

Matematické metody v mechanice tekutin

Jiří Felcman
Univerzita Karlova v Praze



Matematicko-fyzikální fakulta



KNM PRESS • PRAHA

2006

PŘEDMLUVA

1. přednáška

1. felcman@karlin.mff.cuni.cz
 - Tel. 2 2191 3392
 - KNM č. dv. 422
2. Matematické metody v mechanice tekutin - anotace
 - M/4/MOD
 - M/4/VM
3. Požadavky ke zkoušce
 - státnice
 - syllabus
4. Tituly
 - PhD (projekt + angličtina)
 - RNDr.
 - Mgr.
 - Bc
5. Studium v zahraničí - ERASMUS
6. Ceny udělované studentům
7. SVOČ
8. Hodnocení učitelů - srozumitelnost

Práce je částí výzkumného projektu MSM 0021620839 financovaného MŠMT. Děkuji panu Petru Šedivému, studentu MFF UK, který napsal v L^AT_EXu tento učební text a přispěl tak podstatnou měrou k jeho realizaci.

Praha, únor 2006

J. F.

OBSAH

Úvod	1
1 Matematická teorie stlačitelného proudění	2
1.1 Rovnice popisující proudění	2
1.1.1 Zákony zachování	2
1.1.2 Termodynamické vztahy	5
1.2 Eulerovy rovnice	6
1.2.1 Zjednodušení systému rovnic	6
1.2.2 Formulace problému	8
1.3 Vlastnosti Eulerových rovnic	9
1.3.1 Homogenita	9
1.3.2 Hyperbolicita	9
1.3.3 Rotační invariantnost	10
1.4 Cauchyho úloha	12
1.4.1 Kvazilineární skalární rovnice	12
1.4.2 Lineární skalární rovnice	15
1.4.3 Cauchyho úloha pro ne vazkou Burgersovu rovnici	16
1.4.4 Okrajové podmínky	18
1.5 Slabé řešení	18
2 Metoda konečných objemů	22
2.1 Síť konečných objemů	22
2.2 Odvození základního schématu metody konečných objemů	23
2.3 Vlastnosti numerického toku	25
2.4 Konstrukce některých numerických toků	26
2.4.1 Skalární lineární rovnice	26
2.4.2 Kvazilineární skalární rovnice	27
2.4.3 Eulerovy rovnice:	27
2.5 Godunova metoda	28
2.5.1 Integrovaný tvar Riemannova řešiče	30
2.5.2 Přibližný Riemannův řešič založený na numerické kvadratuře	33
2.5.3 Přibližný Riemannův řešič založený na vhodné integrační cestě	33
Bibliografie	40

ÚVOD

Reálné situace, modely, diskretizace, počítačová realizace

Literatura k přednášce: (Feistauer, 1993)(odvození základních rovnic mechaniky tekutin), (Feistauer *et al.*, 2003)(metoda konečných objemů, adaptivní metody)

MATEMATICKÁ TEORIE STLAČITELNÉHO PROUDĚNÍ

2. přednáška

1.1 Rovnice popisující proudění

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ $N \in \{1, 2, 3\}$ - oblast vyplněná tekutinou
 $\partial\Omega$ - po částech hladká

Příklad 1.1 Křivý kanál

1.1.1 Zákon zachování

V následujícím uvedeme **matematickou formulaci** základních **fyzikálních zákonů** a jejich vyjádření ve tvaru **diferenciálních rovnic** dynamiky tekutin:

Zákon zachování			
hmotnosti	ZZH	rovnice kontinuity	RK
hybnosti	ZZHy	pohybové (Navierovy–Stokesovy) rovnice	NS
momentu hybnosti	ZZMH	symetrie tenzoru napětí	×
energie	ZZE	rovnice pro energii	RE
(= zákony zachování)			

$$\text{RK} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

$$\text{NS} \quad \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = \rho f_i + \operatorname{div}(-p\mathbb{I} + \mathcal{T}')_i, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$\text{RE} \quad \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E\mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \operatorname{div}((-p\mathbb{I} + \mathcal{T}')\mathbf{v}) + \rho q - \operatorname{div} \mathbf{q}$$

kde

$x = (x_1, x_2, x_3)$ - prostorové souřadnice,

t - čas,

ρ - hustota,

$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ - rychlost,

$\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ - hustota vnějších objemových sil,

E - celková energie,

q - hustota tepelných zdrojů (vztažená na jednotku hmotnosti),

\mathbf{q} - tepelný tok: $\mathbf{q} = -k \nabla \theta$ - Fourierův zákon,

θ - teplota,

p - tlak,

\mathcal{T} - tenzor napětí: $\mathcal{T} = (-p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}$,

\mathcal{T}' - vazká část tenzoru napětí: $\mathcal{T}' = (\lambda \operatorname{div} \mathbf{v})\mathbb{I} + 2\mu \mathbb{D}$,

\mathbb{D} - tenzor rychlosti deformace,

$$\mathbb{D} = (d_{ij})_{i,j=1}^3, \quad d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right),$$

tedy

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, & \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), & \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right), & -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, & \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right), & \mu \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right), & -p + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v} + 2\mu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

kde λ , μ jsou koeficienty vazkosti.

Značíme

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{div} \mathcal{T} = (\operatorname{div} \mathcal{T}_1, \operatorname{div} \mathcal{T}_2, \operatorname{div} \mathcal{T}_3)^T,$$

kde \mathbf{v} je vektor a kde \mathcal{T} je tenzor a \mathcal{T}_i jeho i -tý sloupec.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3} \right)^T,$$

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \frac{\partial v_1}{\partial x_2}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_2}, \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_3}{\partial x_2}, \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix},$$

kde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 v_1, v_1 v_2, v_1 v_3 \\ v_2 v_1, v_2 v_2, v_2 v_3 \\ v_3 v_1, v_3 v_2, v_3 v_3 \end{pmatrix}.$$

¹Pozn.

Pohybové rovnice lze pak zapsat

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \rho \mathbf{f} + \operatorname{div} \mathcal{T}.$$

¹V textu uvažujeme $N = 3$, zjednodušení pro případ $N = 1, 2$ je zřejmé.

Systém rovnic vyjadřujících zákony zachování lze zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_3 v_1 \\ (E+p)v_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho v_3 v_2 \\ (E+p)v_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3^2 + p \\ (E+p)v_3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q \end{pmatrix} \\ + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau'_{11} \\ \tau'_{12} \\ \tau'_{13} \\ (T'\mathbf{v})_1 + k \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau'_{21} \\ \tau'_{22} \\ \tau'_{23} \\ (T'\mathbf{v})_2 + k \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau'_{31} \\ \tau'_{32} \\ \tau'_{33} \\ (T'\mathbf{v})_3 + k \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial f_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = \mathbf{F}(\mathbf{w}) + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w})}{\partial x_s},$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho f_1 \\ \rho f_2 \\ \rho f_3 \\ \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} + \rho q \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_s \\ \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p \\ \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p \\ \rho v_3 v_s + \delta_{3s} p \\ (E + p)v_s \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_s(\mathbf{w}, \nabla \mathbf{w}) = \begin{pmatrix} 0 \\ \tau'_{s1} \\ \tau'_{s2} \\ \tau'_{s3} \\ (T' \mathbf{v})_s + k \frac{\partial \theta}{\partial x_s} \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, 3. \quad (1.1.1)$$

Zde \mathbf{w} je stavový vektor a \mathbf{f}_s , $s = 1, 2, 3$ jsou nevazké (Eulerovy) toky \mathbf{R}_s , $s = 1, 2, 3$, jsou **vazké toky**.

Nyní máme 5 rovnic (RK, NS, RE) pro 7 neznámých (ρ , v_1 , v_2 , v_3 , p , E , θ), doplníme tedy 2 rovnice na základě termodynamických vztahů.

1.1.2 Termodynamické vztahy

Teplota θ , hustota ρ a tlak p se nazývají *stavové proměnné*. Všechny tyto veličiny jsou kladné funkce. Plyn je charakterizován stavovou rovnicí

$$p = p(\rho, \theta) \quad (6. \text{ rovnice})$$

a vztahem

$$e = e(\rho, \theta) \quad (7. \text{ rovnice}),$$

kde e je specifická vnitřní energie (t.j. vztažená na jednotku hmotnosti) a platí

$$E = \rho e + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2.$$

Často uvažujeme *dokonalý plyn*, jehož stavová rovnice je

$$p = R \theta \rho \quad (6'. \text{ rovnice}).$$

$R > 0$ je *plynová konstanta*, kterou lze vyjádřit ve tvaru

$$R = c_p - c_v,$$

kde c_p a c_v je *specifické teplo při konstantním tlaku* resp. *specifické teplo při konstantním objemu*. Z experimentů víme, že $c_p > c_v$, tedy $R > 0$. Můžeme uvažovat, že c_p a c_v jsou konstanty, což se předpokládá pro dokonalý plyn. Veličina

$$\gamma = \frac{c_p}{c_v} > 1$$

je *Poissonova adiabatická konstanta*. Např. pro vzduch $\gamma = 1.4$.

Vnitřní energie dokonalého plynu je dána

$$e = c_v \theta \quad (7'. \text{ rovnice}).$$

Poznámka 1.2

$$p = R \rho \theta = (c_p - c_v) \rho \theta = c_p \rho \theta \frac{c_v}{c_v} - c_v \theta \rho = \gamma \rho c_v \theta - \rho e = \gamma \rho e - \rho e = (\gamma - 1) \rho e,$$

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) \quad (6''. \text{ rovnice}),$$

$$e = c_v \theta, \quad \theta = \left(\frac{E}{\rho} - \frac{1}{2} |\mathbf{v}|^2 \right) / c_v \quad (7''. \text{ rovnice}).$$

1.2 Eulerovy rovnice**1.2.1 Zjednodušení systému rovnic**

Uvažujme nevazké adiabatické proudění dokonalého plynu při zanedbání vnější objemové síly. To představuje následující zjednodušení rovnic popisujících proudění:

1. nevazké proudění ($\lambda = \mu = 0$)

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} -p, & 0, & 0 \\ 0, & -p, & 0 \\ 0, & 0, & -p \end{pmatrix},$$

2. adiabatické proudění (zanedbán přenos tepla)

$$q \equiv 0, \quad \mathbf{q} \equiv 0,$$

3. nulová hustota vnější objemové síly

$$\mathbf{f} \equiv 0,$$

4. dokonalý plyn ($p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right)$).

Nakonec dostáváme tento systém rovnic

$$\begin{aligned} \text{RK} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \text{E} \quad & \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v_i \mathbf{v}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} = \operatorname{div}(-p \mathbb{I}), \quad i = 1, 2, 3, \\ \text{RE} \quad & \frac{\partial E}{\partial t} + \operatorname{div}(E \mathbf{v}) = -\operatorname{div}(p \mathbf{v}) = \operatorname{div}((-p \mathbb{I}) \mathbf{v}), \end{aligned}$$

$$p = (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right)$$

Tyto rovnice lze zapsat ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1} \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_3 v_1 \\ (E+p)v_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_2} \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho v_3 v_2 \\ (E+p)v_2 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_3} \begin{pmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3^2 + p \\ (E+p)v_3 \end{pmatrix} = 0$$

nebo ve vektorovém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial f_1(\mathbf{w})}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2(\mathbf{w})}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3(\mathbf{w})}{\partial x_3} = 0,$$

kde

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_s \\ \rho v_1 v_s + \delta_{1s} p \\ \rho v_2 v_s + \delta_{2s} p \\ \rho v_3 v_s + \delta_{3s} p \\ (E+p)v_s \end{pmatrix}, \quad s = 1, 2, 3. \quad (1.2.1)$$

Zde \mathbf{w} je stavový vektor a \mathbf{f}_s , $s = 1, 2, 3$ jsou nevazké (Eulerovy) toky a pro fyzikální veličiny máme vztahy

$$\begin{aligned} \rho &= w_1, \\ v_1 &= \frac{w_2}{w_1}, \\ v_2 &= \frac{w_3}{w_1}, \\ v_3 &= \frac{w_4}{w_1}, \\ E &= w_5, \\ p &= (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho |v|^2 \right) = (\gamma - 1) \left(w_5 - \frac{1}{2} \frac{w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{w_1} \right). \end{aligned}$$

Zkušební otázka 1.1! Formulujte zákony zachování ve tvaru diferenciálních rovnic pro konzervativní veličiny $(w_1, \dots, w_5)^T$ pomocí nevazkých toků \mathbf{f}_s a vazkých toků \mathbf{R}_s .

1.2.2 Formulace problému

Máme nelineární systém rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0 \quad \text{v } Q_T \quad (1.2.2)$$

s počáteční podmínkou

$$\mathbf{w}(x, 0) = \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \Omega$$

a okrajovou podmínkou

$$B(\mathbf{w}) = 0 \quad \text{in } \partial\Omega \times (0, T),$$

kde $Q_T = \Omega \times (0, T)$ -časoprostorový válec, \mathbf{w}^0 je daná vektorová funkce a B je jistý operátor. Nevazké toky \mathbf{f}_s jsou definovány v $D = \left\{ \mathbf{w} \in \mathbb{R}^5; w_1 > 0, w_5 - \frac{1}{2} \frac{w_2^2 + w_3^2 + w_4^2}{w_1} > 0 \right\}$.

Poznámka 1.3 Systém (1.2.2) se nazývá systém Eulerových rovnic.

Derivování v (1.2.2) a užití věty o derivaci složené funkce vede ke *kvazilineárnímu systému* parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_s} = 0,$$

kde $\mathbb{A}_s(\mathbf{w})$ jsou matice 5×5 definované pro $\mathbf{w} \in D$

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) &= \frac{D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{D\mathbf{w}} = \left(\frac{\partial f_{si}(\mathbf{w})}{\partial w_j} \right)_{i,j=1}^5 \\ &= \text{Jacobiho matice zobrazení } \mathbf{f}_s. \end{aligned}$$

Pro $\mathbf{w} \in D$ a $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_3)^T \in \mathbb{R}^3$ označíme

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^3 \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s,$$

což je tok veličiny \mathbf{w} ve směru \mathbf{n} . Jacobiho matici $\frac{D\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{D\mathbf{w}}$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\frac{D\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n})}{D\mathbf{w}} = \mathbb{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^3 \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) n_s.$$

1.3 Vlastnosti Eulerových rovnic

1.3.1 Homogenita

Lemma 1.4 Vektorové funkce \mathbf{f}_s definované vztahem (1.2.1) jsou homogení zobrazení 1.řádu

$$\mathbf{f}_s(\alpha \mathbf{w}) = \alpha \mathbf{f}_s(\mathbf{w}), \quad \alpha > 0.$$

Navíc

$$\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w}.$$

Důkaz První vztah je zřejmý a plyne přímo z definice \mathbf{f}_s . Protože $\mathbf{f}_s \in C^1(D)^5$, je výraz $(D\mathbf{f}_s(\mathbf{w})/D\mathbf{w})\mathbf{w} = \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w}$ derivací \mathbf{f}_s ve směru \mathbf{w} v bodě \mathbf{w} . Podle definice derivace

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\mathbf{w} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}_s(\mathbf{w} + \alpha \mathbf{w}) - \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\alpha} \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(1 + \alpha)\mathbf{f}_s(\mathbf{w}) - \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\alpha} = \mathbf{f}_s(\mathbf{w}). \end{aligned}$$

□

1.3.2 Hyperbolicita

Předpokládáme-li že $\mathbf{w} \in C^1(Q_T)$ $Q_T = \Omega \times (0, T)$, pak jsou Eulerovy rovnice speciálním případem kvazilineárního systému typu

$$\mathbb{A}_0(\mathbf{w})\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \mathbb{A}_s(\mathbf{w})\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_s}. \quad (1.3.1)$$

Definice 1.5 Systém (1.3.1) se nazývá hyperbolický v oblasti $D \subset \mathbb{R}^5$, pokud všechna řešení $\lambda_j = \lambda_j(\mathbf{w}, \mathbf{n})$, $j = 1 \dots 5$, algebraické rovnice pátého stupně

$$\det \left(\lambda \mathbb{A}_0(\mathbf{w}) - \sum_{s=1}^3 n_s \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) \right) = 0$$

jsou reálná pro každé $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T \in \mathbb{R}^3$ a $\mathbf{w} \in D$. λ_j nazýváme zobecněnými vlastními čísly systému (1.3.1). Pokud jsou navíc zobecněná vlastní čísla λ_j jednoduchá, pak je systém nazýván ostře hyperbolický. Řekneme, že systém (1.3.1) je (ostře) diagonálně hyperbolický, pokud je navíc matice $\mathbb{P} = \sum_{s=1}^3 n_s \mathbb{A}(\mathbf{w})$ diagonalizovatelná. To znamená, že existuje regulární matice $\mathbb{T} = \mathbb{T}(\mathbf{w}, \mathbf{n})$:

$$\mathbb{T}^{-1} \mathbb{P} \mathbb{T} = \mathbb{\Lambda} = \mathbb{\Lambda}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \text{diag}(\lambda_1 \dots \lambda_5) = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & \lambda_4, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \lambda_5 \end{pmatrix}.$$

Věta 1.6 Eulerovy rovnice tvoří diagonálně hyperbolický systém.

Důkaz Viz (Feistauer *et al.*, 2003), str. 108, Věta 3.6. □

Poznámka 1.7

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} - a |\mathbf{n}| \\ \lambda_2 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ \lambda_3 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ \lambda_4 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \\ \lambda_5 &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} + a |\mathbf{n}|\end{aligned}$$

kde $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ - rychlost zvuku.

Poznámka 1.8 Pokud $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$. Pak vlastní čísla matice $\mathbb{A}_1(\mathbf{w})$ jsou

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= v_1 - a \\ \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = v_1 \\ \lambda_5 &= v_1 + a\end{aligned}$$

Poznámka 1.9 Jednorozměrné Eulerovy rovnice dostaneme z (1.2.2), položíme-li

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ E \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = 0 = \frac{\partial}{\partial x_3}, \quad v_2 = 0 = v_3, \quad \mathbf{w} = \mathbf{w}(x_1, t).$$

Jednorozměrné Eulerovy rovnice tvoří ostře diagonálně hyperbolický systém.

1.3.3 Rotační invariantnost

Libovolný vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^T \in \mathbb{R}^3$ lze vyjádřit ve sférických souřadnicích

$$\mathbf{n} = r(\cos \alpha \cos \beta, \sin \alpha \cos \beta, \sin \beta)^T,$$

kde

$$r = |\mathbf{n}|, \quad \alpha \in [0, 2\pi), \quad \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Nechť $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ a $\tilde{\sigma} \in \mathbb{R}^3$ je dán. Posuňme systém souřadnic x_1, x_2, x_3 do bodu $\tilde{\sigma}$ a otočme ho tak, že se osa x_1 shoduje s vektorem \mathbf{n} . To znamená, že definujeme nový kartézský systém souřadnic $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3$

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix} = \mathbb{Q}_0(\mathbf{n}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \tilde{\sigma},$$

where

$$\mathbb{Q}_0(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \beta, & \sin \alpha \cos \beta, & \sin \beta \\ -\sin \alpha, & \cos \alpha, & 0 \\ -\cos \alpha \sin \beta, & -\sin \alpha \sin \beta, & \cos \beta \end{pmatrix}$$

je ortonormální matice.

Transformace stavového vektoru \mathbf{w} dává nový stavový vektor

$$\mathbf{q} = \mathbb{Q}(\mathbf{n}) \mathbf{w}, \quad (1.3.2)$$

kde

$$\mathbb{Q}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mathbb{Q}_0(\mathbf{n}) & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Transformovaný stavový vektor \mathbf{q} pokládáme za funkci proměnných $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ and t

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{x}, t) = \mathbb{Q}(\mathbf{n}) \mathbf{w} \left(\mathbb{Q}_0^{-1}(\mathbf{n})(\tilde{x} - \tilde{\sigma}), t \right).$$

Věta 1.10 Necht' $\mathbf{w} \in D$ a $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{n}| = 1$. Pak

$$\mathcal{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^3 n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{Q}^{-1} \mathbf{f}_1(\mathbb{Q}(\mathbf{n}) \mathbf{w})$$

a

$$\mathbb{P}(\mathbf{w}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^3 n_s \mathbb{A}_s(\mathbf{w}) = \mathbb{Q}^{-1}(\mathbf{n}) \mathbb{A}_1(\mathbb{Q}(\mathbf{n}) \mathbf{w}) \mathbb{Q}(\mathbf{n})$$

Důkaz viz (Feistauer *et al.*, 2003, page 108). \square

Věta 1.11 Vektorová funkce $\mathbf{w} \in C^1(Q_T)^5$ ($Q_T = \Omega \times (0, T)$) je řešením Eulerových rovnic (1.2.2)

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0$$

právě tehdy když funkce $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{x}, t)$ daná vztahem (1.3.2) $\mathbf{q} = \mathbb{Q}(\mathbf{n}) \mathbf{w}$ řeší transformovaný systém Eulerových rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_s} = 0,$$

t.j. transformací kartézských souřadnic se Eulerovy rovnice formálně nezmění.

Důkaz je komplikovaný, pro $N=2$ viz (Feistauer *et al.*, 2003), str. 110, cvičení 3.9. \square

Tato vlastnost se nazývá rotační invariance Eulerových rovnic.

Zkušební otázka 1.2! Formulujte základní vlastnosti Eulerových rovnic: homogenitu, hyperbolicitu a rotační invarianci.

1.4 Cauchyho úloha

Protože volba vhodné okrajové podmínky pro systém rovnic popisujících zákony zachování je delikátní, dosud ne zcela uspokojivě vyřešený problém, budeme se zabývat *Cauchyho úlohou* pro Eulerovy rovnice v množině $Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ (t.j. $\Omega = \mathbb{R}^3$), doplněné pouze počáteční podmínkou. To znamená, že hledáme řešení úlohy

Cauchy

$$\begin{aligned} a) \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^3 \frac{\partial \mathbf{f}_s}{\partial x_s} &= 0 \quad \text{v } Q_T = \mathbb{R}^3 \times (0, T), \\ b) \quad \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

kde $\mathbf{f}_s \in C^1(D)^5$.

Zabývejme se nyní řešením **Cauchyho** úlohy a jeho vlastnostmi.

Definice 1.12 Řekneme, že vektorová funkce \mathbf{w} je klasickým řešením *Cauchyho úlohy* (1.4.1), jestliže

$$\begin{aligned} a) \quad \mathbf{w} &\in C^1(\mathbb{R}^3 \times (0, T))^5 \cap C(\mathbb{R}^3 \times [0, T])^5, \\ b) \quad \mathbf{w} &\in D \quad \forall (x, t) \in Q_T (= \mathbb{R}^3 \times (0, T)), \\ c) \quad \mathbf{w} &\text{ splňuje (1.4.1), a)–b) } \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, T). \end{aligned}$$

Pojem klasické řešení je poněkud omezující:

1. Z experimentů vyplývá, že se mohou vyskytovat nespojitosti v hustotě, tlaku, rychlosti a v ostatních veličinách.
2. Klasické řešení může existovat pouze na intervalu $[0, T^*]$, $T^* \ll T$ (malá data).

Uvedeme několik příkladů zdůrazňujících tyto vlastnosti hyperbolického systému a budeme ilustrovat možnosti tzv. *metody charakteristik*.

4. přednáška

1.4.1 Kvazilineární skalární rovnice

Nechť $f \in C^2(\mathbb{R})$, $\lambda = f'$, $w^0 \in C^1(\mathbb{R})$. Budeme uvažovat rovnici

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T),$$

kterou lze pro klasické řešení přepsat ve tvaru

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T) \quad (1.4.2)$$

a doplníme tuto rovnici počáteční podmínkou

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.4.3)$$

Vyšetřujeme existenci řešení a možnosti jeho analytického vyjádření.

Předpokládejme, že existuje řešení problému (1.4.2)–(1.4.3) a vyšetřujeme jeho vlastnosti podél křivek parametrizovaných v rovině (x, t)

$$\begin{aligned} x &= \xi(s), \\ t &= t(s) = s \quad s \in J \text{ (= otevřený interval)}. \end{aligned}$$

Přesněji, vyšetřujeme vlastnosti derivace

$$\frac{dw(\xi(s), s)}{ds}.$$

Platí

$$\frac{dw}{ds} = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \underbrace{\frac{d\xi}{ds}}_{\downarrow}.$$

Porovnáním s (1.4.2)

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} \overbrace{\lambda(w)}^{\uparrow} = 0,$$

vidíme, že jestliže $x = \xi(s)$ takové, že

$$\frac{d\xi}{ds} = \lambda(w),$$

pak

$$\frac{dw(\xi(s), s)}{ds} = 0$$

a tedy

$$w(\xi(s), s) = \text{konst.}, \quad s \in J.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{d\xi}{ds} = \underbrace{\lambda(\underbrace{w(\xi(s), s)}_{\text{konst.}})}_{\text{konst.}} \quad (1.4.4)$$

a proto řešením problému (1.4.4) je přímka

$$\xi = \lambda(w(\xi(s), s)) s + x_0.$$

Protože $x = \xi(s)$, $t = s$, $s \in J$, jsou řešením problému (1.4.4) přímky v horní polorovině $t \geq 0$, začínající na ose x a určené podmínkami

$$x = \lambda(w(x, t)) t + x_0, \quad (1.4.5)$$

$$w(x, t) = w(x_0, 0) = w^0(x_0).$$

To dává implicitní vyjádření řešení w kvazilineární skalární rovnice

$$w(x, t) = w^0(x - \lambda(w(x, t))t), \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, T). \quad (1.4.6)$$

Poznámka 1.13 Necht $f = f(w) = \lambda w$ je lineární, tj. $\lambda \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom $f' = \lambda$ je konstanta nezávislá na w a problém

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\ w(x, 0) &= w^0(x) \end{aligned}$$

má řešení

$$w(x, t) = w^0(x - \lambda t),$$

za předpokladu $w^0 \in C^1(\mathbb{R})$.

Definice 1.14 Pro danou hladkou funkci w splňující

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T)$$

křivky v rovině (x, t) parametizované následujícím způsobem

$$\begin{aligned} x &= \xi(s), \\ t &= t(s) = s, \quad s \in J \end{aligned}$$

kde J je otevřený interval, a splňující

$$\frac{d\xi(s)}{ds} = \lambda(w(\xi(s), s)), \quad s \in J,$$

se nazývají charakteristiky.

Věta 1.15 Necht je funkce $w \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ klasické řešení kvazilineární skalární rovnice (1.4.2). Pak w je konstantní podél libovolné charakteristiky. Charakteristiky jsou přímky v horní polorovině $t \geq 0$, které začínají na ose x a jsou určeny podmínkou

$$x = \lambda(w^0(x_0))t + x_0. \quad (1.4.7)$$

Odtud dostáváme implicitní vyjádření řešení

$$w(x, t) = w^0(x - \lambda(w(x, t))t), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0. \quad (1.4.8)$$

Důkaz Viz výše. □

1.4.2 Lineární skalární rovnice

Věta 1.16 Funkce $w \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ je klasické řešení lineární skalární rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, \infty), \lambda = \text{konst.} \quad (1.4.9)$$

právě tehdy když w je konstantní podél libovolné charakteristiky.

Důkaz \implies Uvažujme libovolnou charakteristiku $x = \xi(s), t = s$, splňující $\frac{d\xi(s)}{ds} = \lambda(w(\xi(s), s))$, $s \in (b, d)$. Je-li w klasické řešení pak

$$\begin{aligned} \frac{dw(\xi(s), s)}{ds} &= \frac{\partial w(\xi(s), s)}{\partial t} + \frac{\partial w(\xi(s), s)}{\partial x} \frac{d\xi(s)}{ds} \\ &= \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \right) (\xi(s), s) = 0 \quad \forall s \in (b, d). \end{aligned}$$

Tedy $w(\xi(s), s) = \text{konst.}$ pro každé $s \in (b, d)$. To znamená, že w je konstantní podél každé charakteristiky.

\Leftarrow Necht' $w \in C^1(\mathbb{R} \times (0, \infty))$ je konstantní podél libovolné charakteristiky a necht' $(x_*, t_*) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Pak existuje charakteristika (definovaná v nějakém intervalu $(b, d) \ni t_*$) taková, že $x(t_*) = x_*$. Pak pro každé $s \in (b, d)$

$$0 = \frac{dw(\xi(s), s)}{ds} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \right) (\xi(s), s).$$

Pro $s := t_*$ máme $\left(\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} \right) (x_*, t_*) = 0$. □

Důsledek 1.17 Pro $w^0 \in C^1(\mathbb{R})$ existuje právě jedno klasické řešení lineární skalární rovnice (1.4.9) splňující počáteční podmínku $w(x, 0) = w^0(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Lze ho vyjádřit ve tvaru

$$w(x, t) = w^0(x - \lambda t) \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty).$$

Důkaz Domácí úkol. □

Zkušební otázka 1.3! Definujte charakteristiky rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda(w) \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T)$$

(kvazilineární skalární rovnice v 1D).

Poznámka 1.18 Jednorozměrné Eulerovy rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x_1} \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T),$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ (E + p) v_1 \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1.19 Eulerovy rovnice s jednou prostorovou proměnnou

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{w})}{\partial x_1} \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T),$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ E \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}_1(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_1 v_2 + p \\ \rho v_1 v_3 + p \\ (E + p) v_1 \end{pmatrix}.$$

Definice 1.20 Necht systém rovnic

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \mathbb{A}_1(\mathbf{w}) \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x_1} = 0 \quad (1.4.10)$$

je hyperbolický. To znamená, že kořeny λ_j , $j = 1 \dots, 5$, rovnice

$$\det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}_1(\mathbf{w})) = 0$$

jsou reálné. Pro danou hladkou funkci splňující (1.4.10), křivky v rovině (x, t) parametrizované

$$x = \xi_j(s), \quad t = t(s) = s, \quad s \in J,$$

kde J je otevřený interval a

$$\frac{d\xi_j(s)}{ds} = \lambda_j(\mathbf{w}(\xi_j(s), s))$$

se nazývají charakteristiky.

Uvažujme jednoduchý příklad kvazilineární skalární rovnice.

1.4.3 Cauchyho úloha pro nevazkou Burgersovu rovnici

Uvažujme úlohu

(Burgers)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T), \\ w(x, 0) &= w^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Jedná se o rovnici typu $\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0$ kde $f(w) = \frac{1}{2}w^2$, $f'(w) = \lambda(w) = w$.

Uvažujme následující počáteční podmínku

$$w^0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(\cos x + 1), & x \in (0, \pi), \\ 0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Předpokládejme, že řešení existuje a nakresleme charakteristiky. Charakteristiky jsou vyjádřeny podmínkou (1.4.5)

$$\begin{aligned} x &= \lambda(w(x, t))t + x_0, \\ w(x, t) &= w(x_0, 0) = w^0(x_0). \end{aligned}$$

Charakteristiky jsou tedy přímky

$$x = \lambda(w^0(x_0))t + x_0,$$

t.j. pro danou počáteční podmínku

$$x = w^0(x_0)t + x_0 = \begin{cases} t + x_0, & x \leq 0, \\ \frac{1}{2}(\cos x_0 + 1)t + x_0, & x \in (0, \pi), \\ x_0, & x \geq \pi. \end{cases}$$

Závěr: Klasické řešení pro $t \geq \pi$ neexistuje.

Cvičení 1.21 Najděte největší T^* tak, že pro $t \in [0, T^*)$ se charakteristiky neprotínají.

Řešení: $T^* = 2$.

Návod: Uvažujme dvě charakteristiky, které se protínají

$$\begin{aligned} L_1 \quad x &= w^0(x_1)t + x_1, \\ L_2 \quad x &= w^0(x_2)t + x_2, \quad x_1, x_2 \in (0, \pi), x_1 \neq x_2. \end{aligned}$$

Tyto charakteristiky se protínají v čase t , kde t je řešením rovnice

$$w^0(x_1)t + x_1 = w^0(x_2)t + x_2,$$

$$t = \frac{x_2 - x_1}{w^0(x_1) - w^0(x_2)} \stackrel{\text{věta o střední hodnotě}}{=} -\frac{1}{(w^0)'(\xi)}, \quad \xi \in [0, \pi].$$

Nejmenší t , kde se charakteristiky mohou protnout ($(w^0)' \leq 0$)

$$T^* = -\frac{1}{\min_{[0, \pi]}(w^0)'} = -\frac{1}{-\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = 2.$$

Zkušební otázka 1.4 Nakreslete charakteristiky Burgersovy rovnice s počáteční podmínkou

$$w(x, 0) = w^0(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

pro $w^0 \in C^1(\mathbb{R})$ vámi definovanou.

Zkušební otázka 1.5! Nalezněte řešení problému

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \mathbb{R} \times (0, T),$$

$$w(x, 0) = \sin(3x) \cos(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Zkušební otázka 1.6! Je následující úloha

$$\frac{\partial w}{\partial t} + 2 \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{v } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right) \times (0, T),$$

$$\text{IC } w(x, 0) = \sin(x), \quad x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right],$$

BC $w\left(\frac{\pi}{2}, t\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right)$, $w\left(\frac{3}{2}\pi, t\right) = \sin\left(\frac{3}{2}\pi - 2t\right)$, $t \in [0, T)$,
dobře definovaný problém (well-posed problem) pro $w \in C^1\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right] \times [0, T)\right)$?

1.4.4 Okrajové podmínky

Volba vhodné okrajové podmínky je velice důležitý a delikátní problém v numerické simulaci proudění tekutin. Volba okrajové podmínky je obecně fyzikální problém, ale musí odpovídat matematickému charakteru řešených rovnic. Tento problém lze ilustrovat na případu lineární skalární rovnice.

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad \lambda = \text{konst.}$$

5. přednáška

1.5 Slabé řešení

Uvažujme N -rozměrné Eulerovy rovnice, $N = 1, 2, 3$, tj. soustavu $m = N + 2$ rovnic pro vektorovou funkci $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_m)^T$. Systém tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0 \quad (1.5.1)$$

nemusí mít globální hladké řešení i když data jsou dostatečně hladká. Taková situace je typická dokonce pro velmi jednoduchou kvazilineární hyperbolickou rovnici jako je např. tzv. Burgersova rovnice.

Experimenty ukazují, že mohou vznikat nespojitosti fyzikálních veličin v konečném čase i když počáteční data jsou hladká.

Tyto skutečnosti nás vedou k slabší formulaci řešení systému (1.5.1) než je formulace klasická. Budeme se tedy snažit zobecnit klasické řešení a rozšířit ho v čase v nějakém rozumném smyslu. Symbolem $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))$ značíme prostor všech

nekonečně diferencovatelných funkcí, jejichž nosič je kompaktní v $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$. Předpokládejme, že \mathbf{w} je klasické řešení problému

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} & \quad \text{v } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

a $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))^m$. Pak užitím Greenovy věty dostáváme rovnost

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_j(\mathbf{w})}{\partial x_j} \right) \cdot \varphi \, dx dt = - \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{w}(x, 0) \cdot \varphi(x, 0) \, dx \\ &\quad - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx dt. \end{aligned}$$

Klasické řešení problému (1.5.2) tedy splňuje integrální identitu

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{w}^0(x) \cdot \varphi(x, 0) \, dx = 0 \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))^m. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Zřejmě (1.5.3) má smysl také pro $\mathbf{w} \in [L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))]^m$. Píšeme $\mathbf{f} \in L_{\text{loc}}^\infty(M)^m$, jestliže $\mathbf{f}|_{M \cap K} \in L^\infty(M \cap K)^m$ pro každou kompaktní množinu $K \subset \mathbb{R}^N$.

$$L^\infty(M) = \{u; u \text{ je měřitelná funkce v } M \text{ a } \|u\|_{L^\infty(M)} < \infty\},$$

kde

$$\|u\|_{L^\infty(M)} = \text{ess sup}_M |u| := \inf \left\{ \sup_{x \in M \setminus Z} |u(x)|; Z \subset M, \text{meas}(Z) = 0 \right\}.$$

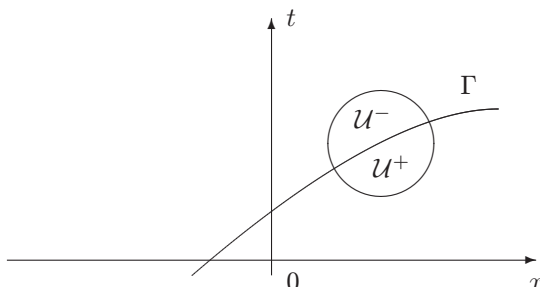
6. přednáška

Definice 1.22 *Nechť $\mathbf{w}^0 \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^N)^m$. Vektorová funkce \mathbf{w} se nazývá slabým řešením systému (1.5.2) t.j.*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} & \quad \text{v } \mathbb{R}^N \times (0, \infty), \\ \mathbf{w}(x, 0) &= \mathbf{w}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned}$$

jestliže $\mathbf{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^N \times (0, \infty))^m$, $\mathbf{w}(x, t) \in D$ pro skoro všechna $(x, t) \in \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ a platí rovnost (1.5.3) t.j.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^N} \left(\mathbf{w} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^N \mathbf{f}_j(\mathbf{w}) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx dt + \int_{\mathbb{R}^N} \mathbf{w}^0(x) \cdot \varphi(x, 0) \, dx = 0 \\ \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \times [0, \infty))^m. \end{aligned}$$



OBR. 1.5.1. Nespojitost řešení

Cvičení 1.23 Dokažte, že libovolné slabé řešení třídy C^1 je klasickým řešením.

Často se setkáváme s tzv. *počástech hladkým slabým řešením*, které připouští nespojitosti.

Definice 1.24 Řekneme, že funkce w je počástech hladká, pokud existuje konečný počet nadrovin Γ v $\mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, vně kterých je funkce w třídy C^1 , a na kterých má jednostranné limity, označme je w^\pm ($(x, t) \in \Gamma$). Nechť $(x, t) \in \Gamma$ a nechť $\mathcal{U} = \mathcal{B}_\epsilon(x, t)$ je koule s středem v bodě (x, t) a malým poloměrem $\epsilon > 0$ tak, že $\mathcal{U} \setminus \Gamma$ má právě dvě komponenty \mathcal{U}^\pm (viz Obr. 1.5.1). Pak píšeme

$$w^\pm(x, t) = \lim_{\substack{(y, \vartheta) \rightarrow (x, t) \\ (y, \vartheta) \in \mathcal{U}^\pm}} w(y, \vartheta),$$

za předpokladu, že ty limity existují. Podobně definujeme jednostranné limity derivace w . (Je-li $N = 1$, pak Γ je křivka v $\mathbb{R} \times [0, \infty)$.)

Ukažme, že nespojitosti na Γ počástech hladkého slabého řešení w nemohou být libovolné:

Věta 1.25 Nechť $w : \mathbb{R}^N \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ je počástech hladká funkce. Pak w je řešením systému (1.5.2) ve smyslu distribucí právě když jsou splněny následující podmínky:

- w je klasické řešení v každé oblasti, kde w je třídy C^1 ,
- w splňuje podmínku

$$(w^+ - w^-)n_t + \sum_{j=1}^N (f_j(w^+) - f_j(w^-))n_j = 0 \quad (1.5.4)$$

na hladkých nadrovinách Γ . Zde $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N, n_t)$ je normála k Γ .

Důkaz Viz (Feistauer *et al.*, 2003, strana 71). □

Definice 1.26 Vztah (1.5.4) se nazývá Rankineova–Hugoniotova podmínka.

V případě $(n_1, \dots, n_N) \neq 0$, můžeme zvolit normálu $\mathbf{n} = (\boldsymbol{\nu}, -s)$ k Γ kde $s \in \mathbb{R}$ a $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^N$ je jednotkový vektor. Pak (1.5.4) může být zapsána v tvaru

$$s[\mathbf{w}] = \sum_{j=1}^N \nu_j [\mathbf{f}_j(\mathbf{w})],$$

kde

$$[\mathbf{w}] = \mathbf{w}^+ - \mathbf{w}^-, \quad [\mathbf{f}_j(\mathbf{w})] = \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^+) - \mathbf{f}_j(\mathbf{w}^-).$$

Vektor $\boldsymbol{\nu}$ a číslo s mohou být chápány jako směr a rychlost šíření nespojitosti Γ

To je zřejmé v případě $N = 1$. Pokud vyjádříme nespojitost Γ jako křivku $x = \xi(t)$, máme $s = d\xi/dt$ a $\mathbf{n} = (1, -s)$. Zřejmě s reprezentuje rychlost šíření nespojitosti v závislosti na čase. Pak (při značení $\mathbf{f} = \mathbf{f}_1$), Rankine–Hugoniotova podmínka je ve tvaru

$$s[\mathbf{w}] = [\mathbf{f}(\mathbf{w})].$$

Lze najít příklady, kdy slabé řešení není jednoznačné. V případě nejednoznačnosti slabého řešení musíme použít princip selekce (musíme vybrat fyzikálně přípustné řešení). Proto se zavádí tzv. entropická podmínka. Tato podmínka je zobecněním fyzikální entropické podmínky v mechanice tekutin, která vyjadřuje druhý termodynamický zákon. Detaily lze najít v (Feistauer *et al.*, 2003, strana 76).

METODA KONEČNÝCH OBJEMŮ

V této části se budeme zabývat numerickým řešením Eulerových rovnic. Hlavní pozornost bude věnována *metodě konečných objemů* (MKO) na nestrukturovaných sítích. Metoda konečných objemů je jednou z nejpoužívanějších metod, díky své flexibilitě, adaptabilitě a aplikovatelnosti na řešení problémů tekutin v oblastech s komplikovanou geometrií.

2.1 Síť konečných objemů

7. přednáška

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je oblast vyplněná tekutinou. Je-li $N = 2$, pak Ω_h značí polygonální aproximaci oblasti Ω . Tzn. že hranice $\partial\Omega_h$ oblasti Ω_h se skládá z konečného počtu uzavřených počástech lineárních křivek. Pro $N = 3$, Ω_h značí polyhedrální aproximaci oblasti Ω . Systém $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in J}$, kde $J \subset \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, \dots\}$ je indexová množina a $h > 0$, se nazývá *síť konečných objemů* v Ω_h , jestliže D_i , $i \in J$ jsou uzavřené mnohoúhelníky nebo mnohostěny, jestliže $N = 2$ nebo $N = 3$ s vzájemně disjunktními vnitřky tak, že

$$\bar{\Omega}_h = \bigcup_{i \in J} D_i.$$

Prvky $D_i \in \mathcal{D}_h$ se nazývají *konečné objemy*. Dva konečné objemy $D_i, D_j \subset \mathcal{D}_h$ jsou vzájemně disjunktní nebo jejich průnik je tvořen společnou částí jejich hranic ∂D_i a ∂D_j . Jestliže $\partial D_i \cap \partial D_j$ obsahuje úsečku nebo část roviny, je-li $N = 2$ nebo $N = 3$, pak nazýváme D_i a D_j *sousedícími konečnými objemy* (nebo jednoduše *sousedy*). Pro dva sousedy $D_i, D_j \in \mathcal{D}_h$ píšeme

$$\Gamma_{ij} = \partial D_i \cap \partial D_j = \Gamma_{ji}.$$

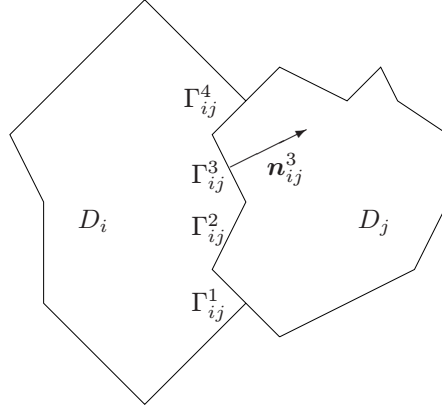
Obvykle Γ_{ij} je tvořena konečným počtem β_{ij} úseček ($N = 2$) nebo částí rovin ($N = 3$) $\Gamma_{ij}^\alpha = \Gamma_{ji}^\alpha$:

$$\Gamma_{ij} = \bigcup_{\alpha=1}^{\beta_{ij}} \Gamma_{ij}^\alpha.$$

Viz Obr. 2.1.1. Γ_{ij}^α nazýváme stěnami D_i .

Dále zavedeme následující značení:

$$\begin{aligned} |D_i| &= N\text{-rozměrná míra } D_i, \\ &= \text{obsah } D_i \text{ jestliže } N = 2, \text{ nebo objem } D_i \text{ pro } N = 3, \\ |\Gamma_{ij}^\alpha| &= (N-1)\text{-rozměrná míra } \Gamma_{ij}^\alpha, \end{aligned}$$


 OBR. 2.1.1. Sousední konečné objemy v 2D, $\Gamma_{ij} = \bigcup_{\alpha=1}^4 \Gamma_{ij}^\alpha$

= délka Γ_{ij}^α jestliže $N = 2$, nebo obsah Γ_{ij}^α pro $N = 3$,

$\mathbf{n}_{ij}^\alpha = ((n_{ij}^\alpha)_1, \dots, (n_{ij}^\alpha)_N)^T$ = jednotková vnější normála k ∂D_i na Γ_{ij}^α ,

$h_i = \text{diam}(D_i)$,

$h = \sup_{i \in J} h_i$,

$|\partial D_i| = (N - 1)$ – dimensionální míra ∂D_i ,

$s(i) = \{j \in J; j \neq i, D_j \text{ je souseď } D_i\}$.

Zřejmě $\mathbf{n}_{ij}^\alpha = -\mathbf{n}_{ji}^\alpha$. Dále $S(i) =$ indexová množina obsahující informace o

- i) sousedech,
- ii) stěnách ∂D_i , kde je předepsána vstupní (výstupní) okrajová podmínka,
- iii) stěny ∂D_i , kde je předepsána okrajová podmínka na pevné stěně.

Poznamenejme, že $s(i) \subset S(i)$. Detaily viz (Feistauer *et al.*, 2003, strana 186).

2.2 Odvození základního schématu metody konečných objemů

Uvažujme dělení $0 = t_0 < t_1 < \dots$ časového intervalu $[0, T]$ a označme $\tau_k = t_{k+1} - t_k$ časový krok mezi t_k a t_{k+1} .

Předpokládejme, že $\mathbf{w} : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ je klasické řešení problému

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0.$$

Integrací této rovnice přes množinu $D_i \times (t_k, t_{k+1})$ a užitím Greenovy věty na D_i dostaneme

$$\int_{D_i} (\mathbf{w}(x, t_{k+1}) - \mathbf{w}(x, t_k)) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\int_{\partial D_i} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) n_s dS \right) dt = 0.$$

Uvažujme trojúhelníkovou síť (resp. síť tvořenou čtyřstěny) \mathcal{D}_h . Pak $\beta_{ij} = 1$ a $\partial D_i \cap \partial D_j = \Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$ pro sousední konečné objemy.

Nyní aproximujeme hodnotu integrálu $\int_{D_i} \mathbf{w}(x, t_k) dx / |D_i|$ veličiny \mathbf{w} přes konečný objem D_i v čase t_k konstantní hodnotou \mathbf{w}_i^k :

$$\int_{D_i} \mathbf{w}(x, t_k) dx \approx |D_i| \mathbf{w}_i^k.$$

Veličinu \mathbf{w}_i^k nazýváme *přibližným řešením* na D_i v čase t_k . Můžeme tedy psát

$$\int_{D_i} (\mathbf{w}_i^{k+1} - \mathbf{w}_i^k) dx + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\sum_{j \in S(i)} \int_{\Gamma_{ij}} \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(x, t)) n_s dS \right) dt = 0.$$

Dále aproximujeme tok $\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s$ veličiny \mathbf{w} stěnou Γ_{ij} ve směru \mathbf{n}_{ij} *numerickým tokem* $\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij})$, závisícím na hodnotě přibližného řešení \mathbf{w}_i^k na konečném objemu D_i , hodnotě \mathbf{w}_j^k na D_j , a na normále \mathbf{n}_{ij} v časovém okamžiku t_k :

$$\sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{w})(n_{ij})_s \approx \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}).$$

Dostaneme následující *schéma metody konečných objemů*

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}|, \quad D_i \in \Omega_h, \quad t_k \in [0, T]. \quad (2.2.1)$$

Počáteční podmínky \mathbf{w}_i^0 , $i \in J$ jsou definovány vztahem

$$\mathbf{w}_i^0 = \frac{1}{|D_i|} \int_{D_i} \mathbf{w}^0(x) dx$$

(za předpokladu, že funkce $\mathbf{w}^0 \in L^1_{loc}(\Omega)$).

Definice 2.1 *Definujeme přibližné řešení metody konečných objemů problému*

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{w})}{\partial x_s} = 0$$

jako počástech konstantní vektorovou funkcí \mathbf{w}_h^k , $k = 0, 1, \dots$, definovanou s.v. v Ω_h tak, že $\mathbf{w}_h^k|_{D_i} = \mathbf{w}_i^k$ pro každé $i \in J$, kde $\overset{\circ}{D}_i$ je vnitřek D_i , t.j. $\overset{\circ}{D}_i = D_i \setminus \partial D_i$, a \mathbf{w}_i^k je dáno vztahem

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) |\Gamma_{ij}|, \quad D_i \in \Omega_h, \quad t_k \in [0, T].$$

Funkce \mathbf{w}_h^k je přibližné řešení v čase $t = t_k$. Vektor \mathbf{w}_i^k je hodnota přibližného řešení na konečném objemu D_i v čase t_k .

Zkušební otázka 2.1! Odvoďte explicitní schéma metody konečných objemů pro numerické řešení Eulerových rovnic.

2.3 Vlastnosti numerického toku

O numerickém toku \mathbf{H} předpokládáme, že má tyto vlastnosti.

1. $\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n})$ je definovaný a spojitý na $D \times D \times \mathcal{S}_1$, kde D je definiční obor toků \mathbf{f}_s a \mathcal{S}_1 je jednotková koule v \mathbb{R}^N : $\mathcal{S}_1 = \{\mathbf{n} \in \mathbb{R}^N; |\mathbf{n}| = 1\}$.
2. \mathbf{H} je *konzistentní*:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{n}) = \mathcal{P}(\mathbf{u}, \mathbf{n}) = \sum_{s=1}^N \mathbf{f}_s(\mathbf{u}) n_s, \quad \mathbf{u} \in D, \mathbf{n} \in \mathcal{S}_1.$$

3. \mathbf{H} je *konzervativní*:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{n}) = -\mathbf{H}(\mathbf{v}, \mathbf{u}, -\mathbf{n}), \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in D, \mathbf{n} \in \mathcal{S}_1.$$

Poznámka 2.2 Na hranici může být numerický tok definován např. s využitím okrajové podmínky:

$$\Gamma_{ij} - \text{pevná stěna, } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ (slip condition)}$$

$$\sum_{s=1}^3 n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(x, t_k)) |_{\Gamma_{ij}}$$

$$= n_1 \begin{pmatrix} \rho v_1 \\ \rho v_1^2 + p \\ \rho v_2 v_1 \\ \rho v_3 v_1 \\ (E + p) v_1 \end{pmatrix} + n_2 \begin{pmatrix} \rho v_2 \\ \rho v_1 v_2 \\ \rho v_2^2 + p \\ \rho v_3 v_2 \\ (E + p) v_2 \end{pmatrix} + n_3 \begin{pmatrix} \rho v_3 \\ \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3^2 + p \\ (E + p) v_3 \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 0 \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \downarrow, n_{ij}) := p_i^k \begin{pmatrix} 0 \\ (n_{ij})_1 \\ (n_{ij})_2 \\ (n_{ij})_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zkušební otázka 2.2! Vysvětlete klíčová slova ‘tok’, ‘numerický tok’ v termínech ‘konzervativní’ a ‘konzistentní’.

2.4 Konstrukce některých numerických toků

2.4.1 Skalární lineární rovnice

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial \lambda w}{\partial x} = 0, \quad f(w) = \lambda w, \quad \lambda = \text{konst.}$$

V tomto případě máme

$$w_i^{k+1} = w_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} [H(w_i^k, w_j^k, n_{ij}) + H(w_i^k, w_l^k, n_{il})].$$

Obecně

$$\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(x, t_k)) |_{\Gamma_{ij}} \approx \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, n_{ij}).$$

V případě $N = 1$, $n_{ij} = 1$, $n_{il} = -1$ lze uvažovat následující aproximaci:

pokud $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} 1 \lambda w(\cdot, t_k) |_{\Gamma_{ij}} &\approx \lambda w_i^k, \\ (-1) \lambda w(\cdot, t_k) |_{\Gamma_{il}} &\approx -\lambda w_l^k, \end{aligned}$$

nebo pokud $\lambda < 0$

$$\begin{aligned} 1 \lambda w(\cdot, t_k) |_{\Gamma_{ij}} &\approx \lambda w_j^k, \\ (-1) \lambda w(\cdot, t_k) |_{\Gamma_{il}} &\approx -\lambda w_i^k. \end{aligned}$$

Nakonec dostáváme

$$\begin{aligned} \lambda > 0 \quad & \frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{\tau} + \lambda \frac{w_i^k - w_l^k}{|D_i|} = 0, \\ \lambda < 0 \quad & \frac{w_i^{k+1} - w_i^k}{\tau} + \lambda \frac{w_j^k - w_i^k}{|D_i|} = 0. \end{aligned}$$

Je zřejmé, že platí následující rovnost

$$n \lambda w = (n \lambda)^+ w + (n \lambda)^- w,$$

kde

$$0 \leq \lambda^+ = \max(0, \lambda), \quad 0 \geq \lambda^- = \min(0, \lambda),$$

můžeme tedy psát

$$n \lambda w(\cdot, t_k) |_{\Gamma_{ij}} \approx (n \lambda)^+ w_i^k + (n \lambda)^- w_j^k =: H(w_i^k, w_j^k, n_{ij}).$$

2.4.2 *Kvazilineární skalární rovnice*

V tomto případě můžeme zkusit použít analogický tvar

$$n \lambda(w) w(\cdot, t_k) |_{\Gamma_{ij}} \approx (n \lambda(w_i^k))^+ w_i^k + (n \lambda(w_j^k))^- w_j^k =: H(w_i^k, w_j^k, n_{ij}).$$

2.4.3 *Eulerovy rovnice:*

Trojrozměrná analogie numerického toku odvozeného pro skalární lineární rovnici je vyjádřena v konstrukci následujících numerických toků:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) &\stackrel{\text{homogenita}}{\cong} \sum_{s=1}^N n_s \mathbf{A}_s(\mathbf{w}) \mathbf{w} \stackrel{\text{hyperbolicita}}{\cong} \\ &= \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{w}, n) \mathbf{w} = \mathbf{P}^+(\mathbf{w}, n) \mathbf{w} + \mathbf{P}^-(\mathbf{w}, n) \mathbf{w}, \end{aligned}$$

kde

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^+ + \mathbf{\Lambda}^-,$$

$$\mathbf{\Lambda}^\pm = \mathbf{\Lambda}^\pm(\mathbf{w}, n) = \text{diag}(\lambda_1^\pm \dots \lambda_m^\pm) = \begin{pmatrix} \lambda_1^\pm & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^\pm & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_m^\pm \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{P}^\pm := \mathbf{T} \mathbf{\Lambda}^\pm \mathbf{T}^{-1}.$$

Tedy

$$\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t_k)) |_{\Gamma_{ij}} \approx \mathbf{P}^+(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{w}_i^k + \mathbf{P}^-(\mathbf{w}_j^k, \mathbf{n}_{ij}) \mathbf{w}_j^k.$$

Dostali jsme tak **Stegerův-Warmingův** numerický tok. Můžeme také použít podobnou aproximaci

$$\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t_k)) |_{\Gamma_{ij}} \approx \mathbf{P}^+ \left(\frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2}, \mathbf{n}_{ij} \right) \mathbf{w}_i^k + \mathbf{P}^- \left(\frac{\mathbf{w}_i^k + \mathbf{w}_j^k}{2}, \mathbf{n}_{ij} \right) \mathbf{w}_j^k.$$

Tento numerický tok se nazývá **Vijayasundaramův** numerický tok.

8. přednáška

2.5 Godunova metoda

V \mathbb{R}^N ($N = 2$ nebo 3) zavedeme nový kartézský systém souřadnic $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_N$ s počátkem ve středu stěny (viz definice stěny) Γ tak, že souřadnice \tilde{x}_1 je orientována ve směru normály \mathbf{n} a $\tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_N$ jsou tečné k Γ (posunutí souřadného systému do těžiště stěny Γ a jeho otočení tak, že osa \tilde{x}_1 má směr \mathbf{n}). Z rotační invariance Eulerových rovnic plyne, že tyto rovnice v nových souřadnicích mají tvar

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial \mathbf{f}_s(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_s} = 0,$$

kde

$$\mathbf{q} = \mathbf{Q}(\mathbf{n})\mathbf{w}, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{n}) = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \mathbf{Q}_0(\mathbf{n}) & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{x} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{n})x + \tilde{\sigma}$$

a platí

$$\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}) \quad \underbrace{\quad}_{\text{rotační invariance}} \quad \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{n})\mathbf{f}_1(\mathbf{Q}\mathbf{w}) = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{n})\mathbf{f}_1(\mathbf{q}).$$

Na Γ_{ij} máme

$$\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t_k))|_{\Gamma_{ij}} = \mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{n})\mathbf{f}_1(\mathbf{q}(\cdot, t_k))|_{\Gamma_{ij}}. \quad (2.5.2)$$

Člen na pravé straně (2.5.2) se aproximuje pomocí

$$\mathbf{q}(\cdot, t_k)|_{\Gamma_{ij}} \approx \mathbf{q}(0, t_k),$$

kde $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{x}_1, t_k)$ je řešení tzv. **Riemannova problému**

$$\text{a) } \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}) = 0, \quad (\tilde{x}_1, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty), \quad (2.5.3)$$

R.P.

$$\text{b) } \mathbf{q}(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L := \mathbf{Q}\mathbf{w}_i^k, & \tilde{x}_1 < 0, \\ \mathbf{q}_R := \mathbf{Q}\mathbf{w}_j^k, & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases}$$

Věta 2.3 *Má-li Riemannův problém (2.5.3), a)–b), jediné počástech hladké slabé řešení \mathbf{q} , pak \mathbf{q} může být zapsáno pro $t > 0$ ve tvaru*

$$\mathbf{q}(\tilde{x}_1, t) = \tilde{\mathbf{q}}\left(\frac{\tilde{x}_1}{t}\right),$$

kde $\tilde{\mathbf{q}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Důkaz Je zřejmé, že pro libovolné pevné $\alpha > 0$ je funkce $\mathbf{q}(\alpha \tilde{x}_1, \alpha t)$ také slabým řešením Riemannova problému. Díky jednoznačnosti máme $\mathbf{q}(\alpha \tilde{x}_1, \alpha t) = \mathbf{q}(\tilde{x}_1, t)$, což znamená, že \mathbf{q} je homogenní vektorová funkce řádu 0. Tedy pro libovolné pevné \tilde{x}_1 a t , zvolíme-li $\alpha = \frac{1}{t}$, máme $\mathbf{q}(\tilde{x}_1, t) = \mathbf{q}(\frac{\tilde{x}_1}{t}, 1) =: \tilde{\mathbf{q}}(\frac{\tilde{x}_1}{t})$.
□

Poznamenejme, že někdy také píšeme

$$\tilde{\mathbf{q}}\left(\frac{\tilde{x}_1}{t}\right) = \mathbf{q}_{RS}(\tilde{x}_1, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R).$$

Zkratka RS znamená **Riemann solution** (řešení). Nyní můžeme psát

$$\sum_{s=1}^N n_s \mathbf{f}_s(\mathbf{w}(\cdot, t_k)) |_{\Gamma_{ij}} \approx \mathbf{Q}^{-1}(n) \mathbf{f}_1(\mathbf{q}(0, t_k)) = \mathbf{Q}^{-1} \underbrace{\mathbf{f}_1(\mathbf{q}_{RS}(0, \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R))}_{\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)}$$

a položit

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, n_{ij}) := \mathbf{Q}^{-1}(n) \mathbf{g}_G(\overbrace{\mathbf{Q} \mathbf{w}_i^k}^{\mathbf{q}_L}, \overbrace{\mathbf{Q} \mathbf{w}_j^k}^{\mathbf{q}_R}).$$

Godunova metoda je definovaná jako metoda konečných objemů

$$\mathbf{w}_i^{k+1} = \mathbf{w}_i^k - \frac{\tau_k}{|D_i|} \sum_{j \in S(i)} \mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, n_{ij}) |\Gamma_{ij}|$$

s numerickým tokem

$$\mathbf{H}(\mathbf{w}_i^k, \mathbf{w}_j^k, n_{ij}) = \mathbf{Q}^{-1}(n_{ij}) \mathbf{g}_G(\mathbf{Q} \mathbf{w}_i^k, \mathbf{Q} \mathbf{w}_j^k),$$

kde

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_{RS}(0; \mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)).$$

Funkce \mathbf{g}_G se nazývá *Godunovův numerický tok* nebo *přesný Riemannův řešič*.

Godunovo schéma předpokládá konstrukci přesného řešení Riemannova problému, což je obecně obtížné. Této nevýhodě se vyhneme použitím *přibližného Riemannova řešiče* neboli *Riemannova numerického toku*. Značí se $\mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$.

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) \approx \mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R).$$

Přesný Riemannův řešič
Godunovův numerický tok

Přibližný Riemannův řešič
Riemannův numerický tok

Výsledné metody jsou nazývány *metodami Godunovova typu*.

Zkušební otázka 2.3! Vysvětlete klíčová slova ‘Riemannův problém’, ‘Riemannův řešič’ a jejich užití při konstrukci numerického toku.

Věta 2.4 Předpokládejme že pro každé $\mathbf{q} \in D$ všechna vlastní čísla $\lambda_k(\mathbf{q})$ matice $\mathbf{A}_1(\mathbf{q})$ jsou jednoduchá a že každý vlastní vektor r_k je buď ‘genuinely’ nelineární nebo lineárně degenerovaný.

Pak pro libovolné $\mathbf{q}_L \in D$ existuje jeho okolí $B(\mathbf{q}_L) \subset D$ takové, že platí: pro každé $\mathbf{q}_R \in B(\mathbf{q}_L)$ má Riemannův problém

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_1} \mathbf{f}_1(\mathbf{q}) = 0 \quad (\tilde{x}_1, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty),$$

$$\mathbf{q}(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L, & \tilde{x}_1 < 0, \\ \mathbf{q}_R, & \tilde{x}_1 > 0, \end{cases}$$

jediné řešení. Toto řešení se skládá z maximálně $m + 1$ konstantních částí, oddělených jednoduchou vlnou nebo entropickou rázovou vlnou nebo kontaktní nespojitostí.

Důkaz Terminologii lze najít v (Feistauer *et al.*, 2003, strana 81–88). Důkaz věty je uveden např. v, (Godlewski and Raviart, 1996), kapitola 1, věta 6.1 nebo (Smoller, 1983), věta 17.18.

□

2.5.1 Integrální tvar Riemannova řešiče

9. přednáška

Godunovův numerický tok $\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ (přesný Riemannův řešič) lze vyjádřit pomocí tzv. přibližného Riemannova řešiče $\mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ odvozeného heuristicky ve tvaru

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) \approx \mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) := \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^-(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad (2.5.4)$$

kde

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T} \Lambda \mathbf{T}^{-1}, \quad \mathbf{A}_1^- = \mathbf{T} \Lambda^- \mathbf{T}^{-1},$$

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^-(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} a_1^-(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \\ \vdots \\ \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} a_m^-(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \end{pmatrix}.$$

Zde a_n^- značí n -tý řádek matice \mathbf{A}_1^- , $n = 1, \dots, m$. Dále značíme

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} a_n^-(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (2.5.5)$$

křivkový integrál vektorové funkce $\mathbf{a}_n^- : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ podél křivky v \mathbb{R}^m s počátečním a koncovým bodem \mathbf{q}_L a \mathbf{q}_R . Integrál (2.5.5) obecně závisí na cestě. Jestliže je vektorové pole \mathbf{a}_n^- , $n = 1 \dots, m$ konstantní (např. v případě lineárního hyperbolického systému s konstantní maticí \mathbf{A}_1), potom je potenciální a integrál (2.5.5) je nezávislý na cestě a nezáleží tedy na výběru křivky spojující \mathbf{q}_L a \mathbf{q}_R . **Integrál (2.5.4) lze vypočítat použitím vhodné numerické kvadratury** nebo volbou vhodné **integrační cesty**, jak ukážeme později. Integrální tvar přibližného Riemannova řešiče $\mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R)$ je motivován následující úvahou. Uvažujme Riemannův problém (2.5.3), t.j.

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\mathbf{f}_1(\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} = 0,$$

$$\mathbf{q}(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L, & \tilde{x}_1 < 0, \\ \mathbf{q}_R, & \tilde{x}_1 > 0. \end{cases}$$

Nechť \mathbf{f}_1 je lineární, t.j. $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}$, \mathbf{A}_1 – matice nezávislejší na \mathbf{q} (konstantní matice). Protože předpokládáme, že lineární systém je hyperbolický, má \mathbf{A}_1 reálná vlastní čísla a je diagonalizovatelná

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{T} \Lambda \mathbf{T}^{-1}.$$

Připomeňme již zavedené značení

$$\mathbf{A}_1^\pm = \mathbf{T} \Lambda^\pm \mathbf{T}^{-1}.$$

Platí

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{A}_1 \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \mathbf{T} \Lambda \mathbf{T}^{-1} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tilde{x}_1} = 0 \quad / \mathbf{T}^{-1} \text{ zleva}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q})}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial(\mathbf{T}^{-1}\mathbf{q})}{\partial \tilde{x}_1} = 0 \\ \mathbf{q}(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} \mathbf{q}_L & \tilde{x}_1 < 0 \\ \mathbf{q}_R & \tilde{x}_1 > 0 \end{cases} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \tilde{\mathbf{q}}}{\partial \tilde{x}_1} = 0 \\ \tilde{\mathbf{q}}(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_L & \tilde{x}_1 < 0 \\ \tilde{\mathbf{q}}_R & \tilde{x}_1 > 0 \end{cases} \end{array} \right\},$$

kde $\tilde{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{q}$. Uvažujme obecný případ, kdy (počet rovnic je) $m = 5$ a rozepišme rovnice po složkách. Dostaneme

$$\frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial \tilde{q}_1}{\partial \tilde{x}_1} = 0, \quad \tilde{q}_1(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} (\tilde{q}_L)_1 \\ (\tilde{q}_R)_1 \end{cases},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \tilde{q}_5}{\partial t} + \lambda_5 \frac{\partial \tilde{q}_5}{\partial \tilde{x}_1} = 0, \quad \tilde{q}_5(\tilde{x}_1, 0) = \begin{cases} (\tilde{q}_L)_5 \\ (\tilde{q}_R)_5 \end{cases}.$$

Pomocí metody charakteristik dostaneme

$$\tilde{q}_\ell(0, t_k) = \begin{cases} (\tilde{q}_L)_\ell, & \text{jestliže } \lambda_\ell > 0 \\ (\tilde{q}_R)_\ell, & \text{jestliže } \lambda_\ell < 0 \end{cases}, \quad \ell = 1, \dots, 5,$$

odkud plyne, že

$$\lambda_1 \tilde{q}_1(0, t_k) = \lambda_1^+ (\tilde{q}_L)_1 + \lambda_1^- (\tilde{q}_R)_1,$$

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \lambda_5 \tilde{q}_5(0, t_k) &= \lambda_5^+(\tilde{q}_L)_5 + \lambda_5^-(\tilde{q}_R)_5. \end{aligned}$$

Zapsáno v maticovém tvaru, máme

$$\mathbb{A} \tilde{\mathbf{q}}(0, t_k) = \mathbb{A}^+ \tilde{\mathbf{q}}_L + \mathbb{A}^- \tilde{\mathbf{q}}_R.$$

Jestliže vynásobíme tuto rovnici maticí \mathbf{T} zleva, dostaneme

$$\mathbf{A}_1 \mathbf{q}(0, t_k) = \mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_L + \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_R =: \mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R).$$

Závěr: Přesný Riemannův řešič $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}(0, t_k))$ lineárního Riemannova problému ($\mathbf{f}_1(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{q}$) má tvar

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_L + \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_R.$$

Nyní lze psát

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) &= \mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_L + \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_R + \underbrace{\mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_L - \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_L}_{\pm \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_L} \\ &= \underbrace{\mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_L + \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_L}_{\mathbf{A}_1 \mathbf{q}_L} + \mathbf{A}_1^- (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^- d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Zároveň platí

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) &= \mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_L + \mathbf{A}_1^- \mathbf{q}_R + \mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_R - \mathbf{A}_1^+ \mathbf{q}_R \\ &= \mathbf{A}_1 \mathbf{q}_R + \mathbf{A}_1^+ (\mathbf{q}_L - \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_R) - \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^+ d\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Můžeme tedy psát

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_R) - \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} |\mathbf{A}_1| d\mathbf{q} \right\},$$

kde

$$|\mathbf{A}_1| = \mathbf{A}_1^+ - \mathbf{A}_1^-.$$

Lineární případ : $\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) =$ (přesně) $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^- d\mathbf{q}.$

Nelineární případ : $\mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) :=$ (heuristicky) $\mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^-(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$

Integrály, které jsme zde psali obecně nemusejí dávat smysl. Nicméně tyto rovnice mohou být vyžity k definici numerických schémat tak, že integrály jsou vyčísleny pomocí numerické kvadratury nebo vypočteny užitím vhodné integrační cesty.

Zkušební otázka 2.4! Napište integrální tvar přibližného Riemannova řešiče.

2.5.2 *Přibližný Riemannův řešič založený na numerické kvadratuře*

Stegerovo-Warmingovo schéma lze odvodit z vyjádření

$$\mathbf{g}_G(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_R) - \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} |\mathbf{A}_1| d\mathbf{q} \right\}$$

pomocí 'kvadrurní formule'

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} |\mathbf{A}_1| d\mathbf{q} \approx |\mathbf{A}_1(\mathbf{q}_R)|\mathbf{q}_R - |\mathbf{A}_1(\mathbf{q}_L)|\mathbf{q}_L,$$

kteřá je přesná (v lineárním případě), pokud \mathbf{A}_1 je konstatní. Algebraický řád této kvadrurní formule je 0. To vysvětluje, proč je Stegerovo-Warmingovo schéma poněkud difuzní (t.j. nespojitosti jsou výrazně zhlazeny), jak plyne z numerických experimentů.

Jiná schémata lze získat na základě kvadrurní formule

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} |\mathbf{A}_1| d\mathbf{q} \approx \left| \mathbf{A}_1\left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right) \right| (\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) \quad (2.5.6)$$

a aproximace

$$\frac{1}{2}(\mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_R)) \approx \mathbf{f}_1\left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right) = \mathbf{A}_1\left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right) \left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right) \quad (2.5.7)$$

plynouce z homogenity \mathbf{f}_1 .

Užitím (2.5.6), se dostáváme k [Van Leerovu](#) schématu s numerickým tokem

$$\mathbf{g}_{VL}(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_L) + \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_R) - |\mathbf{A}_1\left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right)|(\mathbf{q}_R - \mathbf{q}_L) \right\}.$$

Dosazením (2.5.7) do Van Leerova numerického toku dostáváme [Vijaysundarano](#) schéma s numerickým tokem

$$\mathbf{g}_V(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{A}_1^+\left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right) \mathbf{q}_L + \mathbf{A}_1^-\left(\frac{\mathbf{q}_L + \mathbf{q}_R}{2}\right) \mathbf{q}_R.$$

2.5.3 *Přibližný Riemannův řešič založený na vhodné integrační cestě*

Osherova-Solomonova metoda je založena na výpočtu integrálu

$$\mathbf{g}_R(\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R) = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_R) - \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^+(q) dq$$

podél spojité křivky z \mathbf{q}_L do \mathbf{q}_R v D sestávající se počástech z hladkých křivek $\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\eta}^{(5)}$ k nimž je odpovídající vlastní vektor matice $\mathbf{A}_1(\mathbf{q})$ tečný v každém jejím bodě.

$$\boldsymbol{\eta}^{(\ell)} : s \in (0, \infty) \rightarrow \boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s) \in D, \quad \ell = 1, \dots, 5,$$

takové že

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s)}{ds} = \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s)), \quad s \in (0, \infty),$$

kde \mathbf{r}_ℓ je vlastní vektor matice \mathbf{A}_1 .

Budeme počítat čtyři přípustné stavy $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3$ a \mathbf{q}_4 a počítat integrál $\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q}$:

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \sum_{\ell=1}^5 \int_{\mathbf{q}_{\ell-1}}^{\mathbf{q}_\ell} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q},$$

kde $\mathbf{q}_0 := \mathbf{q}_L$ a $\mathbf{q}_5 := \mathbf{q}_R$.

Ukažme tento výpočet pro $\ell = 2$.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} &= \int_a^b \mathbf{A}_1^+(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) \mathbf{r}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) ds \\ &= \int_a^b \tilde{\lambda}_2^+(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) \mathbf{r}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) ds, \end{aligned}$$

kde $\tilde{\lambda}_2^+$ je vlastní číslo matice \mathbf{A}_1^+ odpovídající vlastnímu vektoru \mathbf{r}_2 matice \mathbf{A}_1^+ .

$$\mathbf{A}_1^+ = \mathbf{T} \tilde{\Lambda}^+ \mathbf{T}^{-1},$$

$$\mathbf{A}_1^+ \mathbf{T} = \mathbf{T} \tilde{\Lambda}^+ \Leftrightarrow \mathbf{A}_1^+ \mathbf{r}_2 = \lambda_2^+ \mathbf{r}_2,$$

kde sloupce matice \mathbf{T} jsou vlastní vektory $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_5$ matice \mathbf{A}_1 .

Ukážeme později, že vlastní číslo $\tilde{\lambda}_2$ nemění znaménko podél $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$, dokonce je konstantní podél $\boldsymbol{\eta}^{(2)}$. Proto

$$\tilde{\lambda}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) = \tilde{\lambda}_2(\mathbf{q}_1), \quad s \in [a, b],$$

$$\tilde{\lambda}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) = \begin{cases} 0, & \tilde{\lambda}_2(\mathbf{q}_1) < 0, \\ \tilde{\lambda}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)), & \tilde{\lambda}_2(\mathbf{q}_1) > 0. \end{cases}$$

Nyní už tedy můžeme psát

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_R} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_a^b \tilde{\lambda}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) \mathbf{r}_2(\boldsymbol{\eta}^{(2)}(s)) ds = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_2) - \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_1),$$

neboť \mathbf{A}_1 je Jacobiho matice zobrazení \mathbf{f}_1 .

2.5.3.1 *Jacobiho matice \mathbf{f}_1*

Stavový vektor $\mathbf{q} = \mathbf{q}(\tilde{x}, t)$ má tvar

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho \tilde{v}_1 \\ \rho \tilde{v}_2 \\ \rho \tilde{v}_3 \\ E \end{pmatrix},$$

kde

$$\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \tilde{v}_1 \\ \tilde{v}_2 \\ \tilde{v}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_0(n) \mathbf{v}$$

je transformovaná rychlost. Pro zjednodušení budeme psát

$$\begin{aligned} u &= \tilde{v}_1, \\ v &= \tilde{v}_2, \\ w &= \tilde{v}_3. \end{aligned}$$

Potom zobrazení f_1 má složky

$$\mathbf{f}_1(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (E + p)u \end{pmatrix}.$$

Tvar Jacobiho matice \mathbf{A}_1 lze nalézt v (Feistauer *et al.*, 2003). Zde pouze uvádíme vlastní čísla. Mají tvar

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\mathbf{q}) &= u - a, \\ \tilde{\lambda}_2(\mathbf{q}) &= u, \\ \tilde{\lambda}_3(\mathbf{q}) &= u, \\ \tilde{\lambda}_4(\mathbf{q}) &= u, \\ \tilde{\lambda}_5(\mathbf{q}) &= u + a, \end{aligned}$$

kde $a = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}$ je rychlost zvuku.

Odpovídající vlastní vektory jsou

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{r}_1(\mathbf{q}) & \mathbf{r}_2(\mathbf{q}) & \mathbf{r}_3(\mathbf{q}) & \mathbf{r}_4(\mathbf{q}) & \mathbf{r}_5(\mathbf{q}) \\
\left(\begin{array}{c} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} - ua \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{2} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{2} - va \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{2} - wa \end{array} \right) & \left(\begin{array}{c} 1 \\ u-a \\ v \\ w \\ \frac{|\tilde{\mathbf{v}}|^2}{2} + \frac{a^2}{\gamma-1} + ua \end{array} \right)
\end{array}$$

2.5.3.2 Riemannovy invarianty

Definice 2.5 Funkci $\psi_\ell : D \rightarrow \mathbb{R}$ nazýváme Riemannovým invariantem k vlastnímu vektoru \mathbf{r}_ℓ , jestliže

$$\begin{array}{l}
a) \quad \psi_\ell \in C^1(D), \\
b) \quad \nabla \psi_\ell(\mathbf{q})^T \cdot \mathbf{r}_\ell(\mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in D,
\end{array} \tag{2.5.8}$$

kde $\nabla \mathbf{q} = \left(\frac{\partial}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial q_5} \right)^T$.

Podmínka (2.5.8) může být pro každé $\mathbf{q} \in D$ splněna nejvýše čtyřmi funkcemi $\psi_\ell^1(\mathbf{q}), \psi_\ell^2(\mathbf{q}), \psi_\ell^3(\mathbf{q}), \psi_\ell^4(\mathbf{q})$, jejichž gradienty jsou lineárně nezávislé pro každé $\mathbf{q} \in D$. Nalézt Riemannovy invarianty znamená řešit parciální diferenciální rovnici prvního řádu (2.5.8). Uvedme nyní Riemannovy invarianty.

$$\begin{array}{l}
\mathbf{r}_1(\mathbf{q}) : v, w, \quad \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad u + \frac{2a}{\gamma-1}, \\
\mathbf{r}_2(\mathbf{q}) : p, u, \quad v, \quad w, \\
\mathbf{r}_3(\mathbf{q}) : p, u, v - 2a, w, \\
\mathbf{r}_4(\mathbf{q}) : p, u, \quad v, \quad w - 2a, \\
\mathbf{r}_5(\mathbf{q}) : v, w, \quad \frac{p}{\rho^\gamma}, \quad u - \frac{2a}{\gamma-1}.
\end{array}$$

Příklad 2.6 Ukážeme, že u je Riemannovým invariantem.

$$\begin{aligned}
\psi_2^2(\mathbf{q}) &= u = \frac{q_2}{q_1}, \\
\nabla \psi_2^2(\mathbf{q}) &= \left(-\frac{q_2}{q_1^2}, \frac{1}{q_1}, 0, 0, 0 \right)^T = \left(-\frac{u}{\rho}, \frac{1}{\rho}, 0, 0, 0 \right)^T, \\
\mathbf{r}_2(\mathbf{q}) &= \left(1, u, v, w, \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right)^T,
\end{aligned}$$

tedy

$$\nabla \psi_2^2(\mathbf{q})^T \cdot \mathbf{r}_2(\mathbf{q}) = 0.$$

2.5.3.3 *Integrace vlastního vektoru \mathbf{r}_ℓ* Riemannovy invarianty jsou konstantní podél každé hladké křivky v D , ke které je odpovídající vlastní vektor matice $\mathbf{A}_1(\mathbf{q})$ tečný v každém bodě.

Věta 2.7 *Nechť pro $\ell \in \{1, \dots, 5\}$ $\boldsymbol{\eta}^{(\ell)} : s \in (0, \infty) \rightarrow \boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s) \in D$ je hladká křivka taková, že*

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s)}{ds} = \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s)), \quad s \in (0, \infty),$$

kde \mathbf{r}_ℓ je vlastní vektor matice \mathbf{A}_1 . Pak Riemannovy invarianty $\psi_\ell^1(\mathbf{q}), \psi_\ell^2(\mathbf{q}), \psi_\ell^3(\mathbf{q}), \psi_\ell^4(\mathbf{q})$ jsou konstantní podél křivky $\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}$.

Důkaz Máme

$$\frac{d}{ds}(\psi_\ell^i(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)})) = \nabla \psi_\ell^i(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}) \cdot \frac{d\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}}{ds} = \nabla \psi_\ell^i(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}) \cdot \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}) = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

□

Věta 2.8 *Nechť $\tilde{\mathbf{q}} = (\tilde{q}_1, \dots, \tilde{q}_5)^T \in D$ je dáno.*

Pak pro každé $\ell \in \{1, \dots, 5\}$ existuje jediná křivka $\boldsymbol{\eta}^{(\ell)} : (0, \infty) \rightarrow D, \boldsymbol{\eta}^{(\ell)} \in C^1(0, \infty)^5$ splňující

$$\frac{d\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s)}{ds} = \mathbf{r}_\ell(\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(s))$$

a podmínku

$$\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}(\tilde{q}_1) = \tilde{\mathbf{q}}.$$

Důkaz Důkaz je konstruktivní a křivku lze vyjádřit explicitně. Detaily viz (Feistauer *et al.*, 2003), str. 223, Věta 3.64. □

2.5.3.4 *Integrační cesta v přípustné stavové množině* Nechť $\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_R$ jsou dva různé stavy v D . V této části ukážeme, jak zkonstruovat spojitou cestu z \mathbf{q}_L do \mathbf{q}_R v D sestávající se po částech z křivek $\boldsymbol{\eta}^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\eta}^{(5)}$. Vypočítáme čtyři přípustné stavy $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4$ v D tak, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}^{(1)}(\rho_L) &= \mathbf{q}_L, \\ \boldsymbol{\eta}^{(1)}(\rho_1) &= \boldsymbol{\eta}^{(2)}(\rho_1) = \mathbf{q}_1, \\ \boldsymbol{\eta}^{(2)}(\rho_2) &= \boldsymbol{\eta}^{(3)}(\rho_2) = \mathbf{q}_2, \\ \boldsymbol{\eta}^{(3)}(\rho_3) &= \boldsymbol{\eta}^{(4)}(\rho_3) = \mathbf{q}_3, \\ \boldsymbol{\eta}^{(4)}(\rho_4) &= \boldsymbol{\eta}^{(5)}(\rho_4) = \mathbf{q}_4, \\ \boldsymbol{\eta}^{(5)}(\rho_R) &= \mathbf{q}_R, \end{aligned}$$

kde $\rho_L, \rho_1, \dots, \rho_4, \rho_R$ jsou hustoty odpovídající stavům $\mathbf{q}_L, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_R$. Máme pět křivek $\boldsymbol{\eta}^{(\ell)}, \ell = 1, \dots, 5$ a podél každé z nich jsou čtyři Riemannovy invarianty $\psi_\ell^i, i = 1, 2, 3, 4$ konstantní. Můžeme tedy napsat následujících 20 rovnic pro neznámé složky stavů $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_4$:

$$\begin{aligned}
\psi_1^i(\mathbf{q}_L) &= \psi_1^i(\mathbf{q}_1), & i &= 1, 2, 3, 4, \\
\psi_2^i(\mathbf{q}_1) &= \psi_2^i(\mathbf{q}_2), & i &= 1, 2, 3, 4, \\
\psi_3^i(\mathbf{q}_2) &= \psi_3^i(\mathbf{q}_3), & i &= 1, 2, 3, 4, \\
\psi_4^i(\mathbf{q}_3) &= \psi_4^i(\mathbf{q}_4), & i &= 1, 2, 3, 4, \\
\psi_5^i(\mathbf{q}_4) &= \psi_5^i(\mathbf{q}_R), & i &= 1, 2, 3, 4.
\end{aligned}$$

Víme, že $\tilde{\lambda}_2 = \tilde{\lambda}_3 = \tilde{\lambda}_4 = u$, a že u je Riemannův invariant k $\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_4$. Odtud a z věty 2.7 dostáváme, že $\tilde{\lambda}_2, \tilde{\lambda}_3, \tilde{\lambda}_4$ jsou konstantní podél $\boldsymbol{\eta}^{(2)}, \boldsymbol{\eta}^{(3)}, \boldsymbol{\eta}^{(4)}$. Je-li $\tilde{\lambda}_2 \circ \boldsymbol{\eta}^{(2)} = \text{konst.} > 0$, pak $\tilde{\lambda}_2^+ = \tilde{\lambda}_2$ a

$$\int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \mathbf{A}_1(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_2) - \mathbf{f}_1(\mathbf{q}_1).$$

Jestliže $\tilde{\lambda}_2 \circ \boldsymbol{\eta}^{(2)} = \text{konst.} < 0$ pak $\tilde{\lambda}_2^+ = 0$ a

$$\int_{\mathbf{q}_1}^{\mathbf{q}_2} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = 0.$$

Dále ukážeme, že $\tilde{\lambda}_1$ resp. $\tilde{\lambda}_5$ mohou měnit znaménko podél $\boldsymbol{\eta}^{(1)}$ resp. $\boldsymbol{\eta}^{(5)}$ nejvýše jednou. Pokud se tak stane (tj. mění znaménko), pak značíme \mathbf{q}_L^* resp. \mathbf{q}_R^* stavy splňující

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_1(\mathbf{q}_L^*) &= 0, \\
\tilde{\lambda}_5(\mathbf{q}_R^*) &= 0.
\end{aligned}$$

Body $\mathbf{q}_L^*, \mathbf{q}_R^*$ nazýváme sonickými (protože pokud $\tilde{\lambda}_1 = u - a = 0$ pak $u = a$). Platí

$$\int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_1} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \int_{\mathbf{q}_L}^{\mathbf{q}_L^*} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q} + \int_{\mathbf{q}_L^*}^{\mathbf{q}_1} \mathbf{A}_1^+(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

Příklad 2.9

$$\begin{aligned}
\tilde{\lambda}_1(\mathbf{q}) &= u - a \\
&= u + \frac{2}{\gamma - 1}a - \left(\frac{2}{\gamma - 1}a + a \right) \\
&= \underbrace{u + \frac{2}{\gamma - 1}a}_{\psi_1^4} - \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \sqrt{\gamma \underbrace{\frac{p}{\rho^\gamma}}_{\psi_1^3} \rho^{\gamma-1}}
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{\psi_1^4}_{\text{konst. podél } \boldsymbol{\eta}^{(1)}} - \underbrace{\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sqrt{\gamma \psi_1^3(\mathbf{q})}}_{\text{konst. podél } \boldsymbol{\eta}^{(1)}} q_1^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

Odtud

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_1(\boldsymbol{\eta}^{(1)}(s)) &= C_1 - \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \sqrt{\gamma C_2} s^{\frac{\gamma-1}{2}} \\ &= C_1 - C_3 s^{\frac{\gamma-1}{2}}, \quad \gamma \in (1, 3). \end{aligned}$$

Vidíme, že tato funkce je monotóní \Rightarrow může změnit znaménko nejvýše jednou.

Zkušební otázka 2.5! Vysvětlete pojem Riemannovy invarianty a jejich využití v konstrukci přibližného Riemannova řešiče.

BIBLIOGRAFIE

- Feistauer, M. (1993). *Mathematical Methods in Fluid Dynamics*. Longman Scientific & Technical, Harlow.
- Feistauer, M., Felcman, J., and Straškraba, I. (2003). *Mathematical and Computational Methods for Compressible Flow*. Oxford University Press, Oxford.
- Godlewski, E. and Raviart, P. A. (1996). *Numerical Approximation of Hyperbolic Systems of Conservation Laws*. Number 118 in Applied Mathematical Sciences. Springer, New York.
- Smoller, J. (1983). *Shock Waves and Reaction–Diffusion Equations*. Springer, New York.