Studijní text pro obor G+K
Katedra matematiky
Fakulta stavební
České vysoké učení technické

KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.

Lektorovali: RNDr. Milan Kočandrle, CSc., Doc. RNDr. Jaroslav Černý, CSc.
Sazba v programu AMSTEX: Doc. RNDr. Milada Kočandrlová, CSc.
Obrázky: Ing. Stanislav Olivík
Typografická úprava: Mgr. Milan Bořík, Ph.D.

2004

Křivkový integrál

Úvod

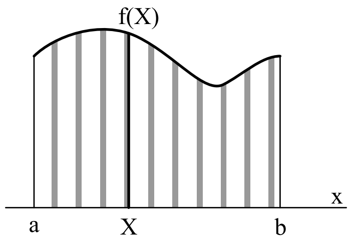
Abychom zavedli křivkový integrál, budeme samozřejmě potřebovat pojem "křivka". Pro začátek se spokojíme s názorným popisem křivky jako dráhy pohybujícího se bodu v rovině, či prostoru, v závislosti na čase. Bod, ve kterém se v časovém okamžiku t právě nachází bod X, označíme $X(t)$. Jeho souřadnice v případě křivky v rovině, budou funkce $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Připomeňme si ještě Riemannův určitý integrál a jeho názorný význam. Přitom jeho geometrický význam zformulujeme ekvivalentním a přece trochu odlišným způsobem:

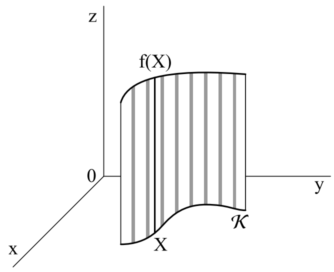
Je-li f nezáporná spojitá funkce s definičním oborem $\langle a, b\rangle$, potom

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

je roven obsahu obrazce, který vyplní pohybující se úsečka s koncovými body $[x, 0]$ a $[x, f(x)]$, jestliže číslo x roste od a až do b, viz obr.



Geometrie Riemannova integrálu



Geometrie křivkového integrálu

Tento postup můžeme zobecnit. Předpokládejme, že v rovině máme dánu křivku $\mathcal{K}$ např. funkcemi $x = x(t)$, $y = y(t)$, kde $t \in \langle a, b\rangle$. Dále předpokládejme, že f je spojitá a nezáporná funkce, která každému bodu X křivky $\mathcal{K}$ přiřadí číslo $f(X)$. Pohybující se úsečka, s krajními body $X_1 = [x(t), y(t), 0]$ a $X = [x(t), y(t), f(X(t))]$, kde $t \in \langle a, b\rangle$, vytvoří část válcové plochy. Obsah S takto vytvořené části válcové plochy je geometrickým významem integrálu funkce $z = f(x, y)$ definované v bodech křivky $\mathcal{K}$. Stejným způsobem lze definovat integrál i pro křivku $\mathcal{K}$ v prostoru $\mathbb{R}^3$. S názornou představou to však bude horší, na tu bychom potřebovali čtyřrozměrný prostor.

Integrál funkce f dvou, resp. tří proměnných, definované v bodech křivky $\mathcal{K}$, nazýváme **křivkový integrál** a značíme ho

$$\int_{\mathcal{K}} f(X)\, ds \tag{2}$$

Význam symbolu ds v integrálu (2) je analogický významu symbolu dx v integrálu (1). V Riemannově integrálu jsme symbolem dx rozuměli délku elementu intervalu $\langle a, b\rangle$, symbolem ds budeme rozumět délku oblouku křivky $\mathcal{K}$.

Abychom tedy křivkové integrály mohli počítat, budeme si muset něco říci o křivkách jak v rovině, tak v prostoru, a ukázat mechanizmus takových výpočtů.

Bodová a vektorová funkce

Bodová, resp. vektorová funkce jedné proměnné se nazývá zobrazení X, resp. $\mathbf{x}$ intervalu $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$ do euklidovského prostoru $\mathbb{R}^3$, resp. do vektorového zaměření $\mathbb{V}_3$ tohoto prostoru. Tedy každému $t \in \mathbb{I}$ je přiřazen bod $X(t)$, resp. vektor $\mathbf{x}(t)$. Zvolíme-li v $\mathbb{R}^3$ kartézskou soustavu souřadnic, $\langle O, \mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\rangle$, kde $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3$ je ortonormální báze prostoru $\mathbb{V}_3$, body, resp. vektory zapisujeme

$$X(t) = [x(t), y(t), z(t)]\,, \text{ resp. } \mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t)).$$

Funkce

$$x = x(t)\,,\; y = y(t)\,,\; z = z(t)$$

nazýváme **souřadnicové funkce** bodové, resp. vektorové funkce. Bodové, resp. vektorové funkce jsou souřadnicovými funkcemi jednoznačně určeny. Pro bodové a vektorové funkce můžeme definovat limitu podobně jako tomu bylo u reálných funkcí reálné proměnné:

Říkáme, že bodová funkce X má v bodě $t_0 \in \mathbb{I}$ za limitu bod X_0, jestliže ke každému $\epsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|t - t_0| < \delta$, $t \neq t_0$, je $\|X(t) - X_0\| < \epsilon$. V případě uzavřeného, nebo polouzavřeného intervalu $\mathbb{I}$ budeme, podobně jako u funkce jedné proměnné, brát jednostranné limity.

Analogicky lze definovat limitu vektorové funkce. Zřejmým způsobem můžeme pomocí pojmu "limita" definovat spojitost a derivaci bodové i vektorové funkce v bodě a na intervalu. Derivace bodové funkce X, resp. vektorové funkce $\mathbf{x}$, je definována vzorcem

$$X'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(X(t) - X(t_0))\,, \text{ resp. } \mathbf{x}'(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{1}{t - t_0}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0)).$$

Pokud derivace bodové funkce existuje, je zřejmé, že $X'(t_0)$ je vektor. Snadno lze dokázat následující tvrzení.

1. Bodová funkce X, resp. vektorová funkce $\mathbf{x}$ má v bodě $t_0 \in \mathbb{I}$ za limitu bod $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$, resp. vektor $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, právě když
$$\lim_{t \to t_0} x(t) = x_0\,,\ \lim_{t \to t_0} y(t) = y_0\,,\ \lim_{t \to t_0} z(t) = z_0.$$
2. Bodová funkce X, resp. vektorová funkce $\mathbf{x}$ je spojitá v bodě $t_0 \in \mathbb{I}$, právě když jsou její souřadnicové funkce v bodě t_0 spojité.

3. Bodová funkce X, resp. vektorová funkce $\mathbf{x}$ je spojitá na intervalu $\mathbb{I}$, právě když jsou na $\mathbb{I}$ spojité její souřadnicové funkce.

4. Bodová funkce X, resp. vektorová funkce $\mathbf{x}$ má v bodě $t_0 \in \mathbb{I}$ derivaci, právě když existují derivace $x'(t_0)$, $y'(t_0)$, $z'(t_0)$. Přitom
$$X'(t_0) = (x'(t_0)\,,\, y'(t_0)\,,\, z'(t_0))\,,\ \text{resp. } \mathbf{x}'(t_0) = (x'(t_0)\,,\, y'(t_0)\,,\, z'(t_0))$$
jsou vektory. Analogicky lze definovat i derivace vyšších řádů.

Příklad 1. *Bodová funkce*
$$X(t) = [a_1 + t(b_1 - a_1)\,,\, a_2 + t(b_2 - a_2)],$$
kde $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$ jsou body, zobrazuje interval $\langle 0, 1\rangle$ na úsečku AB. Její derivace
$$X'(t) = (b_1 - a_1\,,\, b_2 - a_2)$$
je směrový vektor $B - A$ této úsečky.

Příklad 2. *Je dána reálná funkce f. Najděme bodovou funkci tak, aby množina jejích funkčních hodnot (bodů) byla grafem funkce f.*
$$y = f(x) \implies X(x) = [x\,,\, f(x)].$$
Je-li funkce f prostá, potom
$$Y(y) = [f^{-1}(y)\,,\, y].$$

Např.

$$\begin{aligned} y = x^2 &\implies X(x) = [x, x^2], \\ y = \sqrt{x}\,,\ x > 0 &\implies Y(y) = [y^2, y], \\ y = \ln x\,,\ x > 0 &\implies X(x) = [x, \ln x]\,,\ \text{nebo}\ Y(y) = [\mathrm{e}^y, y]. \end{aligned}$$

V příštím odstavci uvidíme, že máme-li dánu množinu funkčních hodnot bodové funkce, můžeme ji určit i dalšími bodovými funkcemi.

Regulární element křivky, křivka

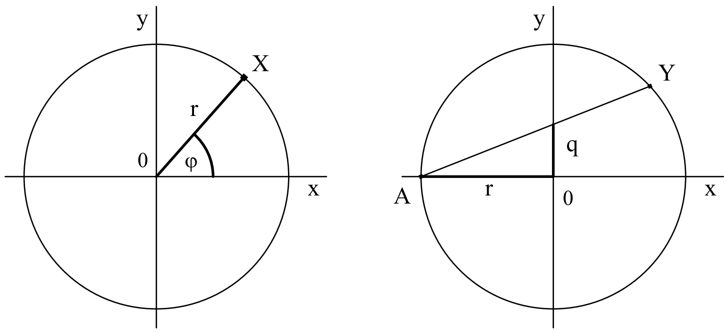
Regulárním elementem křivky nazýváme množinu $\mathcal{K}$ bodů v prostoru, ke které existuje bodová funkce X na intervalu $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$, která má následující vlastnosti:

1. Funkce X je spojitá na intervalu $\mathbb{I}$.
2. Funkce X je prostá na $\mathbb{I}$.
3. Funkce X má na intervalu $\mathbb{I}$ spojité derivace do druhého řádu a $X' \neq \mathbf{o}$ ve všech bodech intervalu $\mathbb{I}$.

Je-li některá z vlastností 2) nebo 3) porušena nejvýše ve spočetně mnoha bodech intervalu $\mathbb{I}$, budeme množinu $\mathcal{K}$ nazývat **křivkou** určenou funkcí X na intervalu $\mathbb{I}$. Takové body nám rozdělí křivku $\mathcal{K}$ na regulární elementy, na kterých už jsou vlastnosti 1 až 3 splněny. Proměnnou t nazýváme **parametrem**, funkci X, nazýváme **parametrizací** křivky $\mathcal{K}$.

Příklad 3. *Parametrizaci kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ určíme jednak pomocí polárních souřadnic a jednak pomocí průsečíků přímek $y = \frac{q}{r}x + q$ svazku se středem v bodě A této kružnice, tj.*

$$X(\varphi) = [r\cos\varphi, r\sin\varphi]\,,\ \varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle\,,\ \ Y(q) = \left[\frac{r(r^2 - q^2)}{r^2 + q^2}, \frac{2r^2 q}{r^2 + q^2}\right]\,,\ q \in \mathbb{R}.$$



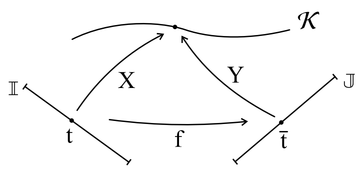
Parametrizace kružnice

Z obrázku je vidět, že vztah mezi parametry φ a q je

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{q}{r}\,,\ \ \varphi \neq \pi.$$

Transformace parametru

Je-li regulární element křivky $\mathcal{K}$ popsaný dvěma bodovými funkcemi $X = X(t)$, $t \in \mathbb{I}$, a $Y = Y(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbb{J}$, je zobrazení $Y^{-1} \circ X$ prostým zobrazením intervalu $\mathbb{I}$ na interval $\mathbb{J}$. Označíme-li toto zobrazení f, je $X(t) = Y(f(t))$, pro každé $t \in \mathbb{I}$.



Transformace parametru

V příkladu 3 je transformace parametru určena funkcí $f(\varphi) = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{q}{r}$, $\varphi \neq \pi$. V parametrizaci Y není určen bod A kružnice.

Transformací parametru křivky $\mathcal{K}$ nazýváme každou funkci f definovanou na intervalu $\mathbb{I}$, pro kterou platí:

1. f zobrazuje interval $\mathbb{I}$ na interval $\mathbb{J}$,

2. f má na intervalu $\mathbb{I}$ spojité derivace až do řádu 2,

3. $f' = 0$ nejvýše ve spočetném počtu bodů intervalu $\mathbb{I}$.

Je-li Y parametrizace křivky $\mathcal{K}$ na intervalu $\mathbb{J}$, potom složená funkce $Y \circ f$ je jinou parametrizací stejné křivky $\mathcal{K}$.

Tečna a orientace křivky

Nenulový vektor $X'(t)$ a každý jeho nenulový násobek nazýváme **tečným vektorem** křivky $\mathcal{K}$ v bodě $X(t)$. Přímka určená bodem $X(t)$ a tečným vektorem $X'(t)$ se nazývá **tečna křivky**.

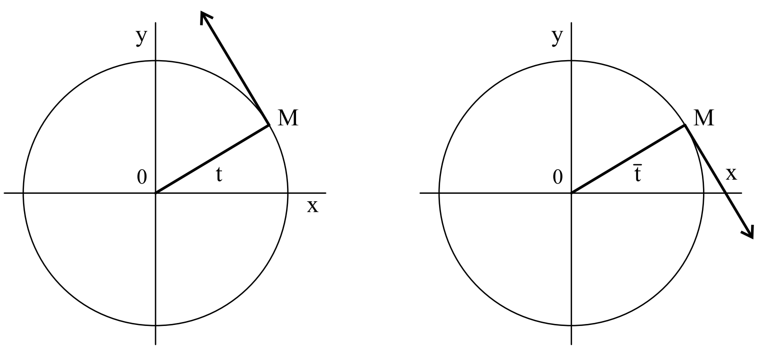
Tečna křivky nezávisí na volbě její parametrizace. Jsou-li $X(t)$ a $Y(\bar{t}) = X(t(\bar{t}))$ dvě parametrizace téže křivky, potom její tečný vektor

$$\frac{dY(\bar{t}_0)}{d\bar{t}} = \frac{dX(t(t_0))}{dt}\frac{dt(\bar{t}_0)}{d\bar{t}} = X'(t_0)\frac{dt(\bar{t}_0)}{d\bar{t}}$$

v bodě $X(t_0) = X(t(\bar{t}_0))$ je pouze násobkem vektoru $X'(t_0)$.

Příklad 4. *Pro kružnici $x^2 + y^2 = r^2$ uvažujme dvě různé parametrizace:*

$$X(t) = [r\cos t, r\sin t]\,,\ t \in \langle 0, 2\pi\rangle\,,\ Y(\bar{t}) = [r\sin \bar{t}, r\cos \bar{t}]\,,\ \bar{t} \in \langle 0, 2\pi\rangle.$$



Opačné orientace kružnice

Tečné vektory určené derivacemi bodových funkcí X, Y jsou

$$X'(t) = r(-\sin t, \cos t)\ ,\ \ Y'(\bar{t}) = r(\cos \bar{t}, -\sin \bar{t}).$$

Např. v bodě $M = X(\frac{\pi}{6}) = Y(\frac{\pi}{3})$ dané kružnice jsou tečné vektory $X'(\frac{\pi}{6}) = \frac{r}{2}(-1, \sqrt{3})$ a $Y'(\frac{\pi}{3}) = \frac{r}{2}(1, -\sqrt{3})$ zřejmě opačné.

Tečný vektor určuje orientaci tečny. Je-li v každém bodě křivky zvolena orientace její tečny tak, že existuje taková bodová funkce X, že vektor X' ve všech bodech křivky určuje tuto zvolenou orientaci tečny, je tím zvolena **orientace křivky**. Na tečně lze zvolit dvě různé orientace a tudíž i na křivce můžeme volit dvě různé orientace.

Bod křivky $\mathcal{K}$, ve kterém jsou vektory $X'(t)$ a $X''(t)$ lineárně závislé, nazýváme **inflexním bodem** křivky $\mathcal{K}$. Křivka, jejíž všechny body jsou inflexní, je přímka nebo část přímky.

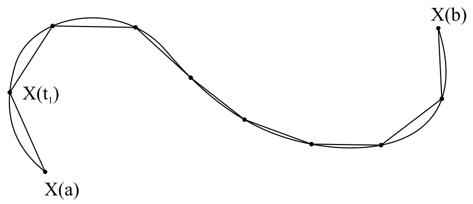
Ve všech případech, které uvedeme a také ve všech případech, se kterými se setkáte v praxi, budou křivky zadány diferencovatelnými bodovými funkcemi.

Oblouk křivky

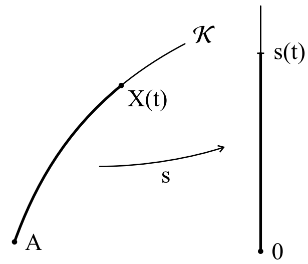
Pro odvození a výpočet křivkového integrálu, tj. v teoretických úvahách, ale i v řadě aplikací, se využívá jako parametr křivky její oblouk. Předpokládejme, že křivka $\mathcal{K}$ je určena na intervalu $\mathbb{I}$ bodovou funkcí X. Uvažujme dělení intervalu $\mathbb{I}$ body $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$. Toto dělení určí prostřednictvím bodové funkce X lomenou čáru s vrcholy $X(t_0), X(t_1), \ldots, X(t_n)$ na křivce $\mathcal{K}$. Délka L lomené čáry je číslo

$$L = \sum_{i=0}^{n-1} |X(t_i)X(t_{i+1})|.$$

Existuje-li suprémum množiny délek všech takových lomených čar, nazveme jej **délkou křivky** $\mathcal{K}$.



Lomená čára křivky



Oblouk křivky

Nechť $X(t)$ je libovolný bod křivky $\mathcal{K}$. Předpokládejme, že existuje délka křivky $\mathcal{K}$. Bodu $X(t)$ přiřadíme délku části křivky mezi body $A = X(a)$ a $X(t)$, obr. Dostáváme tak reálnou funkci jedné reálné proměnné t, kterou označíme s. Funkci s nazýváme **obloukem křivky**. Lze ukázat, že funkci s můžeme vyjádřit Riemannovým integrálem:

$$s(t) = \int_a^t |X'(u)|\, du + c.$$

Z vlastností integrálu lze odvodit, že funkce s, definovaná na intervalu $\langle a, b\rangle$, je nezáporná, rostoucí a tedy prostá. Její diferenciál je

$$ds = |X'(t)|\, dt. \tag{3}$$

Z popsaných vlastností funkce s vyplývá, že k ní můžeme nalézt funkci inverzní, tj. vyjádřit proměnnou t pomocí s. Křivka $\mathcal{K}$ pak bude určena bodovou funkcí $X(t(s))$. Dostali jsme **parametrizaci křivky $\mathcal{K}$ pomocí oblouku**. Z věty o derivaci složené funkce a z věty o derivaci funkce inverzní vyplývá, že

$$\left|\frac{dX(t(s))}{ds}\right| = \left|\frac{dX}{dt}\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dX}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right| = \left|\frac{dX}{dt}\right|\left|\frac{1}{\frac{ds}{dt}}\right| = |X'(t)|\frac{1}{|X'(t)|} = 1,$$

tj. tečný vektor v každém bodě křivky parametrizované obloukem je jednotkový.

Příklad 5. *Oblouk kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ je funkce $s(t) = rt$, kde t je středový úhel příslušný kružnicovému oblouku $s(t)$. Funkce $t = \frac{s}{r}$ určuje transformaci parametru v parametrizaci $X(t) = [r\cos t, r\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$, tou je*

$$Y(s) = [r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}]\,,\ s \in \langle 0, 2\pi r\rangle.$$

Snadno se přesvědčíme, že v této parametrizaci je každém bodě $Y(s)$ tečný vektor kružnice jednotkový.

Křivkový integrál a jeho výpočet

Integrál spojité funkce f dvou, resp. tří proměnných na oblasti $\mathbb{M}$, počítaný pouze v bodech křivky $\mathcal{K} \subset \mathbb{M}$, nazýváme **křivkový intergál**[1] a značíme ho

$$\int_{\mathcal{K}} f(X)\, ds, \tag{4}$$

kde ds je diferenciál oblouku křivky $\mathcal{K}$.

Dosadíme-li do vzorce (4) body křivky s parametrizací $X = X(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, a diferenciál (3) jejího oblouku, dostaneme vzorec pro výpočet křivkového integrálu

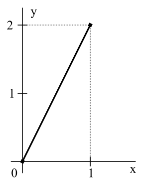
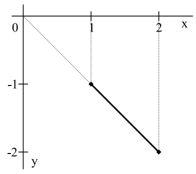
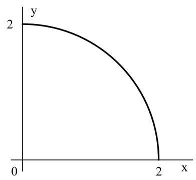
$$\int_{\mathcal{K}} f(X)\, ds = \int_a^b f(X(t))\, |X'(t)|\, dt. \tag{5}$$

Vzorec (5) zřejmě nezávisí na orientaci křivky $\mathcal{K}$.

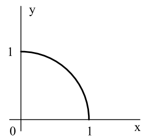
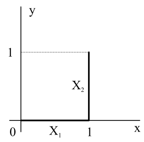
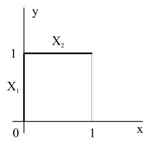
Příklad 6. *Počítejme integrál*

$$\int_{\mathcal{K}} (x^2 + y^2)\, ds$$

pro různé křivky $\mathcal{K}$.

Křivka $\mathcal{K}$	Parametrizace	Derivace	Integrál
	$X(x) = [x, 2x]$ $x \in \langle 0, 1\rangle$	$X'(x) = (1, 2)$ $\lvert X'(x)\rvert = \sqrt{5}$	$5\sqrt{5}\int_0^1 x^2\, dx = \frac{5\sqrt{5}}{3}$
	$X(x) = [x, -x]$ $x \in \langle 1, 2\rangle$	$X'(x) = (1, -1)$ $\lvert X'(x)\rvert = \sqrt{2}$	$2\sqrt{2}\int_1^2 x^2\, dx = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
	$X = [2\cos t, 2\sin t]$ $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$	$X' = 2(-\sin t, \cos t)$ $\lvert X'(t)\rvert = 2$	$8\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4\pi$

[1] V literatuře je nazýván křivkový integrál 1. druhu, nebo křivkový integrál skalární funkce.

	$X = [\cos t, \sin t]$ $t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$	$X' = (-\sin t, \cos t)$ $\lvert X'(t) \rvert = 1$	$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = \frac{\pi}{2}$
	$X_1(t) = [t, 0]$ $X_2(t) = [1, t]$ $t \in \langle 0, 1 \rangle$	$X_1'(t) = (1, 0)$ $X_2'(t) = (0, 1)$ $\lvert X_1'(t) \rvert = \lvert X_2'(t) \rvert = 1$	$\int_0^1 (2t^2 + 1) dt = \frac{5}{3}$
	$X_1(t) = [0, t]$ $X_2(t) = [t, 1]$ $t \in \langle 0, 1 \rangle$	$X_1'(t) = (0, 1)$ $X_2'(t) = (1, 0)$ $\lvert X_1'(t) \rvert = \lvert X_2'(t) \rvert = 1$	$\int_0^1 (2t^2 + 1) dt = \frac{5}{3}$

Délka křivky

Je-li $f(X) = 1$, potom integrál (5) určuje délku křivky $\mathcal{K}$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Píšeme

$$l = \int_{\mathcal{K}} ds = \int_a^b |X'(t)| \, dt. \tag{6}$$

Příklad 7. *Oblouk logaritmické spirály, dané v polárních souřadnicích rovnicí*

$$\varphi = k \ln \varrho \,, \ k \neq 0 \,, \ \text{nebo} \ \varrho = \mathrm{e}^{a\varphi} \,, \ a \neq 0 \,, \ \varphi \in \langle 0, \pi/2 \rangle \,, \ \varrho > 0,$$

má bodovou rovnici

$$X(\varphi) = [\mathrm{e}^{a\varphi} \cos \varphi, \mathrm{e}^{a\varphi} \sin \varphi].$$

Pro výpočet první derivace a její velikosti bude výhodné využít pravidlo pro derivaci součinu dvou funkcí

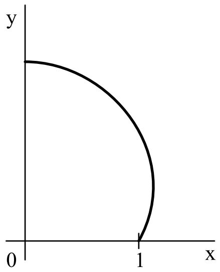
$$X'(\varphi) = (\mathrm{e}^{a\varphi})'(\cos \varphi, \sin \varphi) + \mathrm{e}^{a\varphi}(-\sin \varphi, \cos \varphi) = \mathrm{e}^{a\varphi}(a(\cos \varphi, \sin \varphi) + (-\sin \varphi, \cos \varphi))$$

určuje v každém bodě spirály tečný vektor. Protože

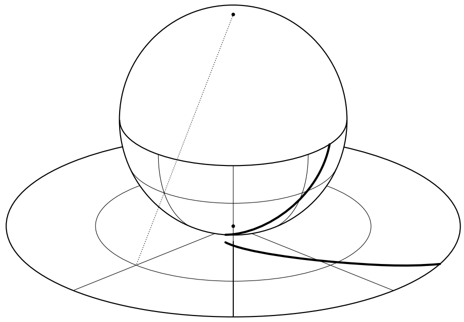
$$X'(\varphi) X'(\varphi) = \mathrm{e}^{2a\varphi}(a^2 + 1),$$

je velikost tečného vektoru

$$|X'(\varphi)| = \mathrm{e}^{a\varphi}\sqrt{a^2+1}.$$



Logaritmická spirála ($a > 0$)



Stereografická projekce

Potom podle (6) je

$$l = \sqrt{a^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{a\varphi}\, d\varphi = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}(\mathrm{e}^{\frac{a\pi}{2}} - 1).$$

Poznámka. *Ověřte, že úhel tečného vektoru logaritmické spirály v bodě X a radiusvektoru tohoto bodu X je konstantní. Logaritmická spirála je stereografickým průmětem loxodromy na sféře na rovinu rovníku, nebo na rovinu s ní rovnoběžnou, když střed této projekce je v pólu. Loxodroma je křivka, která protíná poledníky pod konstantním úhlem.*

Obsah válcové plochy

V úvodu jsme řekli jsme, že je-li funkce f spojitá a nezáporná na množině $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$ a je-li $\mathcal{K}$ křivka v množině $\mathbb{M}$, potom integrál

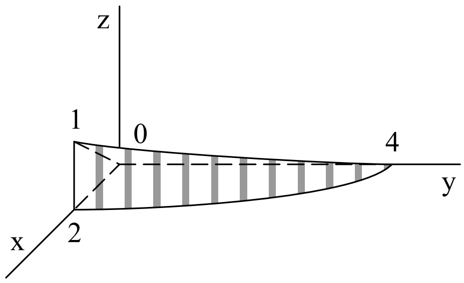
$$S = \int_{\mathcal{K}} f(X)\, ds$$

určuje obsah části válcové plochy, s řídicí křivkou $\mathcal{K}$ a tvořicími přímkami rovnoběžnými s osou z, vymezené křivkou $\mathcal{K}$ a grafem funkce $z = f(X)$.

Příklad 8. *Počítejme obsah části parabolické válcové plochy $y = 4 - x^2$ omezené rovinou $x - 2z = 0$ v prvním oktantu.*

Parametrizace řídicí paraboly $\mathcal{K}$ je

$$X(t) = [t, 4 - t^2]\,,\ t \in \langle 0, 2 \rangle.$$



Obsah válcové plochy

Diferenciál jejího oblouku je $ds = \sqrt{1 + 4t^2}\, dt$. Potom pro obsah dané válcové plochy platí

$$S = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{K}} x\, ds = \frac{1}{2} \int_0^2 t\sqrt{1 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{8} \int_1^{\sqrt{17}} u^2\, du = \frac{1}{24}(17\sqrt{17} - 1) \doteq 2.88,$$

kde jsme použili substituci $u = \sqrt{1 + 4t^2}$.

Hmotnost, statické momenty a těžiště křivky

Je-li f funkce měrné hustoty na jednotku délky oblouku křivky $\mathcal{K}$, pak

– je jeho hmotnost určena integrálem

$$m = \int_{\mathcal{K}} f(X)\, ds$$

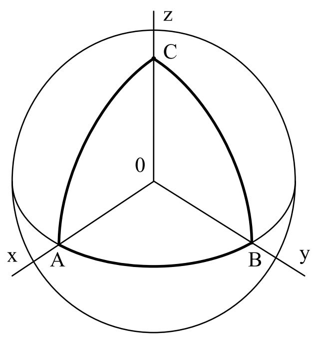
– jsou jeho statické momenty k souřadnicovým rovinám určeny integrály

$$S_{xy} = \int_{\mathcal{K}} z f(X)\, ds\,,\ S_{yz} = \int_{\mathcal{K}} x f(X)\, ds\,,\ S_{xz} = \int_{\mathcal{K}} y f(X)\, ds$$

– je jeho těžiště

$$T = \left[\frac{S_{yz}}{m}, \frac{S_{xz}}{m}, \frac{S_{xy}}{m}\right].$$

Příklad 9. *Určeme těžiště sférického trojúhelníka ABC, jehož strany jsou oblouky hlavních kružnic na sféře $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ vyťaté v prvním oktantu souřadnicovými rovinami. Předpokládejme jednotkovou hustotu v bodech stran trojúhelníka.*



Sférický trojúhelník

Hmotnost trojúhelníka je rovna trojnásobku čtvrtiny délky kružnice, tj. $m = \frac{3}{2}\pi r$.

Vzhledem k umístění trojúhelníka budou jeho statické momenty ke všem třem souřadnicovým rovinám stejné a stačí tedy počítat pouze jeden z nich.

Bodová funkce stran trojúhelníka je

$$X(t) = \begin{cases} [r\cos t, r\sin t, 0], \\ [0, r\cos t, r\sin t], \\ [r\cos t, 0, r\sin t], \quad t \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle. \end{cases}$$

Diferenciál oblouku je $ds = r\,dt$. *Potom např.*

$$S_{xy} = 2r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt = -2r^2 \Big[\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2r^2.$$

Těžiště sférického trojúhelníka je $T = \left[\frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}, \frac{4r}{3\pi}\right]$.

Práce síly

Ve fyzice dráhový účinek síly, kterou působí jedno těleso na druhé, je charakterizován skalární veličinou **práce**, takto[2]:

Působí-li na těleso (kromě jiných vlivů) stálá síla $\vec{F}$ v bodě, který se pohybuje přímočaře jedním směrem, potom práce touto silou vykonaná, na úseku délky s, je skalár

$$W = |\vec{F}| s \cos \alpha,$$

kde α je úhel vektoru rychlosti pohybu a vektoru síly.

Není-li síla stálá, mluvíme o silovém, resp. vektorovém poli.

Vektorové pole

Vektorové pole na oblasti $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ je zobrazení $\vec{F}$ z $\mathbb{M}$ do zaměření $\mathbb{V}_3$ prostoru $\mathbb{R}^3$, tj. zobrazení, které každému bodu $X \in \mathbb{M}$ přiřadí vektor $\vec{F}(X)$.

Vektorové pole je tedy vektorová funkce a platí pro ně vše co jsme řekli v odstavci o bodových a vektorových funkcích. Souřadnicové funkce pole $\vec{F}$ v ortonormální bázi prostoru $\mathbb{V}_3$ budeme značit P, Q, R.

Vektorové pole, které nezávisí na čase, nazýváme **stacionární vektorové pole**.

Orientované křivky, v jejichž každém bodě X je tečný vektor rovnoběžný s vektorem $\vec{F}(X)$, nazýváme **siločarami vektorového pole** $\vec{F}$.

Práce silového pole po křivce, cirkulace

Nechť silové pole $\vec{F} : \mathbb{M} \to \mathbb{V}_3$ je spojité (jeho souřadnicové funkce jsou spojité) na oblasti $\mathbb{M}$ a $\mathcal{K} \subset \mathbb{M}$ je křivka v oblasti $\mathbb{M}$. Elementární práce dW vykonaná silou $\vec{F}$ na elementu dráhy ds (křivky $\mathcal{K}$) je rovna skalárnímu součinu síly $\vec{F}$ a elementárního posunutí $d\,\mathbf{x}$. Toto posunutí je ve směru tečného vektoru křivky $\mathcal{K}$ a jeho velikost je rovna elementu dráhy ds, po které síla působí, tj.

$$\vec{F}\, d\mathbf{x} = (\vec{F}\, \mathbf{t}) ds,$$

[2]Viz I. Šantavý: Mechanika.

kde $\mathbf{t}$ je jednotkový tečný vektor křivky $\mathcal{K}$. Je-li $X = X(t)$, $t \in \langle a, b\rangle$, parametrizace křivky $\mathcal{K}$, potom je vektor $\mathbf{t} = \frac{1}{|X'(t)|}X'(t)$ jejím jednotkovým tečným vektorem a celková **práce silového pole** $\vec{F}$ podél křivky $\mathcal{K}$ je rovna křivkovému integrálu[3]

$$W = \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}} (\vec{F}\,\mathbf{t}) ds = \int_a^b \vec{F}(X(t))X'(t)\, dt. \tag{7}$$

Je-li křivka $\mathcal{K}$ uzavřená, tj. $X(a) = X(b)$, potom integrál

$$C = \oint_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\mathbf{x} \tag{8}$$

nazýváme **cirkulace vektorového pole**. Kroužkem na integrálu se značí integrál přes uzavřenou křivku.

Je zřejmé, že integrál (7) závisí na orientaci křivky $\mathcal{K}$, která je určena orientací tečny, tedy tečným vektorem $X'(t)$.

Příklad 10. *Počítejme integrál*

$$\int_{\mathcal{K}} (-y, x)\, d\mathbf{x},$$

kde $\mathcal{K}$ je kružnice z příkladu 4, tedy cirkulaci vektorového pole $\vec{F}(x, y) = (-y, x)$ po kružnici $x^2 + y^2 = r^2$.

Pro kružnici určenou bodovou funkcí $X(t) = [r\cos t, r\sin t]$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je tečný vektor $X'(t) = r(-\sin t, \cos t)$ a integrál

$$r^2 \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t)(-\sin t, \cos t) dt = r^2 \int_0^{2\pi} dt = 2\pi r^2.$$

Pro kružnici určenou bodovou funkcí $Y(\bar{t}) = [r\sin \bar{t}, r\cos \bar{t}]$, $\bar{t} \in \langle 0, 2\pi\rangle$ je tečný vektor $Y'(\bar{t}) = r(\cos \bar{t}, -\sin \bar{t})$, tj. kružnice je opačně orientovaná a integrál

$$r^2 \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t)(\cos t, -\sin t) dt = -r^2 \int_0^{2\pi} dt = -2\pi r^2$$

má opačné znaménko oproti předchozímu.

Příklad 11. *Mějme bod M o hmotnosti m v silovém poli $\vec{F}$. Podle 2. Newtonova pohybového zákona je síla $\vec{F}$ (při konstanní hmotnosti bodu M) úměrná zrychlení, tj. $\vec{F} = m\mathbf{a} = m\mathbf{v}'$. Potom v (7) je*

$$W = \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{K}} \vec{F}\, \mathbf{v}\, dt = \int_{\mathcal{K}} m\, \mathbf{v}'\mathbf{v}\, dt = \frac{m}{2} \int_{\mathcal{K}} \frac{d}{dt}(\mathbf{v}\mathbf{v})\, dt = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2.$$

[3]Tento integrál je v literatuře nazýván křivkový integrál 2. druhu, nebo křivkový integrál vektorové funkce.

Tedy změna kinetické energie hmotného bodu je rovna práci silového pole $\vec{F}$.

Potenciální vektorové pole

Vektorové pole $\vec{F}$ na oblasti $\mathbb{M}$ nazýváme **potenciální vektorové pole**, jestliže existuje skalární funkce U v oblasti $\mathbb{M}$ taková, že

$$\vec{F}(X) = \operatorname{grad} U(X)\,,\ X \in \mathbb{M}. \tag{9}$$

Funkci U nazýváme **potenciál vektorového pole** $\vec{F}$. Vektor grad $U(X)$ je gradientem funkce U. Jeho souřadnice budeme psát ve tvaru

$$P(X) = \frac{\partial U(X)}{\partial x}\,,\ Q(X) = \frac{\partial U(X)}{\partial y}\,,\ R(X) = \frac{\partial U(X)}{\partial z}.$$

Dosaďme pole (9) do integrálu (7)

$$\begin{aligned} W &= \int_a^b \operatorname{grad} U(X(t)) \cdot X'(t)\,dt = \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial U(X(t))}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial U(X(t))}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial U(X(t))}{\partial z} z'(t) \right) dt = \\ &= \int_a^b \frac{dU(X(t))}{dt} dt = U(B) - U(A), \end{aligned} \tag{10}$$

kde $A = X(a)$, $B = X(b)$ jsou krajní body křivky $\mathcal{K}$.

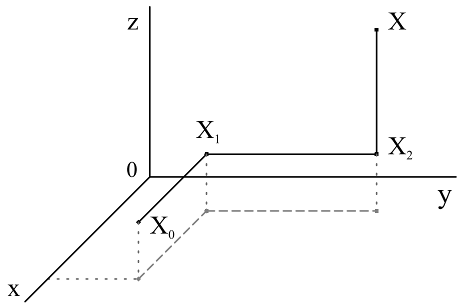
Potenciál U potenciálního pole $\vec{F}$ je analogií k primitivní funkci funkce jedné proměnné. Vzorec (10) je pak analogií k Newtonovu-Leibnizovu vzorci.

Nechť vektorové pole $\vec{F}$ je spojité v oblasti $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ (resp. $\mathbb{R}^2$), potom následující tři tvrzení jsou ekvivalentní:

1. Vektorové pole $\vec{F}$ je potenciální.
2. Křivkový integrál
$$\int_{\mathcal{K}} \vec{F}\,d\mathbf{x}$$
nezávisí na křivce $\mathcal{K} \subset \mathbb{M}$.
3. Cirkulace pole $\vec{F}$ po každé uzavřené křivce $\mathcal{K} \subset \mathbb{M}$ je nulová.

Třetí tvrzení říká, že práce potenciálního pole $\vec{F}$ po uzavřené křivce v oblasti $\mathbb{M}$ je nulová, tj. je zde splněn zákon zachování energie, energie zde ani nevzniká, ani nezaniká. Takové pole se také nazývá **konzervativní pole**.

Druhé tvrzení říká, že práce potenciálového pole nezávisí na křivce, ale pouze na jejích krajních bodech. Proto můžeme potenciál U najít jako funkci horní meze X integrálu z potenciálního vektorového pole $\vec{F} = (P, Q, R)$ po libovolné křivce. Za křivku zvolíme lomenou čáru $X_0X_1X_2X$, kde $X_0 = [x_0, y_0, z_0]$, $X_1 = [x, y_0, z_0]$, $X_2 = [x, y, z_0]$, $X = [x, y, z]$, obr. Potom



Nezávislost křivkového integrálu na křivce

$$
\begin{aligned}
U(X) - U(X_0) &= \int_{X_0X_1} \vec{F}\, d\mathbf{x} + \int_{X_1X_2} \vec{F}\, d\mathbf{x} + \int_{X_2X} \vec{F}\, d\mathbf{x} = \\
&= \int_{x_0}^{x} \vec{F}(t, y_0, z_0)(1, 0, 0)\, dt + \int_{y_0}^{y} \vec{F}(x, t, z_0)(0, 1, 0)\, dt + \\
&+ \int_{z_0}^{z} \vec{F}(x, y, t)(0, 0, 1)\, dt \\
U(X) &= U(X_0) + \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\, dt.
\end{aligned}
$$

Cirkulaci potenciálního pole můžeme také počítat bez potenciálu, a to pomocí Greenova vzorce.

Greenova věta

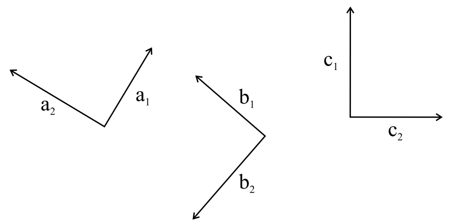
Než přistoupíme k formulaci Greenovy věty připomeneme některé základní pojmy, které k tomu budeme potřebovat.

1. Jestliže křivka $\mathcal{K}$ je dána parametrizací $X = X(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$, a přitom $X(a) = X(b)$, říkáme, že **křivka $\mathcal{K}$ je uzavřená**.

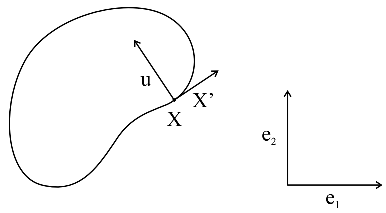
2. Je-li křivka $\mathcal{K}$ uzavřená a neprotíná se, tj. pro $t_1, t_2 \in \langle a, b \rangle$, $t_1 \neq t_2$, je $X(t_1) = X(t_2)$ jen tehdy, když jedno z čísel t_1, t_2 je rovno a a druhé b, říkáme, že **křivka $\mathcal{K}$ je jednoduchá**.

3. Jednoduchá rovinná uzavřená křivka $\mathcal{K}$ rozdělí rovinu na dvě části – vnitřek $\operatorname{Int} \mathcal{K}$ a vnějšek $\operatorname{Ext} \mathcal{K}$ křivky $\mathcal{K}$. **Vnitřek křivky** $\mathcal{K}$ se nazývá ta z podmnožin roviny, která je omezená.

4. Říkáme, že **rovina je orientovaná**, jestliže jsme množinu všech bází roviny rozdělili do dvou tříd tak, že dvě báze patří do stejné třídy, právě když determinant matice přechodu od jedné báze ke druhé je kladný a jestliže jsme jednu z těchto tříd prohlásili za kladnou. Přitom provedené rozdělení do tříd můžeme názorně popsat tak, že dvě báze patří do stejné třídy, můžeme-li jednu bázi z druhé dostat spojitým pohybem v rovině. Na obr. patří do jedné třídy báze $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ a $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$, do druhé třídy patří báze $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$.



Orientace roviny



Orientace uzavřené křivky

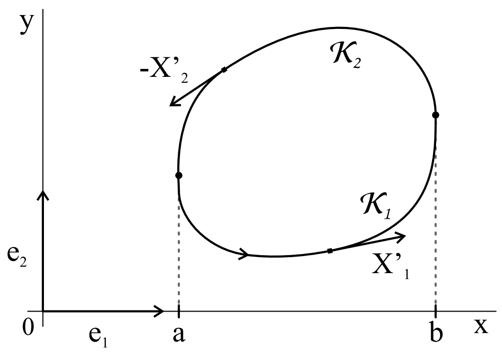
5. Říkáme, že jednoduchá uzavřená křivka $\mathcal{K}$ daná parametrizací X je **kladně orientovaná křivka**, jestliže v libovolném bodě $X(t)$ vektor $\mathbf{u}$, který doplňuje vektor $X'(t)$ na kladnou bázi roviny, směřuje dovnitř křivky $\mathcal{K}$. Např. na obr. při orientaci roviny dané bází e_1, e_2 je křivka $\mathcal{K}$ orientovaná kladně. Kdybychom změnili orientaci roviny, nebo směr probíhání křivky, byla by orientována záporně.

Greenova věta. *Nechť $\mathcal{K}$ je jednoduchá uzavřená křivka v $\mathbb{R}^2$, která je kladně orientovaná. Nechť funkce $P = P(x, y)$ a $Q = Q(x, y)$ mají spojité parciální derivace na vnitřku $\operatorname{Int} \mathcal{K}$ křivky $\mathcal{K}$. Potom platí*

$$\oint_{\mathcal{K}} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_{\operatorname{Int} \mathcal{K}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy. \tag{11}$$

Vzorec (11) převádí výpočet křivkového integrálu po uzavřené rovinné křivce na výpočet dvojného integrálu přes její vnitřek. Vzorec publikoval anglický matematik George Green (1793-1841). Protože je to vzorec důležitý, dříve než uvedeme jeho použití, naznačíme, jak lze k němu dojít.

Pro jednoduchost se omezíme na případ, kdy množina $\operatorname{Int}\mathcal{K}$ je konvexní a její hranice neobsahuje úsečku.



Ke Greenově větě

Potom hranice množiny $\operatorname{Int}\mathcal{K}$ je složena z grafů dvou funkcí $y = \varphi_1(x)$ a $y = \varphi_2(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Jestliže je rovina orientovaná a $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2$ je kladná báze, vidíme, že má-li být křivka $\mathcal{K}$ orientovaná kladně, musíme ji rozdělit na dvě části. Podle obrázku

$$\mathcal{K}_1 : X_1(t) = [t, \varphi_1(t)]\,, \quad \mathcal{K}_2 : X_2(t) = [t, \varphi_2(t)]\,,\ t \in \langle a, b\rangle\,.$$

Nyní

$$\int_{\mathcal{K}_1} P(x,y)\,dx = \int_a^b P(t,\varphi_1(t))\,dt\,,\ \int_{\mathcal{K}_2} P(x,y)\,dx = -\int_a^b P(t,\varphi_2(t))\,dt. \qquad (12)$$

Oba integrály ve (12) sečteme

$$\oint_{\mathcal{K}} P(x,y)\,dx = \int_a^b (P(t,\varphi_1(t)) - P(t,\varphi_2(t)))\,dt. \qquad (13)$$

Počítejme nyní dvojný integrál přes vnitřek křivky $\mathcal{K}$

$$\iint_{\operatorname{Int}\mathcal{K}} \frac{\partial P(X)}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \Big[P(t,y)\Big]_{\varphi_1(t)}^{\varphi_2(t)} dt = \int_a^b (P(t,\varphi_2(t)) - P(t,\varphi_1(t)))\,dt. \qquad (14)$$

Porovnáním integrálu (13) a (14) dostáváme

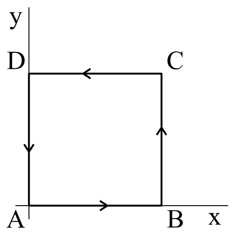
$$\oint_{\mathcal{K}} P(x,y)\,dx = -\iint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{K}} \frac{\partial P}{\partial y} dx\,dy. \tag{15}$$

Kdybychom křivku $\mathcal{K}$ vyjadřovali pomocí funkcí proměnné y, dostali bychom analogicky

$$\oint_{\mathcal{K}} Q(x,y)\,dy = \iint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{K}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx\,dy. \tag{16}$$

Sečtením (15) a (16) dostaneme Greenův vzorec (11).

Příklad 12. *Počítejme cirkulaci vektorového pole $\vec{F} = ((1-x^2)y,\,(1+y^2)x)$ přes jednotkový čtverec $ABCD$, který je kladně orientovaný, viz obr. Čtverec je uzavřená lomená čára.*



K příkladu 12

Abychom se vyhnuli parametrizaci všech čtyř stran čtverce, použijeme Greenův vzorec, potom

$$\oint_{\mathcal{K}} \vec{F}\,d\mathbf{x} = \iint_{\mathrm{Int}\,\mathcal{K}} (1+y^2-1+x^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y^2)dx\right) dy = \frac{2}{3}.$$

Příklad 13 - Laplaceův operátor. *Nechť funkce $f = f(x,y)$ je spojitá a má spojité parciální derivace do druhého řádu na množině $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Zobrazení

$$\Delta : f \to \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

nazýváme **Laplaceův operátor**.

Označíme-li $P = -\frac{\partial f}{\partial y}$ *a* $Q = \frac{\partial f}{\partial x}$, *potom*

$$\oint_{\mathcal{K}} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\mathcal{K}} -\frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial x}dy, \tag{17}$$

kde $\mathcal{K}$ *je hranice množiny* $\mathbb{M}$. *Je-li křivka* $\mathcal{K}$ *parametrizovaná obloukem* s, *je vektor* $(dx, dy) = (\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})$ *její jednotkový tečný vektor a vektor* $\boldsymbol{n} = (\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$ *k němu kolmý je jejím vektorem normálovým. V integrálu ve vzorci (17) vpravo je tedy skalární součin vektoru gradient funkce* f *a normálového vektoru* $\boldsymbol{n}$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)(dy, -dx) = \operatorname{grad} f \cdot \mathbf{n}$$

a to je derivace funkce f *podle jednotkového vektoru* $\mathbf{n}$, *kterou jsme značili* $\frac{d\,f}{d\,\mathbf{n}}$. *Použitím Greenova vzorce bude mít vzorec (17) tvar*

$$\iint_{\mathbb{M}} \Delta f\,dx\,dy = \oint_{\mathcal{K}} \frac{d\,f}{d\,\mathbf{n}}\,ds.$$

Obsah rovinné oblasti

Obsah S omezené rovinné oblasti $\mathbb{M}$ je roven dvojnému integrálu

$$S = \iint_{\mathbb{M}} dx\,dy.$$

Použijeme Greenův vzorec, kde

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right).$$

Potom odpovídající vektorové pole je $\vec{F} = (-\frac{1}{2}y,\ \frac{1}{2}x)$.

Je-li $\mathbb{M} = \operatorname{Int}\mathcal{K}$, pro obsah S oblasti $\mathbb{M}$ zřejmě platí

$$S = \frac{1}{2}\oint_{\mathcal{K}} (x\,dy - y\,dx). \tag{18}$$

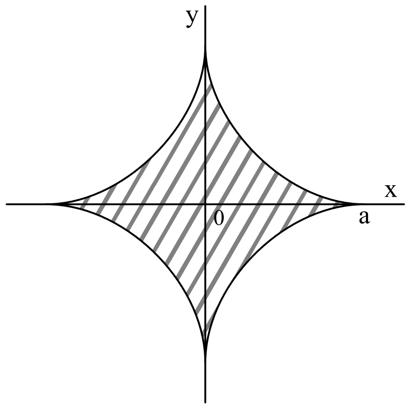
Provedeme-li v integrálu (18) substituci do polárních souřadnic $x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, jsou diferenciály

$$dx = \cos\varphi\,d\varrho - \varrho\sin\varphi\,d\varphi\,,\ \ dy = \sin\varphi\,d\varrho + \varrho\cos\varphi\,d\varphi\,.$$

Potom pro obsah oblasti $\mathbb{M}$ dostáváme známý vzorec

$$S = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{K}} \varrho^2 d\varphi.$$

Příklad 14. *Počítejme obsah vnitřku asteroidy, tj. křivky dané implicitní rovnicí* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$, *nebo parametrizací* $X(t) = [a\cos^3 t, a\sin^3 t]$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.



Asteroida

Použijeme vzorec (18) na oblast v 1. kvadrantu, tj. počítáme čtyřnásobek obsahu podle (18)

$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\, 3a\cos^2 t\sin t) dt =$$
$$= 6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\, dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

Postačující podmínka pro potenciální pole

Z Greenova vzorce (11) vyplývá postačující podmínka pro to, aby vektorové pole $\vec{F} = (P, Q)$ bylo potenciální. Než ji vyslovíme, řekněme ještě jednu definici.

Oblast $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$ nazýváme **jednoduše souvislou**, právě když je tato oblast souvislá a když vnitřek každé jednoduché uzavřené křivky $\mathcal{K}$ z $\mathbb{M}$ je také v $\mathbb{M}$.

Postačující podmínka potenciálnosti pole. *Mají-li souřadnicové funkce P, Q spojité parciální derivace na jednoduše souvislé množině $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^2$ a platí-li*

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \tag{19}$$

v $\mathbb{M}$, potom pole $\vec{F} = (P, Q)$ je v $\mathbb{M}$ potenciální.

Rotace vektorového pole

Postačující podmínka potenciálnosti pro prostorové pole, analogická podmínce (19) je:

Mají-li souřadnicové funkce P, Q, R vektorového pole $\vec{F}$ spojité parciální derivace na jednoduše souvislé oblasti $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ a platí pro ně

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0\,, \ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0\,, \ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0, \tag{20}$$

v $\mathbb{M}$, potom pole $\vec{F} = (P, Q, R)$ je v $\mathbb{M}$ potenciální.

Funkce ve (20) jsou souřadnicovými funkcemi vektorového pole na oblasti $\mathbb{M}$, které se nazývá **pole rotace** vektorového pole $\vec{F}$ a značí se $\operatorname{rot} \vec{F}$. Tedy

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\,, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\,, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right). \tag{21}$$

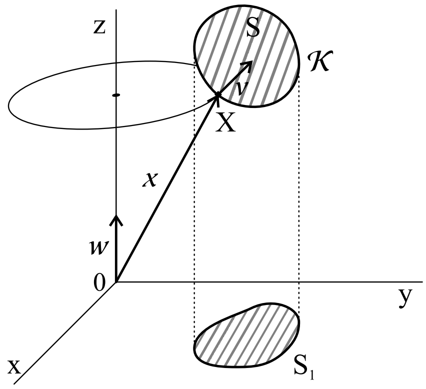
Obychom si oba vzorce (20) a (21) ozřejmili, uveďme příklad pole rychlosti proudící kapaliny.

Příklad 15. *Mějme vektorové pole rychlostí $\mathbf{v}$ proudící kapaliny, která se otáčí kolem osy o úhlovou rychlostí w, vektor $\mathbf{w}$ úhlové rychlosti má směr osy rotace. Hledejme cirkulaci pole $\mathbf{v}$ po uzavřené rovinné křivce $\mathcal{K}$. Obsah jejího vnitřku je S. Zvolíme osu o za osu z kartézské soustavy souřadnic, ve které $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w} = (0, 0, w)$ a radiusvektor bodu X křivky $\mathcal{K}$ je $\mathbf{x} = (x, y, z)$. Potom pole*

$$\mathbf{v} = \mathbf{w} \times \mathbf{x} = (-wy, wx, 0)$$

má cirkulaci

$$C = w \oint_{\mathcal{K}} (-y\,dx + x\,dy). \tag{22}$$



Rotace rychlostního pole

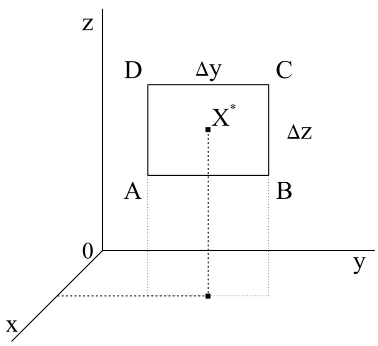
Porovnáme-li integrál (22) se vzorcem (18) pro obsah rovinné oblasti, vidíme, že cirkulace pole $\mathbf{v}$ *je rovna dvojnásobku obsahu* S_1 *vnitřku kolmého průmětu křivky* $\mathcal{K}$ *do roviny* xy, *tj.*

$$C = w2S_1 = w2S\cos\alpha,$$

kde α *je úhel vektoru* $\mathbf{n}$ *normály roviny křivky* $\mathcal{K}$ *a vektoru* $\mathbf{w}$. *Ve vzorci (22) je* $w\cos\alpha = w_n$ *kolmý průmět vektoru* $\mathbf{w}$ *do jednotkové normály* $\mathbf{n}$. *Ze vzorce (22) vyplývá, že cirkulace rychlostního pole* $\mathbf{v}$ *závisí na průmětu vektoru úhlové rychlosti* $\mathbf{w}$, *tj.*

$$C = 2Sw_n \implies w_n. \tag{23}$$

Nyní označme osy kartézské soustavy souřadnic x_1, x_2, x_3 a analogicky i souřanice pole i bodů. Tedy $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ je libovolné vektorové pole se spojitou parciální derivací na jednoduše souvislé množině $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$. Kolem libovolného bodu $X^* = [x_1^*, x_2^*, x_3^* \in \mathbb{M}$ zvolíme obdélník v $\mathbb{M}$, který je v rovině kolmé na osu x_i, $i = 1, 2, 3$, a jeho strany mají délky Δx_i, $i = 1, 2, 3$.



K výpočtu souřadnic vektoru rotace

Počítejme cirkulaci vektorového pole $\vec{F}$ přes obdélník $ABCD$ jehož rovina je kolmá na osu x_1. Podle Greenova vzorce je

$$C_1 = \oint_{ABCD} F_2\,dx_2 + F_3\,dx_3 = \iint_{ABCD} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) dx_2\,dx_3 =$$
$$= \int_{x_2^*-\frac{\Delta x_2}{2}}^{x_2^*+\frac{\Delta x_2}{2}} \left(\int_{x_3^*-\frac{\Delta x_3}{2}}^{x_3^*+\frac{\Delta x_3}{2}} \left(\frac{\partial F_3(x_1^*, x_2, x_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2(x_1^*, x_2, x_3)}{\partial x_3}\right) dx_3\right) dx_2.$$

Dvakrát použijeme větu o střední hodnotě funkce, tj. existuje bod $\widetilde{X} = [x_1^*, c, d]$ v obdélníku $ABCD$ takový, že

$$C_1 = \left(\frac{\partial F_3(\widetilde{X})}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2(\widetilde{X})}{\partial x_3}\right) \Delta x_2 \Delta x_3.$$

Bod X^* byl libovolný bod v poli $\vec{F}$. Jestliže obsah $\Delta S = \Delta x_2 \Delta x_3$ obdélníka $ABCD$ se blíží nule, tj. obdélník se zmanšuje na bod X^*, i bod $\widetilde{X}$ se blíží k bodu X^*. Podle (23) je kolmý průmět nějakého vektoru $\mathbf{w}$ do osy x_1 (do vektoru normály roviny $ABCD$)

$$w_1 = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{C_1}{\Delta S} = \frac{\partial F_3(X^*)}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2(X^*)}{\partial x_3}.$$

Cyklickou záměnou dostaneme zbývající dva výrazy pro souřadnice vektoru rotace v bodě X^*

$$w_2 = \frac{\partial F_1(X^*)}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3(X^*)}{\partial x_1},\ w_3 = \frac{\partial F_2(X^*)}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1(X^*)}{\partial x_2}.$$