$$\text{SR} \qquad p = R\,\theta\,\rho.$$

$R > 0$ je *plynová konstanta*, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$R = c_p - c_v,$$

kde c_p a c_v je *specifické teplo při konstantním tlaku* a *specifické teplo při konstantním objemu.* Z experimentů víme, že $c_p > c_v$, tedy $R > 0$. Uvažujeme o c_p a c_v jako o konstantách, což je předpoklad pro perfektní plyn. Experimenty ukazují, že to platí pro relativně velký rozsah teplot. Veličina

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$$

se nazývá *Poissonova adiabatická konstanta.* Např. pro vzduch $\gamma = 1.4$

Vnitřní energie pro perfektní plyn je

$$\text{V.E.} \qquad e = c_v\theta.$$

čili,

$$e = c_p\theta - R\theta = h - \frac{p}{\rho},$$

kde

$$h = c_p\theta$$

je *enthalpie.*

1.10.2 *Entropie*

Jedna z důležitých termodynamických veličin je entropie S, definovaná vztahem

$$\theta\, dS = de + p\, dV,$$

kde $V = 1/\rho$ je tzv. specifický objem. Tato rovnost je odvozena z termodynamiky za předpokladu, že vnitřní energie je funkce S a $V : e = e(S, V)$, což vysvětluje diferenciály v definici entropie.

Věta 1.28 *Pro perfektní plyn máme*

$$\begin{aligned} S &= c_v \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} + \text{konst} \\ &= c_v \ln \frac{\theta/\theta_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} + \text{konst}, \end{aligned}$$

kde p_0 a ρ_0 jsou pevné hodnoty tlaku a hustoty a $\theta_0 = p_0/(R\rho_0)$.

Důkaz Víme, že

$$dS = d(?) \Rightarrow S = ? + \text{konst}$$

tedy

$$dS = \frac{de}{\theta} - \frac{1}{\theta}\frac{p d\rho}{\rho\rho} = c_v \frac{d\theta}{\theta} - R\frac{d\rho}{\rho}$$

$$= c_v \left[d \ln\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right) - (\gamma - 1) d \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right] = c_v d\left[\ln \frac{\theta/\theta_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}}\right]$$

což dává

$$S = c_v \ln \frac{\theta/\theta_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} = c_v \ln \frac{\frac{p}{\rho}/\frac{p_0}{\rho_0}}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} = c_v \ln \frac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma}$$

□

Pokud je proudění reverzibilní proces což znamená, že systém je v každém časovém okamžiku v rovnováze s okolním médiem, potom platí *první zákon termodynamiky*

$$\delta Q = de + p\, dV,^{0}$$

kde δQ elementární teplo (vztažené na jednotku hmotnosti). ZNamená to, že teplo dodané systému je rovno součtu přírůstku vnitřní energie a elementární práce vykonané tlakovou silou. Z tohoto a definice entropie dostáváme

$$dS = \frac{\delta Q}{\theta}.$$

[0]Používáme symbol δQ protože přenos elemntárního tepla závisí na způsobu přechodu systému z jednoho stavu do druhého, proto není možné použít diferenciál dQ. V teoretické termodynamice je δQ Pfaff-1 formou a je jeho integrační faktor.

1.10.3 *Druhý termodynamický zákon*

V irreversibilním procesu, rovnost

$$dS = \frac{\delta Q}{\theta}.$$

obecně neplatí a je nahrazena nerovností

$$dS \geq \frac{\delta Q}{\theta}$$

nazývanou druhý termodynamický zákon. Pro systém tvořený částicemi, které v čase t vyplňují objem $\mathcal{V}(t)$ vyslovujem druhý termodynamický zákon ve tvaru

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}(t)} \rho(x,t)\, S(x,t)\, dx \\ &\geq \int_{\mathcal{V}(t)} \frac{\rho(x,t)q(x,t)}{\theta(x,t)}\, dx - \int_{\partial\mathcal{V}(t)} \frac{\mathbf{q}(x,t)\cdot \boldsymbol{n}(x)}{\theta(x,t)}\, dS,\end{aligned}$$

kde q a $\mathbf{q}$ značí hustotu tepelných zdrojů a tepelný tok. Levá strana strana popisuje okamžitou změnu entropie v objemu $\mathcal{V}(t)$ a první a druhý integrál na pravé straně se nazývají *entropy production* a *entropy flux*. Nechť ρ, θ, v_i, $q_i \in C^1(\mathcal{M})$, q, $f_i \in C(\mathcal{M})$, $i = 1,2,3$. Použitím rovnice kontinuity a rovnice o trasportu, dostaneme nerovnost

$$\rho\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} \geq \frac{\rho q}{\theta} - \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right).$$

9. přednáška

$$\begin{aligned}\theta dS &= de + p\, dV && \text{definice entropie } S\\ \delta Q &= de + p\, dV && \text{I.ZT}\\ dS &\geq \frac{\delta Q}{\theta} && \text{II.ZT}\\ \rho\frac{\mathrm{D}S}{\mathrm{D}t} &\geq \frac{\rho q}{\theta} - \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) && \text{I.ZT}\end{aligned}$$

matematicky formulovaná entropická nerovnost

Ukážeme (za předpokladu, že veličiny popisující proudění jsou dostatečně hladké), že II.ZT (entropická nerovnost) je splněn pro perfektní plyn. Důkaz je důsledkem *entropického tvaru* energetické rovnice. Ukažme nejdříe *rozptylový a teplotní tvar*.

1.10.4 *Rozptylový tvar rovnice energie*

Rovnice energie lze zapsat (pozn. $E = \rho(e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2)$)

$$\rho \frac{D(e + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}|^2)}{Dt} = \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \operatorname{div}(\mathcal{T}\, \boldsymbol{v}) + \rho\, q - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

Na základě rovnice kontinuity lze Navier-Stokesovy rovnice zapsat v konvektivním tvaru

$$\rho\, \underbrace{(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \boldsymbol{v})}_{\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt}} = \rho \boldsymbol{f} + \operatorname{div} \mathcal{T}$$

Vynásobíme-li tuto rovnici skalárním součinem s $\boldsymbol{v}$ dostaneme (pozn. $\frac{D\boldsymbol{v}}{Dt} \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{2} \frac{D|\boldsymbol{v}|^2}{Dt}$)

$$\rho\, \frac{1}{2} \frac{D|\boldsymbol{v}|^2}{Dt} = \rho \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + (\operatorname{div} \mathcal{T}) \cdot \boldsymbol{v}$$

Po odečtení máme

$$\begin{aligned} \rho \frac{De}{Dt} &= \operatorname{div}(\mathcal{T}\, \boldsymbol{v}) - (\operatorname{div} \mathcal{T}) \cdot \boldsymbol{v} + \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q} \\ &= \mathcal{T} \cdot \nabla \boldsymbol{v} + \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q} \end{aligned}$$

protože

$$\operatorname{div}(\mathcal{T}\, \boldsymbol{v}) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^{3} \tau_{ji}\, v_i \right) = \sum_{i,j=1}^{3} \left(v_i \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji} + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{3} v_i \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ji}}_{(\operatorname{div} \mathcal{T})_i} + \sum_{i,j=1}^{3} \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \boldsymbol{v} \cdot \operatorname{div} \mathcal{T} + \mathcal{T} \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

Dále

$$\mathcal{T} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = [(-p + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v})\mathtt{I} + 2\mu \mathtt{D}] \cdot \nabla \boldsymbol{v}$$

tedy

$$-p\mathtt{I} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} -p, 0, 0 \\ 0, -p, 0 \\ 0, 0, -p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = -p \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

$$\lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \mathtt{I} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}, 0, 0 \\ 0, \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v}, 0 \\ 0, 0, \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \lambda\, (\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2$$

$$2\mu \mathtt{D} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = 2\mu \mathtt{D} \cdot \mathtt{D} \quad (\mathtt{D} = \frac{1}{2}(\nabla \boldsymbol{v} + (\nabla \boldsymbol{v})^T))$$

a již můžeme zapsat rovnici energie v rozptylovém tvaru

$$\rho \frac{De}{Dt} = -p \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + 2\mu \mathtt{D} \cdot \mathtt{D} + \rho\, q - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

Veličina

$$D(\boldsymbol{v}) = \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + 2\mu \mathtt{D} \cdot \mathtt{D}$$

se nazývá *disipace*

Cvičení 1.29 Dokažte, že za předpokladu

$$\mu \geq 0,\ 3\lambda + 2\mu \geq 0$$

disipace splňuje $D(\boldsymbol{v}) \geq 0$
Návod:

$$D(\boldsymbol{v}) = \lambda(\operatorname{div} \boldsymbol{v})^2 + \frac{1}{2}\mu \sum_{i,j=1}^{3} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2$$

$$\geq -\frac{2}{3}\mu \left(\sum_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 + \frac{1}{2}\mu \sum_{i,j=1}^{3} (l_{ij} + l_{ji})^2$$

kde píšeme $l_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i,j = 1,2,3$

$$= \frac{1}{6}\mu \left[-4 \left(\sum_{i=1}^{3} l_{ii} \right)^2 + 3 \sum_{i,j=1}^{3} (l_{ij} + l_{ji})^2 \right]$$

$$\geq \frac{1}{6}\mu 4[(l_{11} - l_{22})^2 + (l_{11} - l_{33})^2 + (l_{22} - l_{33})^2]$$

kde jsme použili

$$3 \sum_{i,j}^{3} (l_{ij} + l_{ji})^2 = 12 \sum_{i=1}^{3} l_{ii}^2 + 3 \sum_{i \neq j}^{3} (l_{ij} + l_{ji})^2$$

a

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2]$$

1.10.5 *Teplotní tvar rovnice energie*

Na základě rozptylového tvaru rovnice energie můžeme psát

$$\rho \frac{D(\overbrace{c_v\, \theta}^{e})}{Dt} = -R\, \rho\, \theta \operatorname{div} \boldsymbol{v} + D(\boldsymbol{v}) + \rho\, q - \operatorname{div}(-k\, \nabla\theta)$$

$$c_v\, \rho \frac{D\theta}{Dt} = -p \operatorname{div} \boldsymbol{v} + D(\boldsymbol{v}) + \rho\, q - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

1.10.6 *Entropický tvar rovnice energie pro perfektní plyn*

Nechť je splněna SR pro perfektní plyn. Z definice entropie S a vnitřní energie e plyne

$$\theta\, dS = de + p\, dV$$

$$\theta\, \rho \frac{DS}{Dt} = c_v\, \rho \frac{D\theta}{Dt} - R\, \theta \frac{D\rho}{Dt} \tag{1.10.10}$$

Z R.K. vyplývá

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\, \boldsymbol{v}) = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \rho$$

což dává

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\, \rho = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

Dosadíme-li tento vztah do 1.10.10 dostaneme tento tvar rovnice energie

$$\theta\, \rho \frac{DS}{Dt} = \underbrace{-p \operatorname{div} \boldsymbol{v} + D(\boldsymbol{v}) + \rho\, q + \operatorname{div}(k \nabla \theta)}_{\rho \frac{D(c_v \theta)}{Dt}} + R\, \theta\, \rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}$$

$$= D(\boldsymbol{v}) + \rho\, q + \operatorname{div}(k \nabla \theta) \tag{1.10.11}$$

jež se nazývá *entropický tvar rovnice enrgie*
Porovnejme tuto rovnici s druhým zákonem termodynaiky

$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{\rho q}{\theta} - \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)$$

Jako důsledek rovnice 1.10.11 vidíme, že (pokud jsou veličiny popisující proudění dostatečně hladké) entropická nerovnost (=druhý zákon termodynamiky) je splněna. Protože $D(\boldsymbol{v}) \geq 0$

$$\frac{\operatorname{div}(k \nabla \theta)}{\theta} = -\frac{\operatorname{div} \mathbf{q}}{\theta} \geq -\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)$$

protože

$$-\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta^2} \nabla \theta \cdot \mathbf{q} + \frac{1}{\theta} \operatorname{div} \mathbf{q}$$
$$= \frac{1}{\theta^2} - k|\nabla \theta|^2 + \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{\theta} \leq \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{\theta}$$

1.11 Adiabatické proudění

Pokud neprobíhá tepelný přenos ani tepelná výměna, mluvíme o adiabatickém proudění. čili v adiabatickém proudění je tepelný zdroj a tepelný tok roven nule, tedy $q = 0$, $\mathbf{q} = 0$ a ve Fourierově zákoně $\mathbf{q} = -k \nabla \theta$ také $k = 0$. Jak známo tepelná vodivost a vnitřní tření reprezentuje dvě strany molekulárního přenosu. Tepelná vodivost je vztažená k molekulární kinetické energii a vnitřní tření je podmíněno přenosem molekulární hybnosti. Proto má smysl hovořit o adiabatickém proudění pouze v případě nevazkého plynu. Z entropického tvaru rovnice energie dostáváme pro adiabatické nevazké proudění

$$\theta\,\rho\frac{DS}{Dt} = \underbrace{D(\boldsymbol{v})}_{=0} + \underbrace{\rho\,q}_{=0} - \underbrace{\mathrm{div}\boldsymbol{v}}_{=0}$$

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)S$$

Pokud $x = \boldsymbol{\varphi}(X,t)$ je trajektorie částice, čili $\boldsymbol{v}(x,t) = \frac{\partial\boldsymbol{\varphi}}{\partial t}(X,t)$ máme

$$S(\boldsymbol{\varphi}(X,t),t) = \text{konst.}$$

Z tohoto a ze vztahu

$$\begin{aligned} S = &\; c_v \ln \tfrac{p/p_0}{(\rho/\rho_0)^\gamma} + \text{konst.} \quad \text{pro perfektní plyn} \\ = &\; c_v \ln \tfrac{\theta/\theta_0}{(\rho/\rho_0)^{\gamma-1}} + \text{konst. pro perfektní plyn} \end{aligned}$$

vidíme, že jsme dokázali

Věta 1.30 *V adiabatickém proudění nevazkého perfektního plynu*

$$S = \mathit{konst.}$$

podél trajektorie libovolné částice

$$p = \kappa\,\rho^\gamma$$

podél trajektorie libovolné částice, kde κ je konstanta závisející na trajektorii

Je-li podmínka $p = \kappa\,\rho^\gamma$ splněna podél trajektorie libovolné částice, pak mluvíme o *isentropickém proudění*. Pokud S =konst. v celé oblasti, pak je proudění nazýváno *homoentropické*

Poznámka 1.31 Zápis $p = \kappa\,\rho^\gamma$ není zcela korektní. Měli bychom psát

$$\frac{p}{p_0} = c\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\kappa$$

kde p_0 a ρ_0 jsou vhodné referenční hodnoty tlaku a hustoty a c je bezrozměrná konstanta ($c = 1$).

Shrnutím předchozích výsledků vidíme, že proudění perfektního plynu, popsané dostatečně hladkými funkcemi, splňuje druhý zákon termodynamiky. Je-li navíc proudění nevazké a adiabatické, pak je isentropické.
V některých speciálních případech (t.j. transonické proudění) předpoklad na spojitost nebo hladkost funkcí popisující proudění musí být relaxován a proto je nutné přeformulovat zákony zachování a druhý zákon termodynamiky ve vhodném slabém smyslu.

1.12 Barotropní proudění

Říkáme, že proudění je barotropní, pokud lze tlak vyjádřit jako funkci hustoty

$$p = p(\rho) \quad \text{v } \mathcal{M}$$

Předpokládáme, že

$$p : (0, \infty) \to (0, \infty)$$

a že existuje spojitá derivace $p' > 0$ na $(0, \infty)$
V adiabatickém barotropním proudění nevazkého perfektního plynu máme

$$p = \kappa\, \rho^\gamma \quad \text{v } \mathcal{M}$$

Takže proudění je homoentropické.

10. přednáška

1.13 Rychlost zvuku; Machovo číslo

Ještě obecnější model než barotropní proudění dostaneme za předpokladu, že tlak je funkcí hustoty a entropie:

$$p = f(\rho, S)$$

kde p je spojitě diferencovatelná a

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} > 0$$

Např. pro perfektní plyn máme

$$S = c_v \ln \frac{p}{\rho^\gamma} + \text{konst.}$$

tedy

$$p = \kappa\, \rho^\gamma \exp\left(\frac{S}{c_v}\right), \quad \kappa = \text{konst.} > 0$$

Zaveïme veličinu

$$a = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial \rho}}$$

nazývanou *rychlost zvuku*. Tato terminologie je založena na skutečnosti, že a reprezentuje rychlost šíření tlakových vln malé intensity.

Poznámka 1.32 adiabatické barotropní proudění nevazkého perfektního plynu

$$a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$$

$$\left(p = \kappa\, \rho^\gamma, \frac{dp}{d\rho} = \kappa\, \gamma\, \rho^{\gamma-1} = \frac{\gamma}{\rho} \kappa\, \rho^\gamma = \frac{\gamma}{\rho} p\right)$$

Další důležitou charakteristikou proudění je *Machovo číslo* (bezrozměrná veličina)

$$M = \frac{|\boldsymbol{v}|}{a}$$

Říkáme, že proudění je subsonické (podzvukové) nebo sonické nebo supersonické (nadzvukové) v bodě x a čase t, pokud

$$M(x,t) < 1 \text{ nebo } M(x,t) = 1 \text{ nebo } M(x,t) > 1$$

We speak of *transonic flow* in the domain Ω_t, if there exist nonempty subsets Ω_t^1 and Ω_t^2 such that the flow is subsonic in Ω_t^1 and supersonic in Ω_t^2.

1.14 Zjednodušené modely

Jsou-li veličiny popisující proudění nezávislé na čase, tedy

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv 0$$

mluvíme o *stacionárním proudění*. Řešení základních rovnic nezávisející na čase se nazývá *stacionární* řešení.
Někdy nám geometrie oblasti a charakter proudění dovoluje zavést takový systém souřadnic $x = (x_1, x_2, x_3) \in I\!R^3$, že veličiny popisující proudění nezávisí na x_3, t.j.

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv 0$$

a složka rychlosti v_3 a složka objemové síly f_3 se nulují. Dostáváme tak dvourozměrný (2D) model proudění. Mluvíme také o rovinném proudění.
Podobně dostaneme 1D model, pokud je proudění popsáno veličinami závisejícími pouze na $x = x_1 \in \Omega \subset I\!R$.
čili problémy proudění mohou být fromulovány v $I\!R^N$, kde $N = 1, 2$ nebo 3

1.15 Počáteční a okrajové podmínky

Systém základních ronic a vztahů musí být ještě doplněn počátečními podmínkami popisujícími stav v počátečním čase $t = 0$ a okrajovými podmínkami, které charakterizují chování proudění na hranici $\partial\Omega_t$
Počáteční podmínky mohou být formulovány např. jako

$$\boldsymbol{v}(x,0) = \boldsymbol{v}^0(x),\ \ \rho(x,0) = \rho^0(x),\ \ \theta(x,0) = \theta^0(x)\ \ \ x \in \Omega$$

Volba *okrajových podmínek* je komplexnější. Nejdříve předpokládejme, že Ω_t je pevná oblast. Pro rychlost je nejjednodušší volbou Dirichletova podmínka

$$\boldsymbol{v}/_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_D \tag{1.15.12}$$

s danou funkcí $\boldsymbol{v}_D$. Na pevné neprostupné stěně $\Gamma \subset \partial\Omega$ předpokládáme tzv. no-slip podmínku

$$v/_\Gamma = 0$$

vyjadřující fyzikální skutečnost, že skutečná tekutina ulpívá na Γ. Pokud je použita podmínka 1.15.12 pak na $\partial\Omega$ máme *"vtok vstupem"*

$$\Gamma_I(t) = \{x \in \partial\Omega; \boldsymbol{v}(x,t) \cdot n(x) < 0\}$$

a výtok výstupem

$$\Gamma_O(t) = \{x \in \partial\Omega; \boldsymbol{v}(x,t) \cdot n(x) > 0\}$$

kde n značí jednotkovou vnější normálu k $\partial\Omega$. Pokud $\Gamma_I(t) \neq \{\}$ pak je nutné předepsat hustotu na $\Gamma_I(t)$

$$\rho(x,t) = \rho_D(x,t), \quad x \in \Gamma_I(t),\ t \in (0,T) \tag{1.15.13}$$

V případě *nevazkého modelu*, kde $\mu = \lambda = 0$ a $k = 0$, musí být relaxována Dirichletova okrajová podmínka pro rychlost. Není důvod k ulpívání na neprostupné stěně Γ a uvažujeme podmínku

$$(\boldsymbol{v} \cdot n)/_\Gamma = 0$$

Na celé hranici, se vstupem i výstupem, používáme okrajovou podmínku

$$(\boldsymbol{v} \cdot n)/_{\partial\Omega} = \boldsymbol{v}_{nD}$$

s danou skalární funkcí $\boldsymbol{v}_{nD}$. Na vstupu opět předepisujeme hustotu, t.j. používáme podmínku dané hustoty na vstupu 1.15.13.
Ve skutečnosti, podmínky předepisující rychlost (nebo normálové složky rychlosti v nevazkém proudění) se zdají být poněkud silné na výstupu. Proto se používají 'lehké' výstupní okrajové podmínky.
pokud *tepelná vodivost* je zahrnuta v modelu, pak je nutné přidat okrajové podmínky popisující tepelné procesy na hranici. Např.

$$\left(k\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)/_{\partial\Omega} = \beta(\theta - \chi)/_{\partial\Omega}$$

kde k je koeficient tepelné vodivosti a β a χ jsou dané funkce. Také je možnost: buï

$$\theta/_{\partial\Omega} = \chi \ \text{ daná teplota na hranici}$$

nebo

$$\left(k\frac{\partial\theta}{\partial n}\right)/_{\partial\Omega} = \mathbf{q} \ \text{ daný tepelný tok hranicí}$$

Pokud je požadována regularita řešení až k hranici, pak počáteční a okrajové podmínky musí splňovat jisté *podmínky kompatibility*.

11. přednáška

1.16 Bezrozměrný tvar rovnic

Z důvodů provádění experimentů na malých modelech (např. proudění kolem letadla v aerodynamickém tunelu) a jejich aplikací na skutečné proudění, používáme *bezrozměrný tvar* rovnic.

Zaveïme následující kladné *charakteristické veličiny*: charakteristická délka L^*, charakteristická rychlost U^* (skalární veličina), Charakteristickou hustotu ρ^*, charakteristické objemové síly f^* (např. gravitační konstanta g), charakteristická vazkost μ^* a charakteristický koeficient tepelné vodivosti k^*.

Vynásobme rovnici kontinuity $L^*/(\rho^* U^*)$, Navierovy-Stokesovy rovnice $L^*/(\rho^* U^{*2})$ a rovnici enerie $L^*/(\rho^* U^{*3})$. Dostáváme

$$\frac{\partial \rho/\rho^*}{\partial t\, U^*/L^*} + \operatorname{div}'(\rho/\rho^*\, \boldsymbol{v}/U^*) = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho/\rho^*\, \boldsymbol{v}/U^*)}{\partial t\, U^*/L^*} + \operatorname{div}'(\rho/\rho^*\, \boldsymbol{v}/U^* \otimes \boldsymbol{v}/U^*) = \frac{1}{\left(\frac{U^*}{\sqrt{L^* f^*}}\right)^2} \rho/\rho^* \boldsymbol{f}/f^* - \nabla' p/(\rho^* U^{*2})$$

$$+ \frac{1}{\frac{\rho^* U^* L^*}{\mu^*}} \left[\nabla' \left(\frac{\lambda}{\mu^*} \operatorname{div}' \boldsymbol{v}/U^*\right) + \operatorname{div}' \left(2\frac{\mu}{\mu^*} \mathtt{D}'(\boldsymbol{v}/U^*)\right)\right],$$

$$\frac{\partial E/(\rho^* U^{*2})}{\partial t\, U^*/L^*} + \operatorname{div}'(E/(\rho^* U^{*2})\, \boldsymbol{v}/U^*) = \frac{1}{\left(\frac{U^*}{\sqrt{L^* f^*}}\right)^2} \rho/\rho^* \boldsymbol{f}/f^* \cdot \boldsymbol{v}/U^*$$

$$-\operatorname{div}'(p/(\rho^* U^{*2}) \boldsymbol{v}/U^*) + \frac{1}{\frac{\rho^* U^* L^*}{\mu^*}} \left[\operatorname{div}' \left(\frac{\lambda}{\mu^*} \boldsymbol{v}/U^* \operatorname{div}' \boldsymbol{v}/U^*\right) + \operatorname{div}' \left(2\frac{\mu}{\mu^*} \mathtt{D}'(\boldsymbol{v}/U^*) \boldsymbol{v}/U^*\right)\right]$$

$$+ \rho/\rho^* q/\frac{U^{*3}}{L^*} + \operatorname{div}' \left(\frac{k}{\frac{\rho^* U^* L^*}{\mu^*} k^* \frac{c_V}{c_p} \frac{c_p \mu^*}{k^*}}\right) \nabla' \theta/(U^{*2} c_V).$$

Označme čárkou bezrozměrné veličiny

$$x_i' = x_i/L^*, \quad \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}/U^*, \quad \rho' = \rho/\rho^*$$

$$\boldsymbol{f}' = \boldsymbol{f}/\boldsymbol{f}^*, \quad \mu' = \mu/\mu^*, \quad k' = k/k^*,$$

a

$$p' = p/(\rho^* U^{*2}), \quad E' = E/(\rho^* U^{*2}), \quad \theta' = \frac{c_v \theta}{U^{*2}}$$

$$q' = \frac{q L^*}{U^{*3}}, \quad t' = t\, U^*/L^*, \quad \lambda' = \lambda/\mu^*$$

Dosazením bezrozměrných veličin, můžeme předchozí systém zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \operatorname{div}'(\rho' \boldsymbol{v}') = 0$$

(t.j. rovnice kontinuity se nezmění)

$$\frac{\partial(\rho' \boldsymbol{v}')}{\partial t'} + \operatorname{div}'(\rho' \boldsymbol{v}' \otimes \boldsymbol{v}') = \frac{1}{Fr^2}\rho' \boldsymbol{f}' - \nabla' p'$$
$$+\frac{1}{Re}\left[\nabla'(\lambda' \operatorname{div}' \boldsymbol{v}') + \operatorname{div}'(2\mu' \mathtt{D}'(\boldsymbol{v}'))\right],$$

$$\frac{\partial E'}{\partial t'} + \operatorname{div}'(E' \boldsymbol{v}') = \frac{1}{Fr^2}\rho' \boldsymbol{f}' \cdot \boldsymbol{v}' - \operatorname{div}'(p' \boldsymbol{v}')$$
$$+\frac{1}{Re}[\operatorname{div}'(\lambda' \boldsymbol{v}' \operatorname{div}' \boldsymbol{v}') + \operatorname{div}'(2\mu' \mathtt{D}'(\boldsymbol{v}')\boldsymbol{v}')] + \rho' q' + \operatorname{div}'\left(\frac{\gamma k'}{Re\, Pr}\nabla' \theta'\right),$$

kde

$$Fr = U^*/\sqrt{L^* \boldsymbol{f}^*}, \quad Re = \rho^* U^* L^*/\mu^*, \quad Pr = c_p \mu^*/k^*$$

jsou Froudovo, Reynoldsovo a Prandtlovo číslo. čárky $'$ v operátorech div, ∇ a $\mathtt{D}$ znamenají, že parciální derivace v těchto operátorech jsou vzhledem k x'.

V sekci 1.10.1 (Termodynamické vztahy) jsme rovnice doplnili stavovou rovnicí

$$p = R\rho\theta$$

a vztahem pro vnitřní energii

$$e = c_V \theta.$$

Vynásobením stavové rovnice členem $1/\rho^* {U^*}^2$ a vztahu pro vnitřní energii členem $1/{U^*}^2$, dostáváme jejich bezrozměrný tvar. Použitím následujících vztahů

$$p = R\rho\theta = (c_p - c_V)\rho\theta = c_V\left(\frac{c_p}{c_V} - 1\right)\rho\theta$$
$$= (\gamma - 1)\rho e = (\gamma - 1)(E - \frac{1}{2}\rho|\boldsymbol{v}|^2)$$

dostáváme pro stavovou rovnici

$$p' = (\gamma - 1)(E' - \frac{1}{2}\rho'|\boldsymbol{v}|^2).$$

Nakonec bezrozměrný tvar rovnice $e = c_V\theta$ je

$$\theta' = \frac{E'}{\rho'} - \frac{|\boldsymbol{v}'|^2}{2}$$

Předpokládejme, že $\mu' = \mu'(\theta'),\ \lambda' = \lambda'(\theta')$ a $k' = k'(\theta')$ jsou funkce, pak máme čtyři parametry podobnosti Re, Fr, Pr, γ.

Uvažujme cvě proudění v geometricky podobných oblastech Ω_1 a Ω_2 ($\Omega_1 = L\,\Omega_2$, $L =$ konst. > 0). Předpokládejme, že obě proudění mají konstanní a nenulové koeficienty vazkosti λ, μ a tepelné vodivosti k. Zvolme μ a k jako charakteristické hodnoty. Tyto dvě proudění nazveme dynamicky podobné, jestliže mají stejné Froudovo, Reynoldsovo a Prandtlovo číslo. Potom jejich rovnice kontinuity, Navierovy-Stokesovy rovnice a rovnice energie jsou stejné, za předpokladu, že γ a poměr $\frac{\lambda}{\mu}$ jsou stejné pro obě proudění. Navíc pokud jejich bezrozměrné okrajové podmínky jsou identické, pak jedno proudění můžeme získat změnou měřítka druhého proudění.

Cvičení 1.33 Uvažujme dvě proudění podél tělesa. Rychlost v nekonečnu předpokládáme nulovou a její směr je ve směru osy x_1. V prvním případě má těleso $\overline{\Omega}_1$ průměr $L_1 = 10\,\mathrm{m}$ a rychlost je $U_1^\infty = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. V druhém případě uvažujeme geometricky podobné těleso $\overline{\Omega}_2$ s průměrem $L = 1\,\mathrm{m}$. Zanedbáváme objemové síly a předpokládáme, že obě proudění mají stejná Reynoldsova, Prandtlova čísla a koeficienty vazkosti. Zvolme průměr tělesa jako L^* a rychlost jako U^*. Vyjádřením rychlosti U_2^∞, tak aby byla splněna dynamická podobnost, dostáváme rychlostní vektorové pole změnou měřítka.

12. přednáška

2

OKRAJOVÁ ÚLOHA TEORIE PRUŽNOSTI

2.1 Tenzor napětí

Nejprve představíme základní koncepty
Těleso Ω je oblast v $I\!R^3$. *Tělesová síla* $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2, f_3)^T$ je hustota síly, která působí na každou objemovou jednotku tělesa Ω.Příkladem jsou gravitační, setrvační nebo elektrostatické síly. Jednotkou f_i je N/m^3. Předpokládáme $\boldsymbol{f} \in C(\overline{\Omega})^3$. Uvažujme nyní část $\mathcal{V}$ tělesa takovou, že $\overline{\mathcal{V}} \subset \Omega$ a předpokládejme, že $\mathcal{V}$ má lipschitzovsky spojitou hranici $\partial\mathcal{V}$. Nechť $x \in \partial\mathcal{V}$ a označme $\boldsymbol{n}$ jednotkovou vnější normálu k $\mathcal{V}$ v bodě x.
Vektor napětí $\boldsymbol{T}(x, \boldsymbol{n})$ reprezentuje hustotu vnitřních sil v tělese působících z části $\Omega - \mathcal{V}$ tělesa na část $\overline{\mathcal{V}}$ v bodě x. Závisí na bodě x a také na směru normály $\boldsymbol{n}$. Předpokládáme $\boldsymbol{T}(x, \boldsymbol{n}) \in C(\overline{\Omega} \times \mathcal{S})^3$, kde $\mathcal{S}$ je povrch jednotkové koule. Jednotka T_i je N/m^3.
V důsledku třetího Newtonova zákona máme $\boldsymbol{T}(x, \boldsymbol{n}) = -\boldsymbol{T}(x, -\boldsymbol{n})$.
Projekce $\boldsymbol{T}(x, \boldsymbol{n})$ na normálu $\boldsymbol{n}$

$$N(x, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{T}(x, \boldsymbol{n}) \cdot \boldsymbol{n}$$

se nazývá *normálové napětí*, projekce na tečnou rovinu k $\mathcal{V}$, t.j. rozdíl $\boldsymbol{T}(x, \boldsymbol{n}) - N(x, \boldsymbol{n})\,\nu$, se nazývá it smyk(nebo *tečné napětí*).

2.1.1 *Složky tenzoru napětí*

Vektor napětí $\boldsymbol{T}$ může být vyjádřen pomocí jeho vlastních hodnot pro jisté normály. Zvolme normály rovnoběžné k souřadnicovým osám a položme

$$\tau_{ji} = T_i(x, t, e_j), \quad i, j = 1, 2, 3$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Veličiny $\tau_{ji}(x, t),\; i, j = 1, 2, 3$ se nazývají *prvky tenzoru napětí.*
Prvky $\tau_{ii},\; i = 1, 2, 3$ se nazývají *normálová napětí*, a prvky $\tau_{ij},\; i \neq j,\; i, j = 1, 2, 3$ se nazývají *tečná napětí.*
Podobně jako v sekci 1.5, kde jsme se zabývali tenzorem napětí v mechanice tekutin, můžeme ukázat, že

$$T_i(x, \boldsymbol{n}) = \sum_{j=1}^{3} n_j\, T_i(x, e_j) = \sum_{j=1}^{3} n_j\, \tau_{ji}(x)$$

K tomu použijeme rovnice pro rovnovážný stav

$$\int_{\mathcal{V}_h} f_i(x)\,dx + \int_{\partial\mathcal{V}_h} T_i(x,\boldsymbol{n})\,dS = 0$$

pro čtyřstěn $\mathcal{V}$ definovaný v sekci 1.5 a použitím stejného limitního procesu pro $h \to 0$ jako v sekci 1.5.

2.1.2 *Rovnice rovnováhy*

Předpokládejme, že $\tau_{ij} \in C^1(\Omega)$ a $f_i \in C(\Omega)(i,j = 1,2,3)$. Vyjádřením podmínek pro rovnováhu sil působících na kontrolní objem $\mathcal{V}$, dostáváme

$$\int_{\mathcal{V}} f_i(x)\,dx + \int_{\partial\mathcal{V}} \sum_{j=1}^{3} n_j(x)\,\tau_{ji}(x)\,dS = 0$$

pro libovolný kontrolní objem $\mathcal{V}$ v Ω.
Nadto, použitím greenovy věty a lemmatu 1.14 ze sekce 1.3, dostáváme rovnice rovnováhy

$$f_i + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = 0, \quad i = 1,2,3$$

Uvažujeme-li podmínky rovnováhy hybnosti kontrolního objemu $\mathcal{V}$, máme

$$\int_{\mathcal{V}} x \times \boldsymbol{f}(x)\,dx + \int_{\partial\mathcal{V}} x \times \boldsymbol{T}(x,\boldsymbol{n})\,dS = 0$$

Použitím podobné techniky jako v sekci 1.7, můžeme dokázat, že rovnováha hybnosti je ekvivalentní symetrii tenzoru napětí.

2.2 Tenzor deformace

V této části představíme jiný klasický koncept mechaniky a to koncept tenzoru deformace. *Tenzor konečné deformace* charakterizuje změnu vzdálenosti dvou bodů tělesa. Uvedeme fyzikální interpretaci tohoto tenzoru a zmíníme se o významu *tenzoru malé deformace*. Na rozdíl od předchozí části, kde Cauchyův tenzor napětí je vztažen na těleso po deformaci, je tenzor konečné deformace vztažen na těleso před deformací.

2.2.1 *Tenzor konečné deformace*

Uvažujme těleso Ω a bod $x \in \Omega$. Po deformaci přejde těleso Ω na těleso Ω' a bod x do bodu y.
Předpokládejme, že existuje nějaká funkce bodů, popisující deformaci

$$x \longrightarrow y(x) = x + \boldsymbol{u}(x)$$

kde $\boldsymbol{u}(x)$ je vektor posunutí. O transformaci $y(x)$ předpokládáme, že je to difeomorfismus (t.j. takové prosté zobrazení tělesa Ω na těleso Ω', $y_i \in C^1(\Omega)$,

že také pro inverzní zobrazení platí $x_i \in C^1(\Omega'))$ a že $u_i \in C^3(\Omega)$. (Předpoklady na $\boldsymbol{u}$ mohou být oslabeny.)
Nechť Δx je nějaký vektor. Uvažujme vektor $x + t\Delta x$, kde t je reálné číslo, a zkoumejme rozdíl čtverců délky úsečky $\overline{x, x + t\Delta x}$ po deformaci a před ní. Dostaneme funkci

$$\varphi(t) := |\text{úsečka po def.}|^2 - |\text{úsečka před def.}|^2$$

Požadujeme, aby funkce φ měla v bodě 0 spojité derivace do 2.řádu. Ukážeme, že v Taylorově rozvoji funkce φ

$$\varphi(t) = \varphi(0) + t\varphi'(0) + \frac{t^2}{2}\varphi''(0) + o(t^2)$$

$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ a teprve druhá derivace φ'' je obecně nenulová. Proto $\varphi''(0)$ je nejnižší derivací, která může charakterizovat deformaci. To nás vede k *tenzoru konečné deformace*.

$$\varphi(t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{3} |u_i(x + t\Delta x) - u_i(x) + t\Delta x_i|^2}_{\text{po}} - \underbrace{|t\Delta x|^2}_{\text{před}}$$

$$= 2t\sum_{i=1}^{3}[u_i(x + t\Delta x) - u_i(x)]\Delta x_i + \sum_{i=1}^{3}[u_i(x + t\Delta x) - u_i(x)]^2$$

$$= 2t\sum_{i=1}^{3}(\psi_i(1) - \psi_i(0))\Delta x_i + \sum_{i=1}^{3}(\psi_i(1) - \psi_i(0))^2$$

kde

$$\psi_i(\tau) = u_i(x + \tau t\Delta x)$$

Užitím vztahu

$$\psi_i(1) - \psi_i(0) = \int_0^1 \psi_i'(\tau)\, d\tau = \int_0^1 \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x + \tau t\Delta x) t\Delta x_j$$

můžeme vyjádřit $\varphi(t)$

$$\varphi(t) = 2t^2 \sum_{i,j=1}^{3} \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x + \tau t\Delta x)\Delta x_i \Delta x_j d\tau + t^2 \sum_{i=1}^{3} \left(\sum_{j=1}^{3} \Delta x_j \int_0^1 \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x + \tau t\Delta x) d\tau \right)^2$$

$$= 2t^2 A(t) + t^2 B(t)$$

Taylorovým rozvojem funkce φ v bodě 0 dostáváme

$$\varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(t) = 4tA(t) + 2t^2A'(t) + 2tB(t) + t^2B'(t)$$

$$\varphi''(t) = 4A(t) + 4tA'(t) + 2t^2A''(t) + 4tA'(t) + 2B(t) + 2tB'(t) + 2tB'(t) + t^2B''(t)$$

$$\varphi''(0) = 4A(0) + 2B(0)$$

$$= 4\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\Delta x_i \Delta x_j + 2\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x)\Delta x_j \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Delta x_k$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(x) + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)\right)\Delta x_i \Delta x_j + 2\sum_{i,j=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right)\Delta x_i \Delta x_j$$

$$= 2\sum_{i,j=1}^{3}\left[\underbrace{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}}_{2\epsilon_{ij}(x)}\right]\Delta x_i \Delta x_j$$

Položením

$$2\epsilon_{ij}(x) = \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

máme

$$\frac{1}{2}\varphi''(0) = 2\sum_{i,j=1}^{3}\epsilon_{ij}\Delta x_i \Delta x_j$$

Matice $(\epsilon_{ij})_{i,j=1}^{3}$ se nazývá *tenzor konečné deformace*

2.2.2 *Tenzor malé deformace*

Lineární část v Tyalorově rozvoji (vzhledem ke gradientu posunutí) tenzoru konečné deformace

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)$$

nazýváme *tenzorem malé deformace* a značíme e_{ij}. Je tedy

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

2.3 Zobecněný Hookeův zákon

Tato část je věnována vztahu mezi tenzorem napětí a tenzorem deformace. Uvedeme klasický lineární zobecněný Hookeův zákon, který charakterizuje velkou třídu pružných materiálů, jako jsou např. ocel, beton, sklo, keramické materiály, dřevo apod.

2.3.1 *Tahová zkouška*

Uvažujme tyč délky l o (konstantním) obsahu průřezu q a položme ji do osy x_1. Zatížíme ji na obou koncích tahovou silou P.
Předpokládejme, že normálové napětí τ_{11} je konstantní v celé tyči. Z rovnováhy části tyče vlevo od rovinného řezu $m - m'$ plyne, že

$$\tau = \tau_{11} = \frac{T}{q}$$

zanedbáme-li zmenšení obsahu průřezu vlivem protažení tyče. Měříme-li nyní závislost poměrného prodloužení $e = \frac{\Delta l}{l}$ na napětí τ, dostaneme tzv. diagrma zkoušky v tahu (viz obr. odpovídající oceli). část křivky mezi body O a A je přímá. Příslušné napětí σ_A se nazývá *mez úměrnosti.* část křivky mezi body A a B je křivá a bodě B se náhle zvětší protažení beze změny napětí. Napětí σ_B se nazývá *mez průtažnosti.* Při dalším růstu napětí roste i protažení až do bodu C, jemuž odpovídá napětí σ_C, zvané *mez pevnosti.* Po dalším zvětšování napětí dojde konečně k přetržení tyče.
Nechť nyní v určitém bodě křivky zastavíme narůstání síly P a začneme sílu zmenšovat zpět k nule. Jestliže obrat nastal při dosti malém napětí τ, vrátíme se po stejné křivce do počátku. Maximální z takových napětí nazýváme *mezí pružnosti* σ_E. Zpravidla je

$$\sigma_E \geq \sigma_A$$

Deformace příslušející napětí $\tau \leq \sigma_E$ nazýváme *elastické (pružné).* Pružná deformace po odlehčení zpět na nulu tedy úplně vymizí.
Jestliže však překročíme hodnotu σ_E a teprve pak odlehčíme, pak část prodloužení sice zmizí, ale část trvale zůstává. Této části deformace se říká *plastická.* Velikost trvalé deformace závisí na druhu materiálu, teplotě apod.
Studiem pružných deformací se zabývá *teorie pružnosti*, studiem plastických deformací *teorie plasticity.* U některých materiálů je přímá část grafu tak malá, že se s ní prakticky nepočítá, ale i pro dosti velká napětí lze deformace považovat za elastické (t.j. $\sigma_E > \sigma_A \doteq 0$).
K podobným výsledkům se dospívá při zkoušce tlakem, ohybem nebo kroucením.
V dalším výkladu se budeme zabývat hlavně *lineární teorií pružnosti*, která odpovídá napětím $\tau < \sigma_A$. Pak platí Hookův zákon úměrnosti

$$\tau = Ee,$$

kde E je tzv. Youngův modul pružnosti.

2.3.2 *Zobecněný Hookeův zákon*

V minulé části jsme vyšetřovali jen „jednoosý” případ, tj. deformaci jen ve směru působícího napětí τ_{11}. Nyní zobecníme Hookův zákon na obecný případ prostorové „trojosé” deformace a napětí.

Předpokládejme, že
1) Tenzor $\mathcal{T}$ je spojitou funckí tenzoru malé deformace,

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(\boldsymbol{u}) = (e_{ij})_{i,j=1}^3, \ e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

2) Materiál tělesa je izotropní. To znamená, že jeho vlastnosti jsou stejné ve všech směrech
3) Tenzor napětí se nuluje pokud tenzor deformace je nula
4) Vztah mezi $\mathcal{T}$ a $\mathcal{E}$ je lineární

Matematicky můžeme předchozí předpoklady zformulovat takto:
$1^\star$) $\mathcal{T} = f(\mathcal{E})$, f je spojitá
$2^\star$) Zobrazení f je invariantní vzhledem transformaci souřadnic: $\mathcal{S}\,\mathcal{T}\,\mathcal{S}^{-1} = f(\mathcal{S}\,\mathcal{E}\,\mathcal{S}^{-1})$ pro kažnou ortonormální matici $\mathcal{S}$.
$3^\star$) f(0)=0
$4^\star$) Zobrazení f je lineární

(lineární vztah $4^\star$ s žádným konstantním členem dává $3^\star$)
Předpokládejme, že

$$\tau_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl} e_{kl} \quad i,j = 1,2,3.$$

Podmínky

$$c_{ijkl} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} = c_{ijlk}$$

plynou ze symetrie tenzorů $\mathcal{T}$ a $\mathcal{E}$.
Dále dostáváme

$$c_{ijkl} = c_{klij}$$

z enegetických úvah.
Celkem tedy existuje nejvýše 21 nezávislých konstant c_{ijkl}, charakterizujících obecný materiál v bodě x. Protože např. modrá skalice má vskutku 21 nezávislých konstant, nelze tento počet obecně snížit.

Definice 2.1 *Jestliže konstanty $c_{ijkl}(x)$ nezávisí na bodu $x \in \Omega$, pak materiál tělesa se nazývá homogenní.*
Jestliže konstanty $c_{ijkl}(x)$ nezávisí na volbě soustavy souřadnic, pak materiál tělesa se nazývá izotropní v bodě x. V opačném případě se materiál tělesa nazývá anizotropní v bodě x.

Poznámka 2.2 Například dřevo je anizotropní v každém bodě, neboť má různé vlastnosti podél vláken a napříč vláken (říkáme, že je ortotropní).

Věta 2.3

$$\mathcal{T} = \lambda\vartheta \mathtt{I} + 2\mu\mathcal{E},$$

kde

$$\vartheta(x) = \operatorname{div} \boldsymbol{u}(x) \ \text{ a } \lambda = \lambda(x), \ \mu = \mu(x)$$

jsou tzv. Laméovy koeficienty.

Poznámka 2.4

$$\lambda = c_{1122},\ \mu = c_{1212}$$

1.26

Důkaz Podobný jako 1.26 1. $\operatorname{div} \boldsymbol{u}$ rovná se součtu vlastních čísel $\mathcal{E}$ (a proto je to invariant vzhledem k transformaci souřadnic ortonormální maticí)
2. Každá ortonormální matice, transformující $\mathcal{E}$ na diagonální matici, transformuje také $\mathcal{T}$ na diagonální matici
Můžeme tedy psát

$$\mathcal{T} = f(\mathcal{E})$$

$$\underbrace{\tilde{\mathcal{S}}\,\mathcal{T}\,\tilde{\mathcal{S}}^{-1}}_{\text{diagonální}} = f(\underbrace{\tilde{\mathcal{S}}\,\mathcal{E}\,\tilde{\mathcal{S}}^{-1}}_{\text{diagonální}})$$

$$\overline{\mathcal{T}} = f(\overline{\mathcal{E}})$$

Předpoklad linearity f dává

$$\overline{\tau_{11}} = \alpha_{11}\overline{e_{11}} + \alpha_{12}\overline{e_{22}} + \alpha_{13}\overline{e_{33}}$$

$$(\alpha_{12} = \alpha_{13})$$

$$= \underbrace{(\alpha_{11} - \alpha_{12})}_{2\mu_1}\overline{e_{11}} + \underbrace{\alpha_{12}}_{\lambda_1}\underbrace{(\overline{e_{11}} + \overline{e_{22}} + \overline{e_{33}})}_{\operatorname{div} \boldsymbol{u}}$$

Podobně pro $\overline{\tau_{22}}$ a $\overline{\tau_{33}}$. Nakonec ukážeme

$$\overline{\tau_{ii}} = 2\mu\,\overline{e_{ii}} + \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

a

$$\mathcal{T} = \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \mathtt{I} + 2\mu\mathcal{E}$$

□

2.3.3 *Vlastnosti koeficientů*

Předpokládejme, že k zobecněnému Hookovu zákonu existuje inverzní zákon, tj. že můžeme vypočítat složky tenzoru malé deformace e_{ij} pomocí tenzoru napětí $\mathcal{T}$. Soustavu

$$\tau_{ij} = \sum_{k,l=1}^{3} c_{ijkl} e_{kl}$$

lze vyřešit jednoznačně vzhledem k e_{ij}. Determinant matice 6×6 soustavy

$$\mathcal{T} = \lambda \operatorname{div} \boldsymbol{u}\, \mathtt{I} + 2\mu\mathcal{E}$$

se rovná

$$(2\mu)^5(3\lambda + 2\mu).$$

Tedy z předpokladu plyne

$$\mu \neq 0,\ 3\lambda + 2\mu \neq 0$$

Lze provést několik myšlenkových pokusů a ukázat

$$3\lambda + 2\mu > 0$$

(homogení krychle zatížená pouze hydrostatickým tlakem)

$$\mu > 0$$

(krychle zatížená jen konstatním smykem $T > 0$ na čtyřech stěnách)
Inverzní Hookův zákon můžeme zapsat použitím vztahů

$$\tau_{ii} = \lambda\vartheta + 2\mu\, e_{ii} \quad |\sum_i,\ \theta := \sum_i \tau_{ii},\ \ \vartheta = \sum_i e_{ii}$$

$$\theta = 3\lambda\vartheta + 2\mu\vartheta$$

$$\theta = (3\lambda + 2\mu)\vartheta$$

tedy

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\tau_{ij} - \lambda\frac{\theta}{3\lambda + 2\mu}\delta_{ij}\right)$$

V technické praxi se místo Laméových koeficientů λ a μ, častěji používají Youngův modul pružnosti E a Poissonova konstanta σ. Jsou definovány následovně Pro tahovou zkoušku jsme zavedli Hookův zákon pro „jednoosý" tah ve tvaru

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\tau = \frac{1}{E}\tau_{11}$$

Uvažujme kruhový válec, jehož osa leží v ose x_1, zatížený tahem T =konst. na čelních stěnách, tj.

$$x_1 = l : \quad \mathtt{T} = (T, 0, 0)^T$$

$$x_1 = 0 : \quad \mathtt{T} = (-T, 0, 0)^T$$

Na plášti válce nepůsobí zatížení. Můžeme tedy ukázat, že

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Inverzní Hookův zákon

$$e_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(\tau_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\theta\delta_{ij}\right), \theta = \sum \tau_{ii}$$

dává

$$e_{11} = \frac{1}{2\mu}\left(T - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}T\right) = \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)}T$$

V našem případě tedy

$$\Delta l = [l + u_1(l) - (0 + u_1(0))] - l$$

$$= \int_0^l \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\,dx_1 = \int_0^l e_{11}(x)\,dx$$

$$= l\frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu}\tau_{11}, \ \ \tau_{11} = T$$

Porovnáním s

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\tau_{11}$$

dostáváme

$$\frac{1}{E} = \frac{\lambda + \mu}{3\lambda + 2\mu}$$

Dále

$$e_{22} = e_{33} = \frac{1}{2\mu}\left(0 - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}T\right) = -\frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}T$$

Značíme

$$\sigma = \left|\frac{e_{22}}{e_{11}}\right|$$

t.j.

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

tento poměr se nazývá Poissonova konstanta.
Na závěr můžeme vyjádřit Lamého koeficienty pomocí Youngova modulu pružnosti E a Poissovy konstanty σ

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \sigma)}, \qquad \lambda = \frac{\sigma E}{1 + \sigma}\frac{1}{1 - 2\sigma}$$

2.3.4 *Lamého rovnice. Beltramiovy-Michellovy rovnice*

Předpokládejme, že
- platí zobecněný Hookův zákon
- $\lambda \in C^1(\overline{\Omega}), \ \mu \in C^1(\overline{\Omega})$
- $\mu_i \in C^2(\Omega)$

- $f_i \in C^1(\overline{\Omega})$

Dosadíme-li do rovnic rovnováhy ze zobecněného Hookova zákona

$$\tau_{ij} = \lambda\delta_{ij}\vartheta + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right), \quad \vartheta = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$$

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ji}(x) + f_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

dostaneme *obecné Laméovy rovnice*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\,\vartheta) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

Předpokládejme, že μ, λ jsou konstany. Dostaneme

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\vartheta + \mu\,\Delta u_i + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

což jsou *Laméovy rovnice*. Platí pro homogení a izotropní materiál.
Nyní odvodíme Beltramiovy-Michellovy rovnice.
Nechť $u_i \in C^3(\Omega)$. Derivací Lamého rovnic vzhledem k x_i a sečtením přes i, dostaneme

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\vartheta + \mu\Delta x_i + f_i = 0 \quad |\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{i=1}^{3}, \lambda, \mu, \vartheta \to E, \sigma, \theta$$

$$\Delta\theta + \frac{1 + \sigma}{1 - \sigma}\operatorname{div}\boldsymbol{f} = 0 \qquad \theta = \sum_{i=1}^{3}\tau_{ii}$$

což je první *Beltramiova-Michellova rovnice*
Derivováním Lamého rovnic podle x_j, záměnou indexů $i \leftrightarrow j$, sečtením výsledných rovnic a použitím první B-M rovnice dostáváme

$$(\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\vartheta + \mu\Delta u_i + f_i = 0 \quad |\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{1}{2}, \text{záměna indexů, 1. B-M rce}$$

$$\frac{1}{2(1 + \sigma)}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{2}\Delta\tau_{ij} + \frac{\sigma}{2(1 - \sigma)}\delta_{ij}\operatorname{div}\boldsymbol{f} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right) = 0$$

což jsou další Beltramiovy-Michellovy rovnice. Obsahují šest nezávislých rovnic, neboť je tu symetrie v i a j. Z těchto rovnic je však nových jen pět, neboť sečtením přes $i = j$ odvodíme první B-M rovnici.

2.3.5 *Klasické formulace úloh pružnosti*

Předpokládejme
- $\mu, \lambda \in C^1(\overline{\Omega})$
- $u_i \in C^2(\Omega)$
- $\partial\Omega$ je spojitě diferencovatelná

Uvažujme obecné Laméovy rovnice a okrajové podmínky některého z následujících typů

2.3.5.1 *První základní okrajová úloha teorie pružnosti* Hledáme $u_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ i = 1,2,3$ tak, že

$$\text{GLE}\quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\vartheta) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + f_i = 0, \quad i = 1,2,3,\ \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$\sum_{j=1}^{3} \tau_{ji}(x) n_j = T_i(x)$$

$$\mathcal{T}\,\boldsymbol{n} = \mathtt{T}$$

$\mathtt{T} = (T_1, T_2, T_3)^T$ povrchové síly jsou dány na hranici $\partial\Omega,\ T_i \in C(\partial\Omega)$
tj.

$$\text{BC1}\qquad \lambda\vartheta n_i + 2\mu \sum_{j=1}^{3} e_{ij} n_j = T_i, \quad x \in \partial\Omega,\ i = 1,2,3$$

2.3.5.2 *Druhá základní okrajová úloha teorie pružnosti* Hledáme $u_i \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ i = 1,2,3$ tak, že

$$\text{GLE}\quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\vartheta) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + f_i = 0, \quad i = 1,2,3,\ \text{v } \Omega$$

s okrajovou podmínkou

$$\text{BC2}\qquad \boldsymbol{u}(x) = \overline{\boldsymbol{u}}(x), \quad x \in \partial\Omega$$

(předepsané posunutí na $\partial\Omega,\ \overline{\boldsymbol{u}} \in C(\partial\Omega)$)

2.3.5.3 *Kombinovaná základní okrajová úloha teorie pružnosti* Nechť Γ_τ a Γ_u jsou disjunktní a otevřené v $\partial\Omega$ a

$$\partial\Omega = \Gamma_\tau \cup \Gamma_u \cup \mathcal{R}$$

kde povrchová míra $\mathcal{R}$ je nulová. Hledáme $u_i \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega \cup \Gamma_\tau) \cup C(\Omega \cup \Gamma_u),\ i = 1,2,3$ splňující

$$\text{GLE}\quad \frac{\partial}{\partial x_i}(\lambda\vartheta)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mu\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)+f_i=0,\quad i=1,2,3,\ \text{v }\Omega$$

a podmínky

$$\text{BC1}-\tau \qquad \lambda\vartheta n_i+2\mu\sum_{j=1}^{3}e_{ij}n_j=T_i,\quad x\in\Gamma_\tau,\ i=1,2,3$$

$$\text{BC2-}u \qquad \boldsymbol{u}(x)=\overline{\boldsymbol{u}}(x),\quad x\in\Gamma_u,\ i=1,2,3$$

BIBLIOGRAFIE

Feistauer, M. (1993). *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow.

Feistauer, M., Felcman, J., and Straškraba, I. (2003). *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford University Press, Oxford.

Kurzweil, J. (1986). *Ordinary Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam.

Nečas, J. and Hlaváček, I. (1981). *Úvod do teorie pružných a pružně plastických těles*. SNTL, Praha.

INDEX