

Jiří Fiala

Lineární algebra II

Přepsal Petr Baudiš

v ak. roce 2004/2005

“If I am given a formula, and I am ignorant of its meaning, it cannot teach me anything. But if I already know it, what does the formula teach me?”

— ST. AUGUSTINE

© 2004/2005 Jiří Fiala, Petr Baudiš

Verze 0.20050000/L:1.616. Tato verze není garantována, nemusí být kompletní a může obsahovat chyby.

Aktuální verzi vždy najdete na <http://math.or.cz/>.

Sazba v programu \TeX .

Determinant matice

Permutace množiny

Permutace množiny $\{1, \dots, n\}$ je bijektivní zobrazení $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$.
 S_n značíme množinu všech permutací na n prvcích ($|S_n| = n!$).
 Znaménko permutace $p \in S_n$ definujeme:

$$\operatorname{sgn}(p) \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\# \text{ inverzí v } p}$$

kde dvojice indexů (i, j) tvoří inverzi, pokud $i < j$, ale $p(i) > p(j)$.

Cvičení: Definujte znaménko pomocí cyklů permutace a pomocí transpozic.

Definice:

Nechť A je čtvercová matice řádu n nad tělesem T . Potom **determinant** matice A je dán výrazem:

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)}$$

(Jde vlastně o zobrazení $T^{n \times n} \rightarrow T$.)

... ukázky...

Lze si rozmyslet, že determinant trojúhelníkové matice je součin všech prvků na hlavní diagonále.

Permanent: Determinant, ovšem bez použití sgn permutace.

Vlastnosti determinantu

Pozorování: $\det(A^T) = \det(A)$

DŮKAZ:

$$\begin{aligned} \det(A^T) &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n (A^T)_{i,p(i)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n a_{p(i),i} = \det(A) \end{aligned}$$

Poslední rovnost dokáží tak, že podle p zvolím q , $q = p^{-1}$, tedy $p(i) = i' \iff q(i') = i$. Tedy $i < j \wedge p(i) > p(j)$ znamená, že $q(i') < q(j') \wedge i' > j'$, tedy $\operatorname{sgn}(p) = \operatorname{sgn}(q)$.

Q.E.D.

Pozorování: Přerovnání sloupců matice A podle permutace q nezmění determinant, pokud $\operatorname{sgn}(q) = +1$, v opačném případě determinant změní pouze znaménko.

DŮKAZ:

A buď původní matice, A' pak matice s přerovnanými sloupci. Sloupec č. 1 matice A se octne v A' na pozici $q(1)$ apod.

$$a_{i,j} = a'_{i,q(j)} \implies a'_{i,j} = a_{i,q^{-1}(j)}$$

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n (A')_{i,p(i)} = \\ &= \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,q^{-1}(p(i))} = \end{aligned}$$

Nechť $h(i) = q(p(i))$ ($\text{sgn } q = \text{sgn } q^{-1}$):

$$\begin{aligned} &= \text{sgn}(q) \sum_{p \in S_n} \underbrace{\text{sgn}(q) \text{sgn}(p)}_{\text{sgn}(h)} \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,h(i)} = \\ &= \text{sgn}(q) \sum_{h \in S_n} \text{sgn}(h) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,h(i)} = \text{sgn}(q) \cdot \det(A) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Důsledek: Má-li matice A dva sloupce shodné, $\det(A) = 0$ (platí i pro stejné řádky).

Tvrzení:

Determinant je lineární funkcí každého řádku i každého sloupce matice.

Tedy např.:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & \dots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \\ = \det \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} + \end{aligned}$$

DŮKAZ:

Linearita vůči násobení $t \in T$: A buď původní matice, A' má vynásobený i -tý řádek.

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot \underbrace{(a_{1,p(1)} \cdot a_{2,p(2)} \cdots (t \cdot a_{i,p(i)}) \cdots a_{n,p(n)})}_{\prod_{i=1}^n (A')_{i,p(i)}} = \\ &= t \cdot \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot \prod_{i=1}^n a_{i,p(i)} = t \det(A) \end{aligned}$$

Linearita vůči sčítání, $a_{i,j} = b_{i,j} + c_{i,j}$:

$$\begin{aligned} \det(A') &= \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot (a_{1,p(1)} \cdot a_{2,p(2)} \cdots \underbrace{(b_{i,p(i)} + c_{i,p(i)})}_{a_{i,p(i)}} \cdots a_{n,p(n)}) = \\ &= \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot (a_{1,p(1)} \cdot a_{2,p(2)} \cdots b_{i,p(i)} \cdots a_{n,p(n)}) \\ &+ \sum_{p \in S_n} \text{sgn}(p) \cdot (a_{1,p(1)} \cdot a_{2,p(2)} \cdots c_{i,p(i)} \cdots a_{n,p(n)}) = \\ &= \det(B) + \det(C) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Důsledek: Elementární řádková úprava součtu řádků nemění determinant.

Výpočet determinantu

Převedením na trojúhelníkový tvar pomocí přičítání t -násobků ostatních řádků — podobně jako Gaussova eliminace.

Nesmíme měnit pořadí řádků ani násobit řádek $t \in T$ (resp. můžeme, ale musíme si pamatovat, jak to ovlivní diskriminant). Zato můžeme používat *sloupcové* operace.

Cvičení:

Spočtěte determinant Vandormondovy matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Vektorové obaly

Druhy obalů množiny vektorů v_1, \dots, v_n v \mathbb{R}^α :

- **Lineární obal** $L(v_1, \dots, v_n) = \{a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{R}\}$.
Mějme \mathbb{R}^2 a vektory v_1, v_2 , pak $L(v_1, v_2) = \mathbb{R}^2$.
- **Afinní obal** $\{a_1v_1 + \dots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i = 1\}$.
Mějme \mathbb{R}^2 a vektory v_1, v_2 , pak afinní obal bude přímka procházející jejich koncovými body.
- **Konvexní obal** $\{a_1v_1 + \dots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n a_i = 1, a_i \in [0, 1]\}$.
Mějme \mathbb{R}^2 a vektory v_1, v_2 , pak konvexní obal bude úsečka spojující jejich koncové body.
- **Rovnoběžnostěn** $\{a_1v_1 + \dots + a_nv_n : a_i \in \mathbb{R}, a_i \in [0, 1]\}$.
Mějme \mathbb{R}^2 a vektory v_1, v_2 , pak rovnoběžnostěn bude množina bodů uzavřená kosodélníkem s krajními body $0, v_1, v_2, v_1 + v_2$ (včetně úseček je spojujících).

Souvislost s objemy těles

Jde o geometrický význam determinantu, jsme tedy v \mathbb{R}^n . Mějme matici $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, rozložíme její řádky na vektory a_1, \dots, a_n (ty budou tvořeny sloupci matice). (diagram LA1)

Pozorování:

$|\det(A)|$ udává plochu (objem) rovnoběžnostěnu určeného vektory a_1, \dots, a_n .

Důkaz: (diagram LA2) (jakýkoliv rovnoběžník můžeme převést beze změny objemu (tedy i determinantu) na n -rozměrný obdélník či kvádr, který má nenulové prvky jen na diagonále, tedy determinant spočteme a ověříme snadno).

Důsledek: Je-li f lineární zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a F je matice tohoto zobrazení, potom se objemy těles mění podle předpisu

$$\text{vol}(f(T)) = |\det(F)| \cdot \text{vol}(T)$$

(kde vol značí objem v \mathbb{R}^d). Viz (diagram LA3) (kolikrát se čtvereček vejde do F , tolikrát se zdeformovaný čtvereček vejde do zdeformovaného $f(T)$).

VĚTA (o součinu determinantů):

Nechť A a B jsou čtvercové matice řádu n nad tělesem T . Potom platí

$$\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

DŮKAZ:

Když A nebo B jsou singulární, nějaký řádek je lineární kombinací ostatních, tudíž je determinant nulový. Je-li A nebo B singulární, $A \cdot B$ je také singulární. Tedy dostaneme rovnici $0 = 0$.

Předpokládejme tedy, že A i B jsou regulární. To znamená, že A lze rozložit jako součin elementárních matic:

$$A = E_1 \cdot E_2 \cdots E_k$$

Tedy:

$$\det(A \cdot B) = \det(E_1 \cdot E_2 \cdots E_k \cdot B) = \det(E_1) \cdot \det(E_2 \cdots E_k \cdot B) =$$

neboť víme, jak se mění determinant elementárními úpravami — přičtení násobku jiného řádku znamená $\det(E_1) = 1$, násobení řádku číslem t znamená $\det(E_1) = t$.

$$= \det(E_1) \cdots \det(E_2) \cdot \det(B) = \det(E_1 \cdots E_k) \cdot \det(B) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Q.E.D.

VĚTA (o regularitě podle determinantu):

Čtvercová matice A je regulární, právě když $\det A \neq 0$.

Důsledek linearity determinantu

Nechť A_{ij} značí matici, která vznikne z matice A vypuštěním i -tého řádku a j -tého sloupce (někdy také nazýváme **minor matice** určený souřadnicemi i, j).

Potom pro libovolné i platí tzv. **rozvoj determinantu** podle i -tého řádku:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

(Stejnou věc mohu udělat i pro sloupce.)

DŮKAZ:

Můžeme vzít definici determinantu

$$\det(A) = \sum_{p \in S_n} \operatorname{sgn}(p) \cdot \prod_{k=1}^n a_{k,p(k)}$$

a vytýkat prvky a_{ij} z i -tého řádku.

Alternativní (jednodušší) cesta: můžeme využít linearity a i -tý řádek si rozložit jako lineární kombinaci vektorů kanonické báze (e_i):

$$(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,n}) = a_{i,1}(1, 0, \dots, 0) + a_{i,2}(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + a_{i,n}(0, \dots, 0, 1)$$

Determinant $\det(A)$ si pak rozložíme na součet n determinantů, kde v i -tém řádku je vektor kanonické báze e_j (taková matice buď např. $B_{i,j}$):

$$\det(A) = a_{i,1} \det(B_{i,1}) + \cdots + a_{i,n} \det(B_{i,n})$$

Posuneme si náš “jednotkový” řádek na nejvyšší pozici:

$$\det(B_{i,j}) = (-1)^{i-1} \det(B_{1,j})$$

Nyní si sloupec s jedničkou posuneme do prvního sloupce:

$$\det(B_{1,j}) = (-1)^{i-1} (-1)^{j-1} \det(B_{1,1})$$

Inu a odmyslíme-li si první řádek a první sloupec, zbude nám matice A_{ij} :

$$\det(B_{1,j}) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Q.E.D.

Definice:

Pro čtvercovou matici A definujeme **adjungovanou matici** $\text{adj}(A)$ předpisem

$$(\text{adj}(A))_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$$

(Pozor na obrácené pořadí A_{ji} !)

VĚTA (o vztahu inverzní a adjungované matice):

Pro každou regulární matici A nad tělesem T platí

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$$

DŮKAZ:

Podívejme se na součin $A \cdot \text{adj}(A)$, konkr. na součin řádků:

$$A_i \cdot \text{adj}(A)_{.i} = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det(A_{ij}) = \det(A)$$

Neboť determinant matice A , kde i -tý řádek je nahrazen j -tým, je nula (jde o singulární matici), platí:

$$A_j \cdot \text{adj}(A)_{.i} = 0$$

$$A \cdot \text{adj}(A) = \det(A) \cdot I_n$$

$$A \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) = I_n$$

Q.E.D.

VĚTA (Cramerovo pravidlo):

Nechť A je regulární matice, potom každé řešení soustavy $Ax = b$ lze zapsat jako

$$x_i = \frac{\det(A_{i \rightarrow b})}{\det(A)}$$

kde $A_{i \rightarrow b}$ je matice, která vznikne z matice A nahrazením i -tého sloupce vektorem b .

DŮKAZ:

$$Ax = b \implies x = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A) \cdot b$$

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{1}{\det(A)} (\text{adj}(A) \cdot b)_i = \frac{1}{\det(A)} \sum_{j=1}^n \text{adj}(A)_{ij} \cdot b_j = \\ &= \frac{1}{\det(A)} \det(A_{i \rightarrow b}) \end{aligned}$$

Q.E.D.

Vlastní čísla a vlastní vektory

Model dynamického systému

Zavedme si jednoduchý (abstraktní) model dynamického systému. Systém budeme reprezentovat jako vektorový prostor V nad T . Dynamiku pak reprezentujeme jako lineární zobrazení $f: V \rightarrow V$, které popisuje přechod mezi dvěma stabilními stavy. **Stabilní stavy** mohou být buď pevné body zobrazení f , nebo “skoro pevné” body (pevné až na skalární násobek).

Příklady:

- (i) **Osová souměrnost v \mathbb{R}^2 :** mějme takové zobrazení f , pak jeho matice je

$$[f]_{kk} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(osa půlí druhý a čtvrtý kvadrant).

Ptáme se: *Které vektory se zachovávají? Které vektory zachovávají směr?* (Tedy až na skalár, včetně záporného, který vytvoří směr opačný.)

- (ii) **Čísla vlastní populací králíků:** Mějme Fibonacciho posloupnost (viz Lineární algebra I nebo kdekoli jinde).

Ptáme se: *Jak se vyvíjí poměr F_t/F_{t-1} ? Má tento trend limitu? Osciluje, nebo pro nějakou volbu velikosti populací zůstává stabilní?*

V řeči matic a vektorových prostorů: Uvažme prostor \mathbb{R}^2 a lineární zobrazení $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dané rekurencí

$$\begin{pmatrix} F_t \\ F_{t-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{t-1} \\ F_{t-2} \end{pmatrix}$$

Stabilní poměr F_t/F_{t-1} mají netriviální vektory $x = \begin{pmatrix} F_t \\ F_{t-1} \end{pmatrix}$ takové, že

$$f(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x = \lambda x$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ (vektory x a λx mají zřejmě tento poměr stejný).

Vlastní čísla

Definice:

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $f: V \rightarrow V$ je lineární zobrazení. Potom $\lambda \in T$ se nazývá **vlastní číslo zobrazení** f , existuje-li nenulový vektor $x \in V$ takový, že $f(x) = \lambda x$. **Vlastní vektor** příslušný vlastnímu číslu λ je libovolné x , pro něž platí $f(x) = \lambda x$.

Je-li $\dim(V)$ konečná, lze zobrazení f reprezentovat maticí (vůči nějaké bázi), tedy lze pojem vlastních čísel a vektorů rozšířit i pro matice $A \in T^{n \times n}$. **Vlastní číslo matice** λ je takové, pro které $\exists x \neq 0$ takové, že $Ax = \lambda x$. **Vlastní vektor** x příslušný λ je takový, že $Ax = \lambda x$. Množina všech vlastních čísel matice se nazývá **stopa**.

Příklady:

(i) Osová souměrnost:

$\lambda_1 = 1$	$\lambda_2 = -1$
$x_1 = (-1, 1)$	$x_2 = (1, 1)$

(ii) Králici:

$\lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ $x = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right)$ (vektor při každé iteraci narůstá)	$\lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ $x = \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}, 1 \right)$ (vektor mění znaménko a blíží se k nulovému vektoru)
--	--

Pozorování: Je-li x vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu λ , je i libovolný skalární násobek x .

VĚTA (o lineární nezávislosti vlastních vektorů):

Mějme lineární zobrazení $f: V \rightarrow V$, navzájem různá vlastní čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ a příslušné vlastní vektory x_1, x_2, \dots, x_k (x_i přísluší λ_i). Potom vektory x_1, \dots, x_k jsou lineárně nezávislé.

DŮKAZ:

Indukcí a sporem:

Nechť v_1, \dots, v_k dávají nejmenší protipříklad, tedy libovolná $(k-1)$ -tice je lineárně nezávislá, ale x_1, \dots, x_k je lineárně závislá: $\exists a_1, \dots, a_k \in T$ netriviální taková, že $a_1x_1 + \dots + a_kx_k = 0$.

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i f(x_i) = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i x_i$$

$$0 = \lambda_k \cdot 0 = \lambda_k \left(\sum_{i=1}^k a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_k x_i$$

$$0 = 0 - 0 = \sum_{i=1}^k a_i \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^k a_i \lambda_k x_i = \sum_{i=1}^k a_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i = \sum_{i=1}^{k-1} a_i (\lambda_i - \lambda_k) x_i$$

To ale znamená, že buď je $x_k = 0$, nebo x_1, \dots, x_{k-1} jsou lineárně závislé. Obojí je...

✘ *Spor*

Důsledek: Čtvercová matice řádu n má nejvýše n různých vlastních čísel, protože T^n má nejvýše n lineárně nezávislých vektorů.

Vlastní čísla matic

Vztah zobrazení $f \leftrightarrow$ matice A není jednoznačný, neboť různé matice A, B mohou odpovídat stejnému zobrazení f (vůči různým bázím X, Y):

$$A = [f]_{XX}, B = [f]_{YY}$$

$$[f]_{XX} = [id]_{YX}[f]_{YY}[id]_{XY}$$

Matice $[id]$ jsou přitom regulární, navíc $[id]_{XY} = [id]_{YX}^{-1}$. Označme $[id]_{XY} = R$, pak

$$A = R^{-1}BR$$

Definice: Čtvercové matice A, B stejného řádu se nazývají **podobné**, pokud existuje regulární matice R taková, že $A = R^{-1}BR$.

VĚTA (o vlastních číslech podobných matic):

Nechť A a B jsou podobné matice (tj. $\exists R : A = R^{-1}BR$), λ je vlastní číslo matice A a x je příslušný vlastní vektor. Potom λ je i vlastní číslo matice B a $y = Rx$ je příslušný vlastní vektor.

DŮKAZ:

$$By = \underbrace{(RAR^{-1})}_B \underbrace{(Rx)}_y = RAx = R(\lambda x) = \lambda(Rx) = \lambda y$$

Q.E.D.

Pozorování: Vlastní čísla diagonální matice $\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ jsou prvky na diagonále (příslušný vlastní vektor $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$).

Definice: Matice A je **diagonalizovatelná**, pokud je podobná nějaké diagonální matici.

Užití diagonalizovatelných matic

Mějme diagonalizovatelnou matici $A = R^{-1}DR$.

(a) Výpočet vlastních čísel a vektorů:

Pokud a_i je i -tý prvek na diagonále v D , potom a_i je i -té vlastní číslo D, A a i -tý sloupec $R = (R \cdot e_i)$ je vlastní vektor matice A .

(b) Výpočet mocnin matic:

$$A^k = \underbrace{R^{-1}DRR^{-1}DR \cdots R^{-1}DR}_{k \times} = R^{-1}D^kR$$

VĚTA (o vztahu vlastních čísel a diagonalizovatelnosti):

Má-li matice $A \in T^{n \times n}$ n navzájem různých vlastních čísel, potom je diagonalizovatelná.

DŮKAZ:

Mějme $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ různých vlastních čísel a x_1, x_2, \dots, x_n lineárně nezávislých vlastních vektorů. Dále mějme regulární čtvercovou matici $\in T^{n \times n}$:

$$R = (x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_n)$$

Všimněme si, že $Ax_i = \lambda_i x_i$. Pak $A \cdot R$ je však matice, kde i -tý sloupec je $\lambda_i x_i$. Platí navíc, že $A \cdot R = R \cdot D$, kde D je diagonální matice mající na diagonále $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Tedy $R^{-1}AR = D$, a proto A je podobná diagonální D (R^{-1} jsem to mohl vynásobit, neboť R je regulární, tedy vektory jsou nezávislé).

Q.E.D.

VĚTA (o vztahu vlastních vektorů a diagonalizovatelnosti):

Matice $A \in T^{n \times n}$ je diagonalizovatelná, právě když má n lineárně nezávislých vlastních vektorů.

DŮKAZ:

“ \Rightarrow ”

Existuje regulární R , tedy $R^{-1}AR = D$. $AR = RD$, sloupce R tvoří vlastní vektory. Protože R je regulární, vektory jsou lineárně nezávislé.

“ \Leftarrow ”

Z vlastních vektorů sestavím R , pak $R^{-1}AR = D$.

Q.E.D.

Charakteristický mnohočlen

Definice:

Nechť A je čtvercová matice řádu n nad tělesem T , potom **charakteristický mnohočlen** (v proměnné t) je definován předpisem

$$p_A(t) = \det(A - tI)$$

Vždy jde o polynom v t stupně n .

VĚTA (o vztahu charakteristických mnohočlenů a vlastních čísel):

Pro každou čtvercovou matici A platí, že λ je vlastní číslo matice A , právě když λ je kořenem charakteristického mnohočlenu matice A .

DŮKAZ:

λ je vlastní číslo matice A , právě když existuje netriviální $x : Ax = \lambda x$, tedy:

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda I)x = 0$$

To platí, právě když matice této soustavy $A - \lambda I$ je singulární, což ovšem znamená, že

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$p_A(\lambda) = 0$$

Q.E.D.

Příklady:

(i) Mějme osovou souměrnost $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} -t & -1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} = t^2 - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 1$$

(ii) Mějme Fibonacciho posloupnost $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$:

$$p_A(t) = t^2 - t - 1$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

(iii) Mějme matici otočení (o 90°) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$p_A(t) = t^2 + 1$$

Řešením nejsou žádná vlastní čísla v \mathbb{R} , zato v \mathbb{C} existují vlastní čísla

$$\lambda_{1,2} = \pm i$$

VĚTA (o charakteristických polynomech podobných matic):

Podobné matice mají shodné charakteristické polynomy (silnější vlastnost, než že matice mají stejná vlastní čísla).

DŮKAZ:

$$A = R^{-1}BR$$

$$\begin{aligned} p_A(t) &= \det(A - tI) = \det(R^{-1}BR - tR^{-1}IR) = \det(R^{-1}(B - tI)R) = \\ &= \det(R^{-1}) \det(B - tI) \det(R) = \det(B - tI) = p_B(t) \end{aligned}$$

neboť $\det(R^{-1}) \det(R) = \det(I) = 1$.

Q.E.D.

Pozorování:

Mějme $I, J, K, L, P, Q, R, S \in T^{n \times n}$:

$$\begin{aligned} &\underbrace{\begin{pmatrix} I & J \\ K & L \end{pmatrix}}_{\in T^{2n \times 2n}} \underbrace{\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix}}_{\in T^{2n \times 2n}} \\ &= \begin{pmatrix} IP + JR & IQ + JS \\ KP + LR & KQ + LS \end{pmatrix} \end{aligned}$$

VĚTA (o vztahu řádu matice a vlastních čísel součinů matic):

Pro čtvercové matice A a B stejného řádu mají matice AB a BA stejná vlastní čísla.

Cvičení: Dokažte, že toto jednoduše platí, je-li A nebo B regulární.

DŮKAZ:

(Nyní dokazujeme větu i pro singulární A, B .)

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & ABA \\ B & BA \end{pmatrix}$$

Dále víme, že $\begin{pmatrix} I & A \\ 0 & I \end{pmatrix}$ je regulární, tudíž matice

$$\begin{pmatrix} AB & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & BA \end{pmatrix}$$

si jsou podobné a mají tedy stejný charakteristický polynom:

$$\det \begin{pmatrix} AB - tI & 0 \\ B & -tI \end{pmatrix} = (-t)^n \det(AB - tI) = (-t)^n p_{AB}(t)$$

První rovnost platí, neboť jeden kvadrant je nulový, tedy si musíme brát prvky z kvadrantu s $-tI$ (to je ono $(-t)^n$), a ostatní nutně musíme brát z $AB - tI$, abychom zachovali permutaci.

Stejně i pro druhou matici

$$\det \begin{pmatrix} -tI & 0 \\ B & BA - tI \end{pmatrix} = (-t)^n \det(BA - tI) = (-t)^n p_{BA}(t)$$

Tedy díky rovnosti oněch matic platí

$$(-t)^n p_{AB}(t) = (-t)^n p_{BA}(t)$$

Q.E.D.

VĚTA (Cayley–Hamilton):

Nechť $A \in T^{n \times n}$ a

$$p_A(t) = (-1)^n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$$

je její charakteristický polynom. Potom platí

$$(-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I = 0$$

Cvičení: Ukažte, že tato věta platí pro diagonalizovatelné matice.

DŮKAZ:

Využijme faktu, že

$$M \operatorname{adj}(M) = \det(M)I$$

a dosadíme za $M = A - tI$. Pak prvky matice $\operatorname{adj}(A - tI)$ jsou polynomy stupně $\leq n - 1$ v t (plyne z definice $\operatorname{adj}(M)$ pomocí minorů).

$$\operatorname{adj}(A - tI) = t^{n-1} B_{n-1} + t^{n-2} B_{n-2} + \dots + t B_1 + B_0 \quad B_{n-1}, \dots, B_0 \in T^{n \times n}$$

$$\begin{aligned} (A - tI)(t^{n-1} B_{n-1} + t^{n-2} B_{n-2} + \dots + t B_1 + B_0) &= \det(A - tI)I = \\ &= p_A(t)I = (-1)^n t^n I + a_{n-1} t^{n-1} I + \dots + a_1 t I + a_0 I \end{aligned}$$

Jaké dostaneme koeficienty?

t^n	$-B_{n-1} = (-1)^n I$	$/ \cdot A^n$ zleva
$t^i, 1 \leq i \leq n - 1$	$AB_i - B_{i-1} = a_i I$	$/ \cdot A^i$ zleva
t^0 (abs. člen)	$AB_0 = a_0 I$	

Sečteme:

$$\begin{aligned} -A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + A^{n-2}(AB_{n-2} - B_{n-3}) + \dots + A(AB_1 - B_0) + AB_0 &= \\ &= (-1)^n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 I \end{aligned}$$

Ale zároveň se vše vzájemně vykrátí tak, že:

$$-A^n B_{n-1} + A^{n-1}(AB_{n-1} - B_{n-2}) + \dots + A(AB_1 - B_0) + AB_0 = 0$$

Q.E.D.

Vlastní čísla a matice v \mathbb{C}

\mathbb{C} je algebraicky uzavřené těleso, tedy se dají nalézt kořeny polynomů.

Základní věta algebry

Každý polynom stupně ≥ 1 má ≥ 1 kořen v tělese \mathbb{C} .

Důsledek:

Každý polynom $p(t)$ stupně $n \geq 1$ nad \mathbb{C} lze rozložit na součet n monomů

$$p(t) = a_n(t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \cdots (t - \lambda_n)$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ jsou kořeny.

Proč by to mělo platit? $p(t)/(t - \lambda)$ musí být nutně polynom stupně $n - 1$ a λ_i je kořen $p(t)$, jehož existenci dává základní věta algebry.

Postupně takto dělíme, a pokud by na konci zůstalo něco jiného než 0, tak nemohly být λ_i kořeny.

Nástin důkazu

Mějme

$$p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \cdots + a_1 t + a_0$$

a bez újmy na obecnosti předpokládejme $a_n \neq 0$, $a_0 \neq 0$.

Jak se $p(t)$ chová?

(i) $|t| \rightarrow 0 : p(t) \cong a_1 t + a_0$ (předpokládáme-li $a_1 \neq 0$)

(ii) $|t| \rightarrow \infty : p(t) \cong a_n t^n$

Jak graficky vypadá obraz komplexní kružnice o poloměru $r : D_r := \{t : |t| = r\}$?

(i) $|t| \rightarrow 0 : p(D_r)$ je malý komplexní kroužek okolo a_0

(ii) $|t| \rightarrow \infty : p(D_r)$ obraz se n -krát ovine okolo nuly

Topologický argument: Pro $t \rightarrow \infty$ je počátek uvnitř obrazu kružnice a pro $t \rightarrow 0$ je vně. Tedy pokud spojitě přechází z extrému do extrému, tak tu nulu někdy musí "trefit".

Důsledek: Nechť A je komplexní čtvercová matice řádu n . Potom lze psát

$$p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1} (\lambda_2 - t)^{r_2} \cdots (\lambda_k - t)^{r_k}$$

kde $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ jsou různá vlastní čísla a r_i je tzv. algebraická násobnost vlastního čísla: $\sum_{i=1}^k r_i = n$.

Pozorování:

(i) $a_0 = \det A = \prod_{i=1}^k \lambda_i^{r_i}$

Dosadíme $t = 0$ do charakteristického polynomu a do jeho alternativního zápisu z předchozího důsledku:

$$p_A(t) = \det(A - tI)$$

- (ii) $a_n = (-1)^n \quad a_{n-1} = (-1)^n(r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 + \dots + r_k\lambda_k) = (A_{1,1} + A_{2,2} + A_{3,3} + \dots + A_{n,n})$
- (1) $p_A(t) = (\lambda_1 - t)^{r_1}(\lambda_2 - t)^{r_2} \dots (\lambda_k - t)^{r_k}$
 Z tohoto rozvoje mohou určit koeficient t^{n-1} : z $n-1$ závorek vždy vezmu t a z té zbývající λ .
- (2) $p_A(t) = \det(A - tI)$
 Jedině permutace, která je identitou (tedy provede vynásobení po diagonále), může dát polynom v t stupně $\geq n-1$.
 Tato permutace dá součin $(A_{1,1} - t)(A_{2,2} - t) \dots (A_{n,n} - t)$ a koeficient tedy bude opět (stejným způsobem jako v (1)) součet prvků na diagonále.

Tvrzení:

Čtvercová komplexní matice A je diagonalizovatelná, právě když

$$\forall \lambda_i : \text{rank}(A - \lambda_i I) = \text{rank}(A) - r_i$$

DŮKAZ:

A je diagonalizovatelná, tedy existuje báze \mathbb{C}^n složená z vlastních vektorů. Tuto bázi však můžeme rozložit na k bází v prostoru $\text{Ker}(A - \lambda_i)$, kde každá je o dimenzi r_i .
Q.E.D.

Příklad:

Matice, která nelze diagonalizovat:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda_{1,2} = 1$$

Jordanův normální tvar matice

Každá komplexní čtvercová matice je podobná matici **T-O-D-O**: nakreslit

Čtvercové oblasti, které mají na diagonále vlastní číslo λ_i obklopené jedničkami, nazýváme **Jordanovy buňky**.

Hermitovská matice

Definice:

Nechť A je komplexní čtvercová matice. Potom matici A^H , pro kterou platí

$$(A^H)_{ij} = \overline{a_{ji}}$$

nazýváme **hermitovská transpozice** matice A .

Pozn.: Někdy se značí také A a k tomu se ještě někdy nazývá *konjugovaná matice*.

Pozorování:

$$(AB)^H = B^H A^H$$

(Důkaz je obdobný jako pro obyčejnou transpozici.)

Pozorování:

Pro standardní skalární součin nad \mathbb{C} platí

$$\langle x|y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i} = y^H x$$

Vezměme prostor nad \mathbb{C} konečné dimenze $n \cong \mathbb{C}^n$ a orthonormální bázi u_i vůči standardnímu skalárnímu součinu:

$$A = (u_1 \quad u_2 \quad \cdots \quad u_n)$$

Potom nutně platí

$$A^H A = I$$

Definice: Komplexní čtvercová matice A se nazývá **hermitovská**, platí-li $A^H = A$, a **unitární**, platí-li $A^H A = I$.

Pozn.: Interpretace v \mathbb{R} : Hermitovská matice odpovídá symetrické matici $A^T = A$, zatímco unitární matice odpovídá orthogonální matici $A^T = A^{-1}$.

VĚTA (o diagonalizaci hermitovské matice):

Každá hermitovská matice A má všechna vlastní čísla reálná a dokonce existuje unitární matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonální.

Pozn.: Podobná věta platí i pro širší třídu matic, tzv. *normální matice* $A^H A = A A^H$.

DŮKAZ:

Indukcí podle n — řádu matice. Pro $n = 1$ triviálně platí, nechť tedy platí pro $1, 2, \dots, n - 1$:

Víme, že existuje vlastní číslo λ a příslušný vlastní vektor $x \in \mathbb{C}$. Podle Steinitzovy věty o výměně můžeme doplnit x na orthonormální bázi prostoru \mathbb{C}^n . Bez újmy na obecnosti tedy nechť $\|x\| = 1$.

Z vektorů této báze vytvoříme matici P_n , obsahující ve svém sloupcovém prostoru orthonormální bázi \mathbb{C}^n . P_n je unitární, poněvadž standardní skalární součin dvou různých vektorů z orthonormální báze je nulový a součin dvou stejných vektorů je 1. Platí:

$$(P_n^H A_n P_n)^H = P_n^H A_n^H (P_n^H)^H = P_n^H A_n^H P_n$$

Tedy $P_n^H A_n^H P_n$ je hermitovská matice.

Dále mějme matici:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix}$$

Protože tato matice je rovna své hermitovské transpozici, musí platit $\lambda = \overline{\lambda}$, tudíž $\lambda \in \mathbb{R}$.

Z indukčního předpokladu existuje unitární matice R_{n-1} taková, že $R_{n-1}^{-1} A_{n-1} R_{n-1} = D_{n-1}$. Vezměme

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$R_n = P_n \cdot S$$

S i P_n je unitární — je unitární i jejich součin?

$$R_n^H \cdot R_n = (P_n S)^H P_n S = S^H P_n^H P_n S = I$$

Tedy R_n je unitární. Je to ona matice, kterou jsme hledali?

$$\begin{aligned} R_n^{-1} A_n R_n &= (P_n S)^H A_n P_n S = S^H P_n^H A_n P_n S = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{n-1}^H \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & D_{n-1} \end{pmatrix} = D \end{aligned}$$

Q.E.D.

Alternativní cesta k důkazu

(i) Snadno se ukáže, že $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow (Ax)^H = (\lambda x)^H$$

$$(\lambda x)^H = \bar{\lambda} x^H = x^H A^H$$

$$x^H x (\lambda - \bar{\lambda}) = x^H (\lambda - \bar{\lambda}) x = x^H Bx - x^H B^H x = 0$$

Tedy nutně $\lambda = \bar{\lambda}$.

(ii) Různá vlastní čísla znamenají, že příslušné vektory jsou na sebe kolmé.

Nechť λ_1, λ_2 jsou dvě různá vlastní čísla matice A a x_1, x_2 jsou příslušné vlastní vektory. Víme, že $A^H x_1 = \bar{\lambda}_1 x_1$. Potom

$$\lambda_1 x_1^H x_2 = (\bar{\lambda}_1 x_1^H)^H x_2 = (A^H x_1)^H x_2 = x_1^H (Ax_2) = \lambda_2 x_1^H x_2$$

a víme, že $\lambda_1 \neq \lambda_2$, proto $x_1^H x_2 = 0$ a jsou tedy ortogonální.

(iii) Obtížné je ale ukázat, že $\dim(\text{Ker}(A - \lambda_i I)) = r_i$.

Důsledek:

Pro každou symetrickou matici A platí, že všechna její vlastní čísla jsou reálná a navíc existuje ortogonální matice R taková, že $R^{-1}AR$ je diagonalizovatelná.

Pozor, ne každá matice je ortogonální. Je nutno ukázat, že příslušný vlastní vektor x lze vzít reálný. To naštěstí lze:

$$(A - \lambda I)x = 0$$

To je soustava lineárních rovnic s reálnou singulární maticí, tedy musí existovat netriviální řešení a tak můžeme zůstat v tělese \mathbb{R} .

Příklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix}$$

$$p_A(t) = t^2 - 3t \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3$$

$$R = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1-i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \text{ unitární}$$

$$R^H = R^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

$$R^{-1}AR = R^H AR = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Vztah hermitovské transpozice a skalárního součinu**Pozorování:**

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem konečné dimenze a $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je jeho orthogonální báze. Potom:

$$\forall u, v \in V : \langle u|v \rangle = \sum_{i=1}^n \langle u|x_i \rangle \langle x_i|v \rangle = [v]_x^H [u]_x$$

DŮKAZ:

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \quad \alpha_i = \langle u|x_i \rangle = ([u]_x)_i$$

$$v = \sum_{i=1}^n \beta_i x_i \quad \beta_i = \langle v|x_i \rangle = ([v]_x)_i$$

$$\langle x_i|v \rangle = \overline{\beta_i}$$

$$\langle u|v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \middle| \sum_{j=1}^n \beta_j x_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta_j} \langle x_i|x_j \rangle$$

$$i \neq j \Rightarrow \langle x_i|x_j \rangle = 0$$

$$i = j \Rightarrow \langle x_i|x_j \rangle = 1$$

Q.E.D.

Tvrzení:

Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem konečné dimenze a $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ je jeho orthonormální báze. Nechť dále $f: V \rightarrow V$ je lineární zobrazení.

Potom platí, že f zachovává skalární součin, tj.

$$\langle u|v \rangle = \langle f(u)|f(v) \rangle$$

a to, právě když je matice zobrazení $[f]_{XX}$ unitární.

DŮKAZ:

$$\langle u|v \rangle = [v]_X^H [u]_X$$

$$\langle f(u)|f(v) \rangle = [f(v)]_X^H [f(u)]_X = ([f]_{XX} [v]_X)^H [f]_{XX} [u]_X = [v]_X^H [f]_{XX}^H [f]_{XX} [u]_X$$

To však může platit, pouze pokud $[f]_{XX}^H [f]_{XX} = I$, jinak $\exists u, v \in V$ takové, že se rovnost poruší. Tedy $[f]_{XX}$ musí být unitární.

Q.E.D.

Pozitivně definitní matice

Jak se chová skalární součin vůči orthonormální bázi víme. Otázka však zní, jak se chová vůči libovolné bázi. Odpověď? Překvapivě i v tomto případě lze vyjádřit maticovým součinem.

Pozorování:

Nechť $V \cong \mathbb{C}^n$ je prostor se skalárním součinem. Potom existuje matice E taková, že $\langle u|v \rangle = v^H E u$ pro libovolné aritmetické vektory $u, v \in \mathbb{C}$.

DŮKAZ:

Vezměme kanonickou bázi \mathbb{C}^n : e_1, e_2, \dots, e_n

$$u := (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$v := (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\langle u|v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n u_i e_i \middle| \sum_{j=1}^n v_j e_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \overline{v_j} \langle e_i|e_j \rangle$$

Definujme tedy matici $(E)_{ij} = \langle e_i|e_j \rangle$:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n u_i \overline{v_j} \langle e_i|e_j \rangle = v^H E u$$

Q.E.D.

Poznámky:

Pokud $\langle u|v \rangle = \overline{\langle v|u \rangle}$, matice E musí být hermitovská.

Pokud $\langle u|u \rangle \geq 0$ a $\langle u|u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$, matice E musí být pozitivně definitní.

Definice:

Splňuje-li hermitovská matice A řádu n podmínku

$$\forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0 : x^H A x > 0$$

potom řekneme, že matice A je **pozitivně definitní**.

Pokud je splněna alespoň podmínka

$$\forall x \in \mathbb{C}^n : x^H A x \geq 0$$

tak nazveme matici A **pozitivně semidefinitní**.

Obdobně máme matice **negativně (semi)definitní** a **indefinitní** (neplatí-li ani jedno).

Pozn.: Pozitivně definitní matice indikují lokální minimum, v matematické analýze se proto uplatňují při vyšetřování extrémů funkce více proměnných.

VĚTA (hermitovská matice a pozitivní definitnost):

Pro hermitovskou matici A jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) A je pozitivně definitní
- (ii) A má všechna vlastní čísla kladná
- (iii) k A existuje regulární matice U taková, že $A = U^H U$

DŮKAZ:

(1 \Rightarrow 2) Mějme vlastní číslo λ a příslušný vlastní vektor x :

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x \\ x^H Ax &= x^H \lambda x \\ x^H Ax &= \lambda x^H x \end{aligned}$$

Z předpokladu víme, že A je pozitivně definitní ($x^H Ax > 0$), tedy $x^H x$ je součin komplexně sdružených nenulových čísel, což musí být kladné reálné číslo, a proto nutně $\lambda > 0$.

(2 \Rightarrow 3) Matice A je hermitovská, tedy

$$\exists R : R^H DR$$

kde R je unární a D diagonální. Na diagonále má přitom vlastní čísla, která jsou kladná. Zvolme \tilde{D} tak, že $\tilde{D}_{ii} = \sqrt{D_{ii}}$. Potom

$$\begin{aligned} D &= \tilde{D}^H \cdot \tilde{D} \\ A &= R^H \tilde{D}^H \tilde{D} R \\ U &= \tilde{D} R \end{aligned}$$

a U je regulární, neboť R i \tilde{D} jsou regulární.

(3 \Rightarrow 1) Snadno odvodíme:

$$x^H Ax = x^H U^H U x = \underbrace{(Ux)^H}_{\neq 0} \underbrace{(Ux)}_{\neq 0} > 0$$

Q.E.D.

Tvrzení (Choleského rozklad):

Pro pozitivně definitní matici A existuje trojúhelníková matice U taková, že

$$A = U^H U$$

DŮKAZ:

Vynecháme. Důkaz by byl jen adaptací důkazu tvrzení, že “ A je hermitovská \Rightarrow existuje unitární $R : A = R^H DR$ ”. Jen by se muselo věnovat trochu úsilí při sestavování matice tak, aby byla trojúhelníková a dalšími operacemi se tento stav neporušil.

Algoritmus pro nalezení rozkladu

Vstup: Hermitovská matice A

Výstup: Choleského rozklad $U : U^H U = A$ nebo odpověď, že A není pozitivně definitní

(i) Pro $i = 1$ až n proved

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} \overline{u_{ki}}}$$

(pokud $u_{ii} \in \mathbb{R}$ neexistuje, A není pozitivně definitní).

(ii) Pro $j = i + 1$ až n proveď

$$u_{ij} = \frac{1}{u_{ii}} \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{kj} \overline{u_{ki}} \right)$$

DŮKAZ:

Není složitý, lze poměrně snadno “zpětně” odvodit z násobení matic.
Q.E.D.

Tvrzení (Jacobiho pravidlo):

Hermitovská matice A řádu n je pozitivně definitní právě tehdy, když determinanty matic $A_0, A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ jsou kladné (A_i značí matici vzniklou z A umazáním posledních i řádků a sloupců).

Důkaz: Složitý, neveden. *Q.E.D.*

Tvrzení:

Mějme blokovou matici A definovanou jako

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & a^H & \cdots \\ \vdots & & & \\ a & & \tilde{A} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Bloková matice A je pozitivně definitní, právě když $\alpha > 0$ a $\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a \cdot a^H$ je pozitivně definitní.

DŮKAZ:

“ \Leftarrow ”

Nechť $x \in \mathbb{C}^n$ (libovolný netriviální):

$$\begin{aligned} x^H A x &= (\overline{x_1} \quad \cdots \quad \tilde{x}^H \quad \cdots) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \cdots & a^H & \cdots \\ \vdots & & & \\ a & & \tilde{A} & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \tilde{x} \\ \vdots \end{pmatrix} = \\ &= \alpha x_1 \overline{x_1} + x_1 \tilde{x}^H a + \overline{x_1} a^H \tilde{x} + \tilde{x}^H \tilde{A} \tilde{x} - \tilde{x}^H \frac{1}{\alpha} a a^H \tilde{x} + \tilde{x}^H \frac{1}{\alpha} a a^H \tilde{x} = \\ &= \alpha x_1 \overline{x_1} + x_1 \tilde{x}^H a + \overline{x_1} a^H \tilde{x} + \tilde{x}^H \frac{1}{\alpha} a a^H \tilde{x} + \tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \right) \tilde{x} = \\ &= \underbrace{\tilde{x}^H \left(\tilde{A} - \frac{1}{\alpha} a a^H \right) \tilde{x} + \overbrace{\left(\sqrt{\alpha} \overline{x_1} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \tilde{x}^H a \right) \left(\sqrt{\alpha} x_1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} a^H \tilde{x} \right)}^{\text{komplexně sdružená čísla}}}_{\text{vždy je jeden z výrazů } > 0, \text{ neboť } x \text{ je netriviální}} > 0 \end{aligned}$$

“ \Rightarrow ”

Ukáže se stejně volbou

$$x_1 = -\frac{1}{\alpha} a^H \tilde{x} \quad (\langle \text{cvičení} \rangle)$$

Q.E.D.

Formy

Mějme lineární zobrazení $f: V \rightarrow V$, kde $\dim V < \infty$. Pak se dá najít matice zobrazení taková, že volbou vhodné báze získáme diagonální matici.

Mějme dále skalární součin $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ (nebo obecně $\rightarrow T$), kde $\dim V < \infty$. Pak se dá najít “matice součinu” (pozitivně definitní matice) taková, že volbou vhodné báze získáme pěknou matici.

Definice:

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T a $f: V \times V \rightarrow T$ je zobrazení takové, které je lineární v první složce:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, \forall \alpha \in T : f(\alpha u, v) &= \alpha f(u, v) \\ \forall u_1, u_2, v \in V : f(u_1 + u_2, v) &= f(u_1, v) + f(u_2, v) \end{aligned}$$

i ve druhé složce:

$$\begin{aligned} \forall u, v \in V, \forall \beta \in T : f(u, \beta v) &= \beta f(u, v) \\ \forall u, v_1, v_2 \in V : f(u, v_1 + v_2) &= f(u, v_1) + f(u, v_2) \end{aligned}$$

Potom f nazýváme **bilineární formou** na V .

Bilineární forma je **symetrická**, platí-li

$$\forall u, v \in V : f(u, v) = f(v, u)$$

Zobrazení $g: V \rightarrow T$ nazýváme **kvadratickou formou**, pokud $g(v) = f(v, v)$ pro nějakou bilineární formu f na V .

Definice:

Nechť V je vektorový prostor nad tělesem T konečné dimenze a $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ je jeho báze. Potom pro kvadratickou formu $g: V \rightarrow T$ definujeme **matici B formy g** předpisem

$$b_{ij} = f(v_i, v_j)$$

kde f je symetrická (tzv. *polární*) bilineární forma vytvářející formu g .

Pozorování:

Pro každou kvadratickou formu existuje polární forma, která ji definuje.

Bilineární formy na vektorových prostorech konečné dimenze se počítají jako maticové součiny

$$v^T A u$$

(kde A je čtvercová matice).

Jak se s maticí formy počítá?

$$u \in V, [u]_X = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) : u = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

$$g(u) = f(u, u) = f\left(\sum \alpha_i v_i, \sum \alpha_j v_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \cdot f(v_i, v_j) = [u]_X^T \cdot B \cdot [u]_X$$

Definice:

Analytické vyjádření kvadratické formy $g: V \rightarrow T$ vůči konečné bázi X je funkce

$$g: T^n \rightarrow T$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n a_{ij} x_i x_j$$

kde koeficienty a_{ij} jsou odvozeny z matice B formy g vůči bázi X předpisem

$$a_{ij} = 2b_{ij} \quad i \neq j \wedge a_{ii} = b_{ii}$$

Příklady:

- (i) Kvadratická forma $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ daná maticí $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$ vůči kanonické bázi K .

Analytické vyjádření téže formy:

$$g_1(x_1, x_2) = 6x_1x_2 - 3x_2^2$$

- (ii) Kvadratická forma $g_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ daná maticí $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ vůči kanonické bázi K .

Analytické vyjádření téže formy:

$$g_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 + 3x_3^2$$

LEMMA:

Nechť B je matice kvadratické formy $g: V \rightarrow T$ vůči bázi X , potom

$$B' = [id]_{YX}^T \cdot B \cdot [id]_{YX}$$

je maticí formy g vůči bázi Y .

DŮKAZ:

$$[u]_X = [id]_{YX} \cdot [u]_Y$$

$$\begin{aligned} g(u) &= [u]_X^T \cdot B \cdot [u]_X = ([id]_{YX} \cdot [u]_Y)^T \cdot B \cdot [id]_{YX} \cdot [u]_Y = \\ &= [u]_Y^T \cdot \underbrace{[id]_{YX}^T \cdot B \cdot [id]_{YX}}_{\text{matice formy } g \text{ vůči } Y} \cdot [u]_Y \end{aligned}$$

Q.E.D.

VĚTA (Sylvesterův zákon setrvačnosti kvadratických forem):

Platí pouze pro $T = \mathbb{R}$!

Nechť V je vektorový prostor konečné dimenze nad \mathbb{R} a $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ je kvadratická forma. Potom existuje báze X prostoru V taková, že matice B formy g vůči X je diagonální, a navíc

$$\forall i : b_{ii} \in \{-1, 0, 1\}$$

Navíc počet kladných prvků na diagonále nezáleží na volbě X (a je pro všechny takové vhodné báze stejný).

Pozn.: Vektoru $(\# +1, \# -1, \# 0)$ se říká **signatura formy**.

Zákon setrvačnosti tedy říká, že signatura formy dané formy je stejná a nelze změnit volbou jiné báze.

DŮKAZ:

(a) existence: Mám libovolnou bázi X_0 a symetrickou matici B_0 . Pak

\exists unitární $R : R^{-1} \cdot B_0 \cdot R$ je diagonální

(unitární je taková R , že $R^{-1} = R^T$).

$$R^{-1} \cdot B_0 \cdot R = R^T \cdot B_0 \cdot R = D$$

Nadefinuji \tilde{D} diagonální:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_{ii} &= \sqrt{|\alpha_{ii}|} \\ D &= \tilde{D}^T \cdot B \cdot \tilde{D} \end{aligned}$$

Hledaná matice bude mít:

- na diagonále 0, pokud v D bylo vl. číslo = 0
- na diagonále 1, pokud v D bylo vl. číslo > 0
- na diagonále -1, pokud v D bylo vl. číslo < 0

$$B_0 = (\tilde{D} \cdot R^T)^T \cdot B \cdot \tilde{D} \cdot R^T$$

kde $\tilde{D} \cdot R^T$ je regulární matice, konkrétně matice přechodu od báze X_0 k X .

(b) jednoznačnost: *Nezkouší se.*

Bez újmy na obecnosti nechť B je regulární. Dokazují fakt, že pro libovolnou symetrickou B a libovolnou regulární R mají matice B a $R^T \cdot B \cdot R$ stejnou signaturu (stačí stejný počet kladných vlastních čísel).

Mám danou $R = R_0$. Provedu Gramm–Smidthovu ortogonalizaci a získám R_1 unitární. To si však představím jako spojitý proces — získám R_s pro $s = [0, 1]$. Všechny tyto matice jsou regulární, vlastní čísla se však mění spojitě; nikdy proto nemohou projít nulou, a tedy počet kladných a záporných čísel se tímto procesem nezmění.

Q.E.D.

Příklad:

“Diagonalizace” kvadratické formy: Mějme kvadratickou formu $g_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ danou maticí

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

vůči kanonické bázi K .

Matice téže formy vůči bázi $X = \{(2/3, 1/3)^T, (-1/3, 1/3)^T\}$:

$$B' = [id]_{XK}^T \cdot B \cdot [id]_{XK} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Analytické vyjádření B' je pak:

$$g(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

Lineární programování

Čokoládovna vyrábí pět druhů výrobků. Spotřebává tři základní suroviny: tuk, kakao a cukr, jež jsou k dispozici v omezených množstvích 1500 kg, 300 kg a 450 kg na den. Spotřeba surovin odbytové ceny v Kčs / 1 kg jednotlivých druhů cukrovinek je uvedena v tabulce:

Surovina	Želé v čokoládě	Marokánky	Čokoládová zrna	Indiánky	Věnečky
Tuk		0.4	0.3	0.6	0.6
Kakao	0.05	0.2	0.1	0.1	
Cukr	0.1	0.2	0.2	0.1	0.2
Cena v Kčs / 1 kg	20,-	120,-	100,-	140,-	40,-

Matematická formulace:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad 20x_1 + 120x_2 + 100x_3 + 140x_4 + 40x_5 \\
 & \quad \quad \quad 0 + 0.4x_2 + 0.3x_3 + 0.6x_4 + 0.6x_5 \leq 1500 \\
 & \quad \quad \quad 0.05x_1 + 0.2x_2 + 0.1x_3 + 0.1x_4 + 0 \leq 300 \\
 & \quad \quad \quad 0.1x_1 + 0.2x_2 + 0.2x_3 + 0.1x_4 + 0.2x_5 \leq 450 \\
 & \quad \quad \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

Úloha lineárního programování: Snažíme se optimalizovat hodnotu *lineární* účelové funkce přes prostor řešení vymezených *lineárními* podmínkami.

Lineární účelová funkce:

$$\max c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

kde x_1, \dots, x_n jsou proměnné a $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

Lineární podmínky:

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1 \\
 &\vdots \\
 a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m
 \end{aligned}$$

$$\forall i : 1 \leq i \leq m, \forall j : 1 \leq j \leq n$$

$$a_{ij} \in \mathbb{R}, b_i \in \mathbb{R}$$

Definice:

Úloha lineárního programování ve **standardním tvaru** zní:

Nalezněte vektor $x \in \mathbb{R}^n$, jež maximalizuje účelovou funkci $c^T x$ za podmínky

$$Ax \leq b$$

(kde “ \leq ” je uspořádání vektorů po složkách), kde $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Každý vektor x , jež splňuje $Ax \leq b$, nazveme **přípustné řešení**. **Optimální řešení** je takové přípustné řešení x^* , kde pro každé přípustné řešení x platí $c^T x \leq c^T x^*$.

Geometrická interpretace

Jedna podmínka určuje *poloprostor* v \mathbb{R}^n . Všechny podmínky dohromady pak určují průnik těchto poloprostorů, který označujeme jako *simplex*.

Účelová funkce udává roviny se stejnou normálou. Tato normála určuje **gradient** (neboli směr), ve kterém se snažíme maximalizovat nebo minimalizovat.

Obor hodnot

Budeme uvažovat pouze \mathbb{R} . Každopádně však potřebujeme uspořádané těleso, nepřipadá proto v úvahu \mathbb{C} ani \mathbb{Z}_p . Na druhou stranu řešení v \mathbb{Q} projde stejně jako v \mathbb{R} .

Uvažuje se též obor \mathbb{Z} , pak dostaneme úlohy **celočíslného programování** (ILP). Narozdíl od klasického lineárního programování však jde o těžké úlohy!¹

Jaký je rozdíl mezi LP a ILP? Uvažujme n proměnných x_1, \dots, x_n :

$$\begin{aligned} & \max x_1 + \dots + x_n \\ & \forall i = 1, \dots, n : 0 \leq x_i \leq 1 \\ & \forall i \neq j : x_i + x_j \leq 1 \end{aligned}$$

V LP můžou proměnné nabývat $x_i \in [0, 1]$, optimum lze získat např. $n/2$, $x_i = 1/2$. Zato v ILP proměnné nabývají $x_i \in \{0, 1\}$, optimum je např. $x_1 = 1$ a ostatní $x_i = 0$.

Pomocí ILP lze zformulovat například úlohu nalezení největší nezávislé množiny² v grafu $G = (V, E)$. Za každý vrchol vezmu proměnnou $x_i : 0 \leq x_i \leq 1$ a za každou hranu (i, j) dám podmínku $x_i + x_j \leq 1$. Např. pro cestu 1 – 2 – 3 nalezneme

$$x^* = (1, 0, 1)^T$$

Lze však dokázat, že nezávislost v grafu je NP-úplná úloha. Tedy nutně i ILP je NP-úplně těžké. Na druhou stranu LP je P snadné.

Řešení úloh lineárního programování

(i) Úloha nemá řešení, protože nemá žádné přípustné řešení:

$10 \leq x_1, x_2$
$x_1 + x_2 \leq 19$
$\max x_1 + x_2$

(ii) Úloha nemá řešení, protože hodnota účelové funkce je neomezená:

$0 \leq x_1, x_2$
$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 1$
$\max x_1 + x_2$

(To, že je simplex neomezený, však neznamená automaticky, že úloha nemá optimální řešení; např. $\min x_1 + x_2$ v předchozím případě.)

(iii) Optimum je jednoznačné.

(iv) Úloha má nekonečně mnoho optimálních řešení:

$0 \leq x_1, x_2 \leq 2$
$-1 \leq x_1 - x_2 \leq 1$
$\max x_1 + x_2$

¹ Geometricky nám totiž \mathbb{Z}^n vytvoří jakési mřížové body. Optimální řešení ILP proto nemusí ležet na hranici simplexu, a nemusí to být ani mřížový bod nejbližší optimu (pokud ve směru gradientu leží v simplexu nějaký mřížový bod dále). Dokonce nemusí optimální řešení existovat vůbec, přestože odpovídající úloha LP má optimum (vyhýbá-li se mřížovým bodům).

² Nezávislá množina je taková množina vrcholů, kde žádné dva nejsou spojeny hranou.

Variety úloh lineárního programování

- (i) $\min c^T x \Leftrightarrow \max(-c^T x)$
- (ii) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \geq b_1$
 $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n \leq -b_1$
- (iii) $a_i^T x = b_i \Leftrightarrow a_i^T x \leq b_i \wedge a_i^T x \geq b_i$
- (iv) $Ax = b$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\geq b_1 & x_{n+1} &\geq 0 \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \end{aligned}$$

- (v) Chceme $x_1 \geq 0$. Zavedeme $x_i = x'_i - x''_i$, kde $x'_i, x''_i \geq 0$, a budeme tento výraz při řešení používat místo x_i .

Definice:

Množina $V \subseteq \mathbb{R}^n$ je **konvexní**, pokud pro $\forall u, v \in V$ platí

$$\{\alpha u + (1 - \alpha)v : \alpha \in [0, 1]\} \supseteq V$$

(tedy spojím-li libovolné dva body množiny úsečkou, celá tato úsečka leží uvnitř množiny).

Pozorování: Průnik dvou konvexních množin je konvexní množina.

Důkaz: Mějme konvexní V_1, V_2 a $u, v \in V_1 \cap V_2$. u, v jsou ve V_1 i ve V_2 spolu se svými úsečkami, tedy jsou tyto úsečky i ve $V_1 \cap V_2$. *Q.E.D.*

Pozorování: Množina přípustných řešení $Ax \leq b$ je konvexní množina.

Důkaz: Množina přípustných řešení je průnikem poloprostorů, tj. průnikem konvexních množin. *Q.E.D.*

Pozorování: Množina optimálních řešení $Ax \leq b, \max c^T x$, je konvexní množina.

Důkaz: Mějme jakékoliv dvě optimální řešení x^*, x^{**} . Tedy $c^T x^* = c^T x^{**}$. Vezměme $\alpha \in [0, 1]$ a uvažujme

$$x' = \alpha x^* + (1 - \alpha)x^{**}$$

Pak x' je přípustné, to plyne z předchozího pozorování (x^* a x^{**} jsou přípustná). Zároveň však $c^T x' = c^T x^*$, neboť

$$c^T(\alpha x^* + (1 - \alpha)x^{**}) = \alpha c^T x^* + (1 - \alpha)c^T x^{**} = \alpha c^T x^* + (1 - \alpha)c^T x^* = c^T x^*$$

Q.E.D.

Definice:

Konvexní obal $K(X)$ množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je průnik všech konvexních množin v \mathbb{R}^n obsahujících X :

$$K(x) = \bigcap_{\substack{X \subseteq V \\ V \text{ konv.}}} V$$

Konvexní kombinací $u_1, u_2, \dots, u_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme $v \in \mathbb{R}^n$, existují-li

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 : v = \sum_{i=1}^k \alpha_i u_i$$

VĚTA (o vztahu konvexního obalu a konvexních kombinací):

Konvexní obal množiny $X \subseteq \mathbb{R}^n$ je množina všech konvexních kombinací prvků z X . Tedy

$$\begin{aligned} &\exists x_1, x_2, \dots, x_k \in X \\ &\exists \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in [0, 1], \sum_{i=1}^k \alpha_i > k \end{aligned}$$

takové, že

$$K(x) = \left\{ u : u = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \right\}$$

Důkaz: (cvičení)

Definice:

Průnik konečně mnoha poloprostorů v \mathbb{R}^n nazýváme (**konvexním**) **mnohostěnem** (*polyedr*).

Dimenze mnohostěnu P je pak dimenzí nejmenšího afinního prostoru obsahujícího P .

Hranice poloprostorů vymezujících P zovou se **hraničními nadrovinami**.

Pokud se n hraničních nadrovin mnohostěnu P protíná v právě jednom bodě x a navíc $x \in P$, x se nazývá **vrchol** P .

Pozorování: Mnohostěny jsou ekvivalentní množinám přípustných řešení $Ax \leq b$.

Pozorování: Je-li x vrchol $Ax \leq b$, podmatice A složená z řádků odpovídajících hraničním nadrovinám určujícím x je regulární.

Pozorování: Počet vrcholů mnohostěnu je nejvýše $\binom{m}{n}$ (tj. konečný).

LEMMA:

Má-li matice A úlohy LP s n proměnnými hodnost n , pak mnohostěn přípustných řešení obsahuje vrchol.

DŮKAZ:

Sporem: vezměme si přípustné řešení $x \in P$ takové, že x leží na největším možném počtu k nezávislých hraničních nadrovin.

Pokud $k = n$, je vše z definice v pořádku.

Pokud $k < n$, průnik vybraných hraničních nadrovin má dimenzi alespoň 1, ergo obsahuje nějakou přímku. Uvaž průniky nezávislých hraničních nadrovin s přímkou p ; dostaneme x' , který leží na $k + 1$ hraničních nadrovinách.

‡ *Spor*

VĚTA (o konvexním mnohostěnu):

Každý omezený konvexní mnohostěn je konvexním obalem množiny svých vrcholů. (Omezený mnohostěn je takový, ve kterém všechny body mají omezenou vzdálenost od počátku \Leftrightarrow lze jej vnořit do dostatečně velké koule \Leftrightarrow neobsahuje žádnou polopřímku.)

DŮKAZ:

Mějme mnohostěn P a X množinu vrcholů P . Dále předpokládejme $P \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$X \subseteq P \wedge P \text{ konvexní} \implies K(X) \subseteq P$$

($K(X)$ je průnik všech konvexních podmnožin X , ale P je také konvexní.)

Sporem tedy dokažme, že $P \subseteq K(X)$. Vezměme $x \in P \setminus K(X)$ takové, že náleží největšímu počtu k hraničních nadrovin. Buď $k = n$, pak x je vrchol, ale pak jistě $x \in X \subseteq K(X)$, což je spor. Nebo $k < n$, potom průnik těchto k hraničních nadrovin s P obsahuje polopřímku, což je opět spor (s omezeností).

Q.E.D.

VĚTA (o mnohostěnech a optimálních řešeních):

Má-li úloha lineárního programování optimální řešení a matice A této úlohy má hodnost n rovnu počtu proměnných, potom se optima nabývá též v některém z vrcholů mnohostěnu přípustných řešení.

DŮKAZ:

Označíme x^* optimální řešení. Dále platí $\text{rank}(A) = n$, tudíž P má nějaké vrcholy.

- (a) P je omezený: $x^* = \sum \alpha_i u_i$, kde $\alpha_i \in [0, 1] : \sum \alpha_i = 1$ a u_i jsou vrcholy P .
 Jakmile pak $\alpha_i > 0$, musí platit $c^T x^* = c^T u_i$ (obecně platí $c^T x^* \leq c^T u_i$).

$$c^T x^* = \sum \alpha_i c^T u_i$$

Potom u_i je vrchol, kde se nabývá optimum.

- (b) P je neomezený: x^* leží na hranici P , neboť nadrovina určená rovnicí $c^T x = c^T x^*$ protíná hranici P (a celý P leží na jedné straně této nadroviny).

Nechť x^* leží v k nezávislých hraničních nadrovinách. Označme B za průnik těchto nadrovin. Hodnota účelové funkce $c^T x$ pak musí být konstantní na B .

Kdyby $\exists y, y' \in B : c^T y > c^T y'$, pak pro dostatečně malé ε platí

$$x^* + \varepsilon(y - y') \in B \cap P$$

$$c^T(x^* + \varepsilon(y - y')) = c^T x^* + \varepsilon(c^T y - c^T y')$$

ale to nejde, neboť $(c^T y - c^T y') > 0$.

Vrcholy $B \cap P$ jsou vrcholy P — průniky některých nadrovin určujících P . Vezmu tedy libovolný prvek z $B \cap P$, tam se nabývá optimum. Takový musí existovat, poněvadž hodnost matice určující $B \cap P$ je n .

Q.E.D.

Simplexová metoda

Simplexová metoda je postup, jak vyřešit úlohu lineárního programování procházením množiny vrcholů mnohostěnu přípustných řešení tak, že hodnota účelové funkce neklesá.

Pozor, tato metoda může trvat i exponenciálně dlouho! Máme-li n nadrovin, pak totiž vrcholů samotných může být exponenciálně mnoho (např. n -dimenzionální hyperkrychle), a vstupem úlohy nejsou vrcholy, ale nadroviny.

Příprava tvaru úlohy

Mějme úlohu pro lineární programování ve standardním tvaru:

$$\begin{array}{|l} \max c^T x \\ Ax \leq b \end{array}$$

Výchozí tvar je $\max c'^T x'$, pro simplex využijeme tvar

$$A'x' = b' \quad x \geq 0$$

a přidáme pomocné proměnné pro každou nerovnost (rozšířením o jednotkovou matici).

Pozorování: Když $b \geq 0$, máme výchozí přípustné řešení, tedy že pomocným proměnným dosadím hodnoty z .

LEMMA:

Mějme úlohu lineárního programování:

$$\begin{array}{|l} \max c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

($m \leq n$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$) a $\text{rank}(A) = m$.

Nechť $B \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, $|B| = m$ je množina indexů taková, že čtvercová matice $A_B^{m \times m}$ sestavená z vybraných sloupců matice A určených indexy z B je regulární. Potom existuje jediné přípustné řešení úlohy, a to takové, že $x_i = 0$ pro $\forall i \notin B$.

DŮKAZ:

Ostatní proměnné $x_i : i \in B$ jsou určeny soustavou $A_B x = b$, což je soustava lineárních rovnic s regulární maticí, tím pádem má jednoznačné řešení.

Q.E.D.

Definice:

Řešení z předchozího lemmatu se nazývá **bázické** přípustné řešení úlohy lineárního programování určené **bází** B .

Proměnné $x_i : i \in B$ se nazývají **bázické**, ostatní jsou **nebázické**.

Příklad:

$$\begin{array}{l} \max(x_1 + 2x_2) \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + x_2 \leq 7 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 7 \\ x \geq 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_1 + x_2 + 2 \\ x_4 &= x_1 - x_2 + 1 \\ x_5 &= -2x_1 - x_2 + 7 \end{aligned} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

bázické p. nebázické p.

$$z = x_1 + 2x_2$$

Začneme na nule a pokusíme se zvýšit z — zvýšíme např. x_1 . Omezení jsme x_5 , které nám dává maximum 3.5. Nyní provedeme substituci:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_3 + x_2 + 2 \\ x_4 &= -x_3 + 3 \\ x_5 &= \frac{2x_3 - 3x_2 + 3}{z = -x_3 + 3x_2 + 2} \end{aligned}$$

Dále zvyšovat z můžeme přes x_2 , které je zde omezováno x_5 .

Důsledek:

Báze B určuje přípustné bázické řešení, právě když $A_B^{-1}b \geq 0$.

DŮKAZ:

x řeší $Ax = b$, tedy $A_B^{-1}Ax = A_B^{-1}b$. Zároveň však $A_B^{-1}A_B = I$, tedy

$$\begin{aligned} i \in B : x_i &= A_B^{-1}b \\ i \notin B : x_i &= 0 \end{aligned}$$

Definice:

Pro úlohu lineárního programování a přípustnou bázi B definujeme **simplexovou tabulku**:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} B & A & b & & & \\ & c^T & -z & & & \end{array} \right)$$

kde matice soustavy matice Ab je upravena elementárními operacemi tak, že $A_B = I_m$ a podobně poslední řádek $c^T|z$ tak, že $c_i = 0$ pro $\forall i \in B$.

Značení: Pro jednoduchost budeme indexovat řádky tabulky indexy z matice B .

Příklad:

$$\left(\begin{array}{cccccc|ccc} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 & & \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 & & \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \end{array} \right)$$

$$\max(x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Kolik je hodnota účelové funkce?

Označme $f(x)$ hodnotu účelové funkce v bodě x . To je vždy součástí onoho rohového členu, leč nepíšeme ho tam ($f(x) = c^T x$).

Při prvním sestavení tabulky dáme do posledního řádku $c^T x | f(x)$. Elementární úpravy nemění platnost rovnice $c^T x = f(x) - z$, neboli

$$c^T | -z \rightsquigarrow c'^T | -z$$

$$c^T x = f(x) - z \Leftrightarrow c'^T x = f(x) - z'$$

Je-li x bázecké řešení příslušející bázi B , máme $c^T x = 0$ čili $f(x) = -z$.

Simplexový algoritmus

- (0) Nalezneme nějaké přípustné řešení a sestavíme simplexovou tabulku pro tuto přípustnou bázi B .
- (1) Jestliže $c_j \leq 0$ pro $\forall j \notin B$, zastav se — příslušné bázecké řešení je optimální. Jinak zvol $j \in B : c_j > 0$, kde j je tzv. pivot.
- (2) Pokud $a_{kj} \leq 0$ pro $\forall k \in B$, zastav se — úloha je neomezená. Jinak nalezní

$$i \in B : b_i/a_{ij} = \min\{b_k/a_{kj} : a_{kj} > 0 \wedge k \in B\}$$

- (3) Polož $B = B \cup \{j\} \setminus \{i\}$ a uprav simplexovou tabulku.

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zvolím $j = 1$, tedy první sloupec, jako řádek algoritmus vybere $i = 3$ (první řádek).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 & 3 \\ & 0 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- (4) Opakuj opět od (1).

DŮKAZ:

LEMMA 3:

Třetí krok je korektní (neboli nová báze je přípustná).

DŮKAZ:

Stačí ukázat, že nový vektor $b' \geq 0$.

$$\forall i : b'_i = b_i/a_{ij} \geq 0$$

$$\forall k \in B, k \neq i : b'_k = b_k - a_{kj}(b_i/a_{ij}) \geq 0$$

$$b_k/a_{kj} \geq b_i/a_{ij}$$

LEMMA 2:

Druhý krok je korektní, neboli úloha lineárního programování je neomezená, jakmile

$$\forall k \in B \wedge c_j > 0, j \notin B : a_{kj} \leq 0$$

DŮKAZ:

Označíme x bázičné řešení pro danou bázi B . Definujme pomocný vektor:

$$y \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} y_j = 1 & k \in B \\ y_k = -a_{kj} & k \in B \\ y_k = 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$-y \geq 0 \Rightarrow x + ty \geq 0 \quad \forall t \geq 0$$

$$-A(x + ty) = Ax + tAy = b + t0 = b$$

$$-f(x + ty) = z + tc^T y = z + tc_j$$

LEMMA 1:

První krok je korektní, čili jakmile $c \leq 0$, přípustné bázičné řešení x^* je optimální.

DŮKAZ:

Nechť x je přípustné řešení a $x \geq 0$:

$$c^T x \leq 0 = c^T x^*$$

$$f(x) = z + c^T x \leq z + c^T x^* = f(x^*)$$

Tvrzení:

Nultý krok lze vyřešit stejnou simplexovou metodou na pomocnou úlohu lineárního programování.

DŮKAZ:

Původní úloha: $\max c^T x : Ax = b, x \geq 0$, BÚNO $b \geq 0$

Pomocná úloha: $\max -y_1 - y_2 - \dots - y_m : Ax + Iy = b, x, y \geq 0$

Výchozí bázičné řešení pomocné úlohy $x = 0, y_i = b \geq 0$. Optimum pomocné úlohy vždy existuje (účelová funkce je omezena nulou).

Je-li $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$, zároveň máme bázičné řešení původní úlohy. Je-li však nějaké $y_i > 0$, potom původní úloha nemá žádné přípustné řešení.

Konečnost (simplexového algoritmu) lze zajistit vhodným výběrem indexů i, j . Tzv. **Blandovo pravidlo** nám to zaručuje výběrem min i, j — tím máme sice zaručenu konečnost, zato je však velmi pomalé na výpočet.

Dualita lineárního programování

Příklad:

Mějme úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned} \max(x_1 + 2x_2) \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\leq 7 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Otázka:

Lze nějak omezit (odhadnout) hodnotu účelové funkce?

Vezměme si třetí nerovnici:

$$\left. \begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 &\leq 14 \\ 4x_1 + 2x_2 &\geq x_1 + 2x_2 \end{aligned} \right\} x_1 + 2x_2 = c^T x \leq 14$$

Nebo si sečteme druhou a třetí nerovnici:

$$-x_1 + x_2 + 2x_1 + x_2 = x_1 + 2x_2 \leq 8$$

Obecně pro úlohu lineárního programování:

$$\begin{aligned} \max c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \quad x_i &\geq 0 \\ a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n &\leq b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n &\leq b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n &\leq b_m \end{aligned}$$

Hledáme y_1, y_2, \dots, y_m , kde $y_i \geq 0$ a zároveň

$$\forall j = 1, \dots, n : \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq c_j$$

Pokud takové y_1, \dots, y_m existují, máme horní odhad na hodnotu účelové funkce, protože

$$c^T x = \sum_{j=1}^n c_j x_j \leq \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \right) x_j = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right) y_i \leq \sum_{i=1}^m b_i y_i$$

neboť je-li x přípustné, $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ (ze zadání). Tím jsme ale došli také k úloze lineárního programování, jen trochu odlišné.

Definice:

Pro úlohu lineárního programování $\max c^T x : Ax \leq b, x \geq 0$, tedy tzv. **primární úlohu**, definujeme **duální úlohu** $\min b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0$.

Příklad:

K poslední úloze máme duální:

$$\min 2y_1 + y_2 + 7y_3 \quad y_i \geq 0$$

$$y_1 - y_2 + 2y_3 \geq 1$$

$$-y_1 + y_2 + y_3 \geq 2$$

Pozn.: Duální úlohu lze zformulovat k primární úloze v libovolném tvaru.

VĚTA (o vztahu optim mezi duálními úlohami):

Nechť (P) a (D) jsou vzájemně duální úlohy lineárního programování. Potom buď obě úlohy mají přípustná řešení a navíc platí

$$c^T x^* = b^T y^*$$

pro libovolná optimální x^* a y^* , nebo jedna z $(P), (D)$ nemá žádné přípustné řešení a druhá je neomezená nebo též nemá přípustné řešení.

Příklad:

Pro výše uvedenou úlohu:

$$x^* = (2, 3)^T$$

$$y^* = (0, 1, 1)^T$$

$$c^T x^* = b^T y^* = 8$$

DŮKAZ:

Dokazovat (zvrhle) budeme ze správnosti a konečnosti simplexové metody. Zrekapitulujme si ji tedy, a zavedme si při tom vhodné značení.

Značení simplexové metody

Sestavme si simplexovou tabulku:

$$\frac{B \mid A \mid I \mid b}{\hline c^T \mid 0 \mid}$$

T-O-D-O:

Předpokládejme, že $(P), (D)$ mají přípustná řešení. Potom (P) nemůže být neomezená, neboť

$$c^T x \leq b^T y$$

platí pro libovolnou dvojici přípustných řešení. Tedy (P) má optimální řešení, vezmu x^* nějaké bázičné optimální řešení dané bází B . x^* je určeno nějakým \bar{x}^* , tzn. optimálním řešením úlohy simplexového algoritmu:

$$c^T x^* = \bar{c}^T \bar{x}^*$$

Ze závěrečné simplexové tabulky plyne, že

$$(\bar{x}^*)_i = \begin{cases} 0 & i \notin B \\ (\overline{A_B^{-1}b})_i & \text{tuto bázickou část označíme } \bar{x}_B^* \end{cases}$$

Zvolíme

$$y^* = \overline{A_B^{-1}}^T \bar{c}_B$$

a ukážeme, že y^* je optimálním řešením (D) .

(i) Ukážeme, že y^* je přípustné pro (D) :

$$\left. \begin{array}{l} A^T y \geq c \\ y = I_m y \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \bar{A} y \geq \bar{c}$$

ale přitom

$$\bar{A}^T y^* = \bar{A}^T \overline{A_B^{-1}}^T \bar{c}_B \geq \bar{c}$$

protože

$$\bar{c}^T - \bar{c}_B^T \overline{A_B^{-1}}^T \bar{A} \leq 0$$

na konci simplexového algoritmu.

(ii) Nyní ukážeme, že y^* je dokonce optimální pro (D) . To vyplyne z rovnosti

$$c^T x^* = b^T y^*$$

$$b^T y^* = b^T \overline{A_B^{-1}}^T \bar{c}_B = \bar{x}_B^{*T} \bar{c}_B = \bar{c}_B^T \bar{x}_B^* = \bar{c}^T \bar{x}^*$$

(poslední rovnost plyne z faktu, že $x_i = 0$ pro $i \notin B$)

Druhá část věty: $(P), (D)$ nemohou být zároveň neomezené (platila by první část). *Q.E.D.*

Dodatek: Teorie her

| Viz slides, tady je jen úryvek.

Úkol pro nalezení optimální strategie x :

$$\max_x \min_y xAy$$

Dokážeme navíc, že pro každou smíšenou strategii x existuje optimální odpověď y taková, že je *čistá* (nikoliv smíšená).

Tedy po nás naše úloha žádá maximalizaci

$$\forall x, \sum x_i = 1, x_i \geq 0 : \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij}x_i$$

DŮKAZ:

$$\min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i = \sum_{j=1}^n y_j \left(\min_j \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right)$$

neboť $\sum_i y_i = 1$ (jde o stochastický vektor), to však je

$$\leq \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij}x_i \right) = xAy$$

Mezi možnými kandidáty pro y jsou i čisté strategie $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. Tudíž naopak platí také

$$\min_i xAy \leq \sum_{i=1}^m a_{ij}x_i$$

Q.E.D.