Obsah

Kapitola 1

Matice

Maticí $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) rozumíme soustavu mn čísel uspořádaných do m řádků a n sloupců:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \tag{1.1}$$

a_{ij} nazýváme prvek matice na místě (i, j), tedy v i-tém řádku a j-tém sloupci. Místo (1.1) píšeme také stručně $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$.

Prvky matice jsou obvykle čísla. Jsou-li všechna reálná, mluvíme o reálné matici, jsou-li komplexní, mluvíme o matici komplexní. Pokud nebude v dalším uvedeno jinak, budeme pracovat s komplexními maticemi a přívlastek komplexní budeme vynechávat. Matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ se rovnají, jsou-li stejného typu a na odpovídajících si místech mají stejné prvky, t.j. $a_{ij} = b_{ij}$ pro všechna i, j.

Matice o jediném řádku nebo jediném sloupci budeme také nazývat *vektory* (řádkové nebo sloupcové). Pro označení vektorů budeme obvykle používat písmena malé abecedy a jejich prvky budeme indexovat jediným indexem, tedy např. $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)$. Matici (libovolného typu), jejíž všechny prvky jsou rovny 0, budeme nazývat *nulovou* a značit $\boldsymbol{O}$. Pro nulový vektor (řádkový i sloupcový) budeme používat symbol $\boldsymbol{o}$.

Je-li $\boldsymbol{A}$ matice typu (m, n), kde $m = n$, nazývá se *čtvercová n-tého řádu*. Hlavní diagonálou čtvercové matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ n-tého řádu rozumíme n-tici jejích prvků $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$. Významnou roli mezi čtvercovými maticemi mají matice trojúhelníkové a diagonální. Čtvercová matice $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ n-tého řádu se nazývá *horní trojúhelníková*, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i > j$, $i, j = 1, \dots n$, *dolní trojúhelníková*, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i < j$, $i, j = 1, \dots n$ a *diagonální*, je-li $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, \dots n$. Diagonální matice je tedy současně horní i dolní trojúhelníková. Například matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

je horní trojúhelníková,

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

je dolní trojúhelníková,

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

je diagonální. Pro diagonální matici $\boldsymbol{A}$ s diagonálními prvky $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ zavádíme také označení $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Diagonální matice, jejíž diagonální prvky jsou rovny 1, se nazývá *jednotková* a značí $\boldsymbol{E}$.

Diagonální matice je zvláštním případem matice *blokově diagonální*. Jsou-li $\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{A}_{22}, \ldots, \boldsymbol{A}_{nn}$ čtvercové matice (ne nutně stejného řádu), pak matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O}_{12} & \ldots & \boldsymbol{O}_{1n} \\ \boldsymbol{O}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \ldots & \boldsymbol{O}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{O}_{n1} & \boldsymbol{O}_{n2} & \ldots & \boldsymbol{A}_{mn} \end{pmatrix}$$

nazýváme blokově diagonální. Zde $\boldsymbol{O}_{ij}$ jsou nulové matice, jejichž typ je určen řády matic $\boldsymbol{A}_{ii}$ a $\boldsymbol{A}_{jj}$. I pro blokově diagonální matici $\boldsymbol{A}$ zavedeme zkrácený zápis

$$\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{A}_{11}, \ldots \boldsymbol{A}_{nn}\right).$$

Nyní budeme definovat základní algebraické operace s maticemi.

1.1 Operace s maticemi

Definice. Jsou-li $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ matice téhož typu (m, n), definujeme jejich *součet* $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ jako matici $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ typu (m, n), pro níž

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Definice. Je-li $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ matice typu (m, n) a α libovolné komplexní číslo, pak α*-násobkem* matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme matici $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ typu (m, n), pro níž

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$

Maticově zapisujeme $\boldsymbol{B} = \alpha\boldsymbol{A}$, místo $(-1)\boldsymbol{A}$ budeme psát $-\boldsymbol{A}$ a místo $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$ budeme psát $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$.

Příklad 1.1 Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

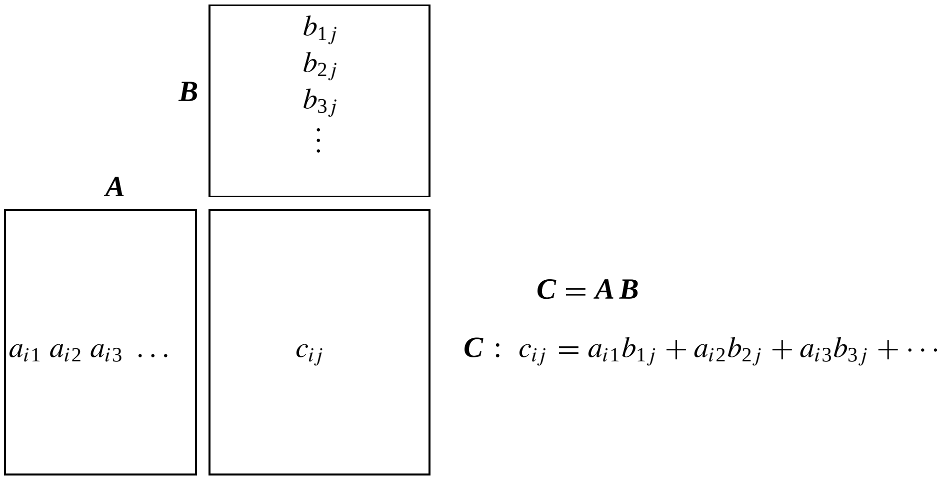
Pak

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad 3\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 16 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix}.$$

Sčítání, odčítání a skalární násobek matic jsou tedy definovány „po jednotlivých prvcích“. Definice násobení matic má odlišný charakter.

Definice. Je-li $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ matice typu (m, p) a $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ matice typu (p, n), pak definujeme jejich součin $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ jako matici $\boldsymbol{C} = (c_{ij})$ typu (m, n), pro níž

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\, b_{kj}, \quad i = 1, \ldots, m, \; j = 1, \ldots, n.$$



Obr. 1.1 Násobení matic.

Výpočet součinu matic $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ znázorňuje obr. 1.1. Je z něj patrné a lze i formálně ukázat (věta 1.1), že pro výpočet prvků v k-tém sloupci matice $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ nepotřebujeme celou matici $\boldsymbol{B}$, ale vystačíme jen s jejím k-tým sloupcem.

Věta 1.1 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, p) a $\boldsymbol{B}$ matice typu (p, n). Uvažujme sloupce matice $\boldsymbol{B}$ jako matice typu $(p, 1)$ a označme je pořadě $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2, \dots, \boldsymbol{B}_n$. Označme dále $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ a sloupce matice $\boldsymbol{C}$ označme $\boldsymbol{C}_1,\ \boldsymbol{C}_2, \dots, \boldsymbol{C}_n$ $\big($jde o matice typu $(m, 1)\big)$. Pak*

$$\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}_k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

Důkaz. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ a $\boldsymbol{C}_j = (c_{ij})$ pro příslušné indexy i, j. Pak jak (1.2), tak i vztah $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ jsou ekvivalentní požadavkům

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}\, b_{jk}, \quad i = 1, \dots m,\ k = 1, \dots, n. \qquad \triangle$$

Z důkazu předešlé věty vyplývá, že platí i tvrzení obrácené.

Věta 1.2 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, p), nechť $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2, \dots, \boldsymbol{B}_n$ jsou matice typu $(p, 1)$ a nechť $\boldsymbol{C}_k = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}_k$ pro $k = 1, \dots, n$. Nechť dále $\boldsymbol{B}$ je matice, jejíž sloupce jsou $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2, \dots, \boldsymbol{B}_n$ a $\boldsymbol{C}$ matice, jejíž sloupce jsou $\boldsymbol{C}_1,\ \boldsymbol{C}_2, \dots, \boldsymbol{C}_n$. Pak $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$.*

Vlastnosti sčítání a násobení matic uvedeme ve dvou souhrnných větách. Jde vlastně o řadu na sobě nezávislých tvrzení se zcela odlišnými předpoklady na typy jednotlivých matic. Věty je tedy třeba chápat tak, že v každém tvrzení předpokládáme takové typy matic na levé straně rovnosti, že všechny použité operace mají smysl.

Věta 1.3 *Pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ vhodného typu platí*

(a) $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

(b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + (\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})$

(c) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C}$

(d) $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$

(e) $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$

Důkaz. Podle definice rovnosti matic je třeba prověřit, že matice na obou stranách rovností jsou téhož typu a na odpovídajících pozicích mají stejné prvky. To je v tvrzeních (a) i (b) snadno viditelné, neboť jde o důsledek analogických vlastností čísel.

Jsou-li v tvrzení (c) matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ typu (m, p) a matice $\boldsymbol{C}$ typu (p, n), pak na obou stranách rovnosti jsou matice typu (m, n) a protože

$$\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}+b_{ik})\,c_{kj}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,c_{kj}+\sum_{k=1}^{p}b_{ik}\,c_{kj},$$

jsou obě strany totožné. Tvrzení (d) vyplyne analogicky.

Pokud je v tvrzení (e) matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, p), $\boldsymbol{B}$ typu (p, r) a $\boldsymbol{C}$ typu (r, n), pak $(\boldsymbol{AB})\,\boldsymbol{C}$ i $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$ jsou typu (m, n). Ověření rovnosti jejich odpovídajících prvků

$$\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}\,b_{kl}\right)c_{lj} \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{p}a_{ik}\left(\sum_{l=1}^{r}b_{kl}\,c_{lj}\right)$$

na pozici (i, j) vyžaduje nejdříve „roznásobení“ obou závorek (celkem $2pr$ násobení) a potom porovnání sčítanců se stejnými indexy. Viz např. [15]. △

Věta 1.4 *Pro matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ vhodného typu a libovolná čísla α, β platí*

(a) $\alpha(\beta\boldsymbol{A})=(\alpha\beta)\boldsymbol{A}$

(b) $(\alpha+\beta)\boldsymbol{A}=\alpha\boldsymbol{A}+\beta\boldsymbol{A}$

(c) $\alpha(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\alpha\boldsymbol{A}+\alpha\boldsymbol{B}$

(d) $\boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{B})=\alpha(\boldsymbol{AB})=(\alpha\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}$

Důkaz. Všechny rovnosti jsou snadným důsledkem asociativnosti násobení čísel a distributivnosti číselného násobení vůči sčítání. △

Z věty (1.3) vyplývá, že sčítání matic, stejně tak jako sčítání čísel, je komutativní a asociativní a také distributivní vůči maticovému násobení. Násobení matic pak je na základě tvrzení (e), rovněž ve shodě s násobením čísel, asociativní operací. Přes tyto analogie však nelze úplně všechny vlastnosti sčítání a násobení čísel přenést do maticového oboru. Následující příklad ukáže, že *maticové násobení není komutativní*, tedy že pro libovolné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nemusí platit $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. To ostatně není příliš překvapivé, neboť existence součinu $\boldsymbol{AB}$ nemusí ani zaručovat, že součin $\boldsymbol{BA}$ je definován. Je užitečné si uvědomit, že $\boldsymbol{AB}$ i $\boldsymbol{BA}$ budou mít smysl právě tehdy, bude-li $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) a $\boldsymbol{B}$ typu (n, m). Odtud je vidět, že oba součiny povedou na matici téhož typu právě tehdy, budou-li $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ čtvercové matice téhož řádu. Ani v tomto případě si však součiny $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{BA}$ nemusejí být rovny.

Příklad 1.2 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pak

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{kdežto} \quad BA = \begin{pmatrix} -8 & 16 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Příklad současně ukazuje jinou vlastnost maticového násobení, která nemá analogii v násobení čísel: součin dvou *nenulových* matic může být matice nulová.

Také je třeba mít na paměti, že v maticových rovnostech nelze krátit. Není totiž obecně pravda, že pokud pro matice A, B a C platí $AC = BC$, pak platí také $A = B$. Ukazuje to následující příklad.

Příklad 1.3 Je-li

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

pak

$$AC = BC = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

přestože je očividně $A \neq B$.

Vzhledem k asociativnosti maticového sčítání a násobení není třeba při součtu ani při součinu tří nebo více matic psát závorky. Distributivní zákon umožňuje nejen „roznásobovat závorky“, ale i „vytýkat“. Je však třeba si uvědomit, že vytýkání má dvojí podobu: „před“ závorku a „za“ závorku.

Je zřejmé že součin jakékoliv matice s maticí nulovou vhodného typu je matice nulová. Roli jednotky při násobení matic hraje jednotková matice E. Platí

Věta 1.5 *Je-li A matice typu (m, n), E_m jednotková matice m-tého řádu, E_n jednotková matice n-tého řádu, pak $A\,E_n = E_m\,A = A$.*

Důkaz. Označíme-li prvky jednotkové matice e_{ij}, pak $e_{ii} = 1$ a $e_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Je tedy

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, e_{kj} = a_{ij} \quad \text{a} \quad \sum_{k=1}^{m} e_{ik}\, a_{kj} = a_{ij}.$$

Odtud již obě rovnosti plynou. △

Matice B se nazývá *komutující* (též záměnná) s maticí A, jestliže platí

$$AB = BA.$$

Je zřejmé, že komutující matice mohou existovat pouze ke čtvercovým maticím. Příkladem komutující matice je jednotková matice E. Ta komutuje s libovolnou čtvercovou maticí téhož řádu.

Násobíme-li mezi sebou matice některých speciálních typů, výpočet se často zjednoduší. Tak například součinem diagonálních matic stejného řádu je opět matice diagonální (viz cvičení 1.2), součinem horních (resp. dolních) trojúhelníkových matic téhož typu je matice horní (resp. dolní) trojúhelníková (cvičení 1.4). Pro blokově diagonální matice platí

Věta 1.6 *Nechť* $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n)$ *a* $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{B}_n)$ *jsou blokově diagonální matice a nechť pro* $i = 1, \dots, n$ *jsou* $\boldsymbol{A}_i$ *a* $\boldsymbol{B}_i$ *čtvercové matice stejného řádu. Pak matice* $\boldsymbol{AB}$ *je blokově diagonální a platí*

$$\boldsymbol{AB} = \operatorname{diag}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{B}_1, \dots, \boldsymbol{A}_n\boldsymbol{B}_n).$$

Důkaz. Prvek na pozici (i, j) v matici $\boldsymbol{AB}$ je součtem součinů prvků i-tého řádku matice $\boldsymbol{A}$ a j-tého řádku matice $\boldsymbol{B}$. Tyto součiny budou nenulové pouze tehdy, budou li se oba činitelé nacházet ve shodně umístěných diagonálních blocích. Odtud plyne, že matice $\boldsymbol{AB}$ bude blokově diagonální a že její i-tý blok bude $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_i$. △

Součin $\boldsymbol{AA}$ je definován pro libovolnou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$; v dalším jej budeme značit $\boldsymbol{A}^2$. Analogicky $\boldsymbol{A}^n$ bude značit $\boldsymbol{AA}\cdots\boldsymbol{A}$, celkem n-krát. Kromě toho pro libovolnou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ definujeme $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{E}$.

Dále zavedeme pojem transponované a symetrické matice.

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je matice typu (m, n). Matici $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ typu (n, m) nazýváme *transponovanou* k matici $\boldsymbol{A}$, pokud

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots n, \ j = 1, \dots m.$$

Transponovanou matici k matici $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\boldsymbol{A}^T$. Matice $\boldsymbol{A}$, pro kterou platí $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, se nazývá *symetrická*.

Příklad 1.4 Je-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

pak

$$\boldsymbol{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{C}^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Operace transponování a sčítání jsou záměnné, pro libovolné matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stejného typu tedy platí

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T,$$

což je z definic obou operací ihned vidět. Také se snadno ověří, že

$$\left(\boldsymbol{A}^T\right)^T = \boldsymbol{A}.$$

Pro násobení pak platí

Věta 1.7 *Je-li* $\boldsymbol{A}$ *matice typu* (m, p) *a* $\boldsymbol{B}$ *matice typu* (p, n), *pak*

$$(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T.$$

Důkaz. Označíme-li $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} = (c_{ij})$ a $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = (d_{ij})$, pak $\boldsymbol{C}^T$ i $\boldsymbol{D}$ jsou typu (n, m) a pro $i = 1, \dots n$ a $j = 1, \dots, m$ platí

$$c_{ji} = \sum_{k=1}^{p} a_{jk}\, b_{ki} = \sum_{k=1}^{p} b_{ki}\, a_{jk} = d_{ij},$$

tedy $\boldsymbol{C}^T = \boldsymbol{D}$. △

Z příkladů 1.2 a 1.3 je také vidět, že nelze očekávat, že by bylo možné rozumným způsobem definovat dělení matic. S pojmem „dělení matic" se opravdu nesetkáme. Existuje však třída matic, pro níž lze definovat operaci, která v jistém smyslu dělení nahrazuje.

Definice. Matici $\boldsymbol{B}$ nazýváme *inverzní* maticí k matici $\boldsymbol{A}$, pokud

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}. \tag{1.3}$$

Inverzní matici k matici $\boldsymbol{A}$ budeme značit $\boldsymbol{A}^{-1}$ a matici, k níž existuje inverzní matice budeme nazývat *regulární*. Čtvercové matice, které nejsou regulární, budeme nazývat *singulární*.

Příklad 1.5 Matice $\boldsymbol{E}$ je regulární a $\boldsymbol{E}^{-1} = \boldsymbol{E}$, neboť $\boldsymbol{EE} = \boldsymbol{E}$.

Z rovností (1.3) vyplývá, že matice $\boldsymbol{AB}$ i $\boldsymbol{BA}$ musejí být stejného typu a tedy regulární matice $\boldsymbol{A}$ musí být čtvercová a k ní inverzní matice bude také čtvercová a stejného řádu jako $\boldsymbol{A}$. Neznamená to však, že inverzní matice existuje ke každé čtvercové matici. Ihned je vidět, že nulová matice není regulární. Existují však i nenulové čtvercové matice, které nejsou regulární.

Příklad 1.6 Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kdyby matice

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

byla inverzní k $\boldsymbol{A}$, pak by

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} b_{21} & b_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

musela být rovna $\boldsymbol{E}$, což však pro žádnou matici $\boldsymbol{B}$ nelze splnit. Matice $\boldsymbol{A}$ tedy není regulární.

Ze vztahu (1.3) dále vyplývá, že je-li matice $\boldsymbol{B}$ inverzní k matici $\boldsymbol{A}$, pak matice $\boldsymbol{A}$ je inverzní k matici $\boldsymbol{B}$. Platí tedy

Věta 1.8 *Pro libovolnou regulární matici* $\boldsymbol{A}$ *je*

$$\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}.$$

Kritéria pro stanovení regulárnosti matice odvodíme v následujích kapitolách. Již nyní však můžeme ukázat, že za předpokladu regulárnosti matice $\boldsymbol{A}$ stačí, aby inverzní matice splňovala pouze jednu ze dvou rovností (1.3).

Věta 1.9 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je regulární matice a nechť pro matici* $\boldsymbol{X}$ *platí buď*

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E} \quad \text{nebo} \quad \boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}.$$

Pak $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Důkaz. Ukážeme, že pokud pro regulární matici $\boldsymbol{A}$ splňuje matice $\boldsymbol{X}$ rovnici $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$, pak splňuje také rovnici $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}$, čímž podle definice bude inverzní maticí k matici $\boldsymbol{A}$. Platí

$$\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{EXA} = \big(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\big)\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{A}^{-1}\big(\boldsymbol{AX}\big)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{EA} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}.$$

Analogicky se ověří i alternativní tvrzení. △

Podobnou úvahou dokážeme, že k žádné matici nemohou existovat dvě různé inverzní matice.

Věta 1.10 *Existuje-li k matici* $\boldsymbol{A}$ *inverzní matice, pak je určena jednoznačně.*

Důkaz. Předpokládejme, že k matici $\boldsymbol{A}$ existují matice $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ tak, že platí

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{AC} = \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{E}.$$

Pak platí

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BE} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{AC}) = (\boldsymbol{BA})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{EC} = \boldsymbol{C},$$

tedy matice $\boldsymbol{B}$ a $\boldsymbol{C}$ jsou totožné. △

Věta 1.9 převádí výpočet inverzní matice na řešení maticové rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$. Podle vět (1.1) a (1.2) můžeme neznámou matici $\boldsymbol{X}$ počítat postupně po jednotlivých sloupcích. To znamená, že v případě matice n-tého řádu budeme místo rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$ pro neznámou matici $\boldsymbol{X}$ o sloupcích $\boldsymbol{X}_1, \dots, \boldsymbol{X}_n$ řešit n-tici rovnic $\boldsymbol{AX}_i = \boldsymbol{E}_i$, $i = 1, \dots, n$, pro neznámé *vektory* $\boldsymbol{X}_i$, kde $\boldsymbol{E}_i$ jsou sloupce matice $\boldsymbol{E}$. Vhodnou metodu řešení popíšeme v následujícím odstavci.

Vztah maticové inverze k operacím transpozice a součinu vyjadřují následující dvě věty.

Věta 1.11 *Je-li* $\boldsymbol{A}$ *regulární matice, pak* $\boldsymbol{A}^T$ *je také regulární a platí*

$$\big(\boldsymbol{A}^T\big)^{-1} = \big(\boldsymbol{A}^{-1}\big)^T.$$

Důkaz. Tvrzení plyne z rovností

$$\boldsymbol{A}^T\big(\boldsymbol{A}^{-1}\big)^T = \big(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\big)^T = \boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{E} \quad \text{a}$$
$$\big(\boldsymbol{A}^{-1}\big)^T\boldsymbol{A}^T = \big(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}\big)^T = \boldsymbol{E}^T = \boldsymbol{E}.$$

V obou rovnostech jsme při úpravách použili větu 1.7 o transpozici maticového součinu. △

Věta 1.12 *Nechť* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *jsou regulární matice téhož řádu. Pak* $\boldsymbol{AB}$ *i* $\boldsymbol{BA}$ *jsou také regulární a platí*

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1} \quad a \quad (\boldsymbol{BA})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}.$$

Důkaz. Protože

$$\big(\boldsymbol{AB}\big)\big(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\big) = \boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{BB}^{-1}\big)\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{AEA}^{-1} = \boldsymbol{AA}^{-1} = \boldsymbol{E} \quad \text{a}$$
$$\big(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\big)\big(\boldsymbol{AB}\big) = \boldsymbol{B}^{-1}\big(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\big)\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{EB} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E},$$

jsou matice $\boldsymbol{AB}$ a $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ navzájem inverzní. Analogicky se dokáže, že i matice $\boldsymbol{BA}$ a $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$ jsou navzájem inverzní. △

1.2 Soustavy lineárních rovnic

Jedno z nejdůležitějších využití matic nacházíme při popisu a řešení soustav lineárních rovnic. Soustavou lineárních rovnic rozumíme m-tici rovnic tvaru

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Označíme-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pak místo (1.4) můžeme psát stručněji

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}.$$

Matici $\boldsymbol{A}$ nazýváme maticí soustavy (1.4), vektor $\boldsymbol{b}$ vektorem pravých stran. *Rozšířenou maticí soustavy* (1.4) pak rozumíme matici $\overline{\boldsymbol{A}}$, která vznikne přidáním vektoru $\boldsymbol{b}$ pravých stran jako $(n+1)$-ho sloupce k matici $\boldsymbol{A}$:

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \tag{1.5}$$

Je-li vektor pravých stran $\boldsymbol{b}$ nulový, nazýváme soustavu *homogenní*.

Nejčastěji používanou metodou řešení soustavy (1.4) je Gaussova eliminační metoda. Spočívá v převodu dané soustavy na soustavu, jejíž množina řešení je totožná s množinou řešení soustavy původní a která má tvar

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \cdots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \cdots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ a'_{33}x_3 + \cdots + a'_{3n}x_n &= b'_3 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.6}$$

V soustavě (1.6) nemusí být všechny koeficienty a'_{ii} nutně různé od nuly. Platí však, že pokud jsou v i-té rovnici koeficienty a_{ii}, $a_{i,i+1}, \ldots, a_{ik}$ rovny nule pro $k > i$, pak i ve všech následujících rovnicích jsou nulové koeficienty $a_{j,i+1}, \ldots, a_{jk}$ $(j > i)$. Pro úpravu soustavy (1.4) na tvar (1.6) můžeme použít kterékoliv z následujících operací:

- K jedné rovnici přičteme jakýkoliv násobek jiné rovnice.
- Změníme pořadí rovnic.
- Kteroukoliv rovnici vynásobíme nenulovým číslem.

Tyto operace budeme souhrnně nazývat *elementární*. Jak vyplyne z věty 1.14, jejich použití nemění řešení původní soustavy. Upravená soustava (1.6) přitom umožňuje snadný výpočet neznámých počínaje poslední rovnicí a následujícím postupným dosazováním do rovnic předcházejících. Strategie volby elementárních operací při úpravě soustavy (1.4) na tvar (1.6) závisí na řadě faktorů a v tomto textu se jí nebudeme zabývat. Podrobnosti lze nalézt například v [4] nebo [5]. Protože soustava (1.4) je jednoznačně charakterizována svou rozšířenou maticí (1.5), je vhodné elementární operace provádět s řádky této matice a teprve v závěru přejít opět k zápisu ve tvaru rovnic. Možný postup ukážeme na konkrétním příkladě. V něm r_i značí i-tý řádek příslušné rozšířené matice.

Příklad 1.7 Vypočtěte všechna řešení soustavy

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= -2\\
2x_1 + 4x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 &= -6\\
-3x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 - 3x_5 &= 0\\
3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 + 3x_5 &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\
2 & 4 & -3 & -1 & 1 & -6\\
-3 & 1 & 7 & 3 & -3 & 0\\
3 & 1 & -5 & -1 & 3 & 0
\end{array}\right)
\left|\begin{array}{c}
r_1\\
r_2 := r_2 - 2r_1\\
r_3 := r_3 + 3r_1\\
r_4 := r_4 - 3r_1
\end{array}\right|
\Rightarrow
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\
0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -2\\
0 & 4 & 1 & 0 & 0 & -6\\
0 & -2 & 1 & 2 & 0 & 6
\end{array}\right)
\left|\begin{array}{c}
r_1\\
r_2\\
r_3 := r_3 - 2r_2\\
r_4 := r_4 + 1r_2
\end{array}\right|
\Rightarrow$$

$$\Rightarrow
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\
0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -2\\
0 & 0 & -1 & -2 & 2 & -2\\
0 & 0 & 2 & 3 & -1 & 4
\end{array}\right)
\left|\begin{array}{c}
r_1\\
r_2\\
r_3\\
r_4 := r_4 + 2r_3
\end{array}\right|
\Rightarrow
\left(\begin{array}{rrrrr|r}
1 & 1 & -2 & -1 & 1 & -2\\
0 & 2 & 1 & 1 & -1 & -2\\
0 & 0 & -1 & -2 & 2 & -2\\
0 & 0 & 0 & -1 & 3 & 0
\end{array}\right)$$

Poslední matice odpovídá soustavě

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= -2\\
2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 &= -2\\
x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 2\\
- x_4 + 3x_5 &= 0
\end{aligned}$$

V poslední rovnici může být neznámá x_5 zvolena zcela libovolně: $x_5 = t,\ t \in \mathbf{R}$. Pro x_4 pak z této rovnice vychází $x_4 = 3t$. Dosadíme x_4 a x_5 do předposlední rovnice a vypočteme x_3: $x_3 = 2 - 4t$. Z druhé rovnice pak dostaneme $x_2 = -2 + 4t$ a z první $x_1 = 2 - 3t$. Celkem tedy

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2-3t\\ -2+t\\ 2-4t\\ 3t\\ t \end{pmatrix} \quad t \in \mathbf{R}.$$

V dalším příkladu uvedeme výsledek pro homogenní soustavu rovnic, na nějž se později budeme často odvolávat.

Příklad 1.8 Uvažujme soustavu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned}$$

kde $m < n$. Po úpravě do tvaru (1.6) bude možné v poslední rovnici zvolit nejméně jednu neznámou zcela libovolně. Soustava tak kromě na první pohled zřejmého nulového řešení má ještě nekonečně mnoho řešení nenulových.

Protože jednotlivé kroky Gaussovy eliminace pro řešení soustav lineárních rovnic budeme výhradně zapisovat pomocí rozšířené matice soustavy, bude účelné zavést pojem elementární operace i pro matice. Získáme tím i účinný nástroj pro zkoumání dalších vlastností matic.

Definice. *Elementární řádkovou operací* v matici $\boldsymbol{A}$ nazýváme kteroukoliv z následujících operací:

- K jednomu řádku matice $\boldsymbol{A}$ přičteme jakýkoliv násobek řádku jiného.
- V matici $\boldsymbol{A}$ prohodíme dva její řádky.
- Jakýkoliv řádek matice $\boldsymbol{A}$ vynásobíme nenulovým číslem.

Analogicky definujeme i *elementární sloupcové operace*. Matici $\boldsymbol{B}$ nazveme *řádkově ekvivalentní* s maticí $\boldsymbol{A}$ a značíme $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, jestliže $\boldsymbol{B}$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ použitím konečně mnoha elementárních řádkových operací.

Téměř samozřejmé je pak následující tvrzení.

Věta 1.13 *Je-li matice $\boldsymbol{A}$ řádkově ekvivalentní s maticí $\boldsymbol{B}$, pak $\boldsymbol{B}$ je řádkově ekvivalentní s $\boldsymbol{A}$.*

Důkaz. Větu stačí dokázat pro každou ze tří elementárních operací samostatně.
(a) Pokud matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ přičtením α-násobku j-tého řádku k i-tému, $\boldsymbol{A}$ dostaneme z $\boldsymbol{B}$ odečtením α-násobku j-tého řádku od řádku i-tého.
(b) Pokud matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ výměnou j-tého řádku s i-tým, pak i $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ výměnou j-tého řádku s i-tým.
(c) Pokud matice $\boldsymbol{B}$ vznikla z $\boldsymbol{A}$ vynásobením j-tého řádku nenulovým číslem α, pak $\boldsymbol{B}$ vznikne z $\boldsymbol{A}$ vynásobením j-tého řádku číslem $1/\alpha$. △

Přímým důsledkem právě dokázané věty je následující tvrzení, které zaručuje, že použitím Gaussovy eliminační metody se řešení soustavy nezmění.

Věta 1.14 *Nechť $\overline{\boldsymbol{A}}$ a $\overline{\boldsymbol{B}}$ jsou rozšířené matice dvou soustav lineárních rovnic a nechť matice $\overline{\boldsymbol{A}}$ a $\overline{\boldsymbol{B}}$ jsou řádkově ekvivalentní. Pak obě soustavy mají stejnou množinu řešení.*

Důkaz. Z definice elementárních operací vyplývá, že každé řešení „původní“ soustavy je i řešením soustavy vzniklé aplikací kterékoliv elementární operace. Předcházející věta pak zajišťuje, že také každé řešení „upravené“ soustavy je řešením soustavy původní. Obě soustavy tak mají stejnou množinu řešení. △

Samostatnou zmínku zasluhují soustavy, jejichž matice je čtvercová. Podle níže uvedeného schématu (v něm $\times$ značí libovolné číslo – může být i 0) lze elementárními řádkovými úpravami každou čtvercovou matici převést na matici horní trojúhelníkovou.

$$
\begin{matrix}
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times
\end{matrix}
\sim
\begin{matrix}
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times
\end{matrix}
\sim
\begin{matrix}
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & 0 & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & 0 & \times & \times & \cdots & \times\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & \times & \times & \cdots & \times
\end{matrix}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{matrix}
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & 0 & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & 0 & 0 & \times & \cdots & \times\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & \times & \cdots & \times
\end{matrix}
\sim \quad \cdots \quad \sim
\begin{matrix}
\times & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & \times & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & 0 & \times & \times & \cdots & \times\\
0 & 0 & 0 & \times & \cdots & \times\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \times
\end{matrix}
\tag{1.7}
$$

Budeme-li nyní navíc předpokládat, že v poslední matici jsou všechny diagonální prvky nenulové, můžeme dalšími elementárními řádkovými operacemi, tentokrát prováděnými od posledního řádku „směrem nahoru“, matici převést až na jednotkovou. Schématicky lze postup znázornit takto:

$$
\begin{matrix}
\times & \times & \cdots & \times & \times\\
0 & \times & \cdots & \times & \times\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & \times & \times\\
0 & 0 & \cdots & 0 & \times
\end{matrix}
\sim
\begin{matrix}
1 & \times & \cdots & \times & \times\\
0 & 1 & \cdots & \times & \times\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & \times\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{matrix}
\sim
\begin{matrix}
1 & \times & \cdots & \times & 0\\
0 & 1 & \cdots & \times & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{matrix}
\sim
\begin{matrix}
1 & \times & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1
\end{matrix}
\sim \cdots \sim \boldsymbol{E}.
$$

Uvedený postup se nazývá *Gaussova–Jordanova eliminace*. Následující příklad ukazuje konkrétní výpočet.

Příklad 1.9 Řešme soustavu $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, kde

$$
\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 2\\ -3\\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}.
$$

Řešení. Jednotlivé kroky Gaussovy–Jordanovy eliminace jsou

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & -3\\ 1 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2 & -3 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{array}\right) \sim
$$

$$
\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).
$$

Soustava má tedy řešení

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ve větě 1.20 na straně 20 ukážeme, že Gaussova–Jordanova eliminace je možná právě tehdy, je-li výchozí matice regulární. Již nyní můžeme dokázat následující kritérium o vlastnostech řešení homogenní soustavy lineárních rovnic a pomocí něj pak důležité kritérium regulárnosti matice.

Věta 1.15 *Soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ se čtvercovou maticí $\boldsymbol{A}$ má pouze nulové řešení právě tehdy, je-li matice $\boldsymbol{A}$ řádkově ekvivalentní s trojúhelníkovou maticí s nenulovými diagonálními prvky.*

Důkaz. Podle (1.7) je matice $\boldsymbol{A}$ řádkově ekvivalentní jisté trojúhelníkové matici $\boldsymbol{T} = (t_{ij})$ n-tého řádu. Jsou-li všechny její diagonální prvky nenulové, pak Gaussova–Jordanova eliminace dává jediné řešení, a to $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Pokud však pro nějaké k je $t_{kk} = 0$, pak v ekvivalentní soustavě $\boldsymbol{Tx} = \boldsymbol{o}$ posledních $n-k$ rovnic splníme volbou $x_{n-k} = 0, \ldots, x_n = 0$ a tyto hodnoty pak dosadíme do prvních k rovnic. Vznikne tak homogenní soustava s $k-1$ neznámými, která má podle příkladu 1.8 nenulové řešení. △

Věta 1.16 *Každá regulární matice je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Je-li $\boldsymbol{A}$ regulární matice, pak po vynásobení obou stran rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva dostaneme ekvivalentní vztah $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, tedy pro regulární matice $\boldsymbol{A}$ má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ pouze nulové řešení. Podle předešlé věty odtud plyne, že $\boldsymbol{A}$ je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí. △

1.3 Maticové rovnice a výpočet inverzní matice

Algoritmus Gaussovy eliminace je ve spojení s větami 1.1 a 1.2 rozšiřitelný i na maticové rovnice typu $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, kde $\boldsymbol{X}$ je matice o více sloupcích. Jsou-li totiž $\boldsymbol{X}_1, \ldots \boldsymbol{X}_n$ sloupce matice $\boldsymbol{X}$ a $\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_n$ sloupce matice $\boldsymbol{B}$, pak podle uvedených vět je rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ ekvivalentní n-tici rovnic $\boldsymbol{AX}_1 = \boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{AX}_n = \boldsymbol{B}_n$. V každé z těchto rovnic je neznámou *vektor*, jde tedy o soustavy tvaru (1.4), které můžeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Vzhledem k tomu, že všechny soustavy budou mít touž matici soustavy $\boldsymbol{A}$ a jejich rozšířené matice se budou lišit pouze v posledním sloupci, lze je upravovat společně. Společnou matici všech soustav $\boldsymbol{A}$ rozšíříme najednou o všechny pravé strany $\boldsymbol{B}_1, \ldots, \boldsymbol{B}_n$, tedy o matici $\boldsymbol{B}$ a zjednodušíme pomocí vhodných elementárních operací.

Příklad 1.10 Řešte maticovou rovnici $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ -2 & -5 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Matice $\boldsymbol{X} = (x_{ij})$ bude typu $(3, 3)$; označíme-li její sloupce $\boldsymbol{X}_1$, $\boldsymbol{X}_2$, $\boldsymbol{X}_3$, pak rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ je ekvivalentní trojici rovnic

$$\boldsymbol{AX}_1 = \boldsymbol{B}_1, \quad \boldsymbol{AX}_2 = \boldsymbol{B}_2, \quad \boldsymbol{AX}_3 = \boldsymbol{B}_3,$$

kde $\boldsymbol{B}_1,\ \boldsymbol{B}_2,\ \boldsymbol{B}_3$ jsou sloupce matice $\boldsymbol{B}$. Gaussovu eliminační metodu použijeme na společnou rozšířenou matici těchto tří rovnic:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & -5 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & 1 & 5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 2 & 4 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Pro sloupec $\boldsymbol{X}_1 = (x_{11}, x_{21}, x_{31})^T$ tedy platí

$$\begin{aligned} x_{11} + 2x_{21} + 4x_{31} &= -1 \\ x_{21} + x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

Odtud vypočteme

$$\boldsymbol{X}_1 = \begin{pmatrix} -1-2p \\ -p \\ p \end{pmatrix}, \quad p \in \mathbf{R}.$$

Pro sloupec $\boldsymbol{X}_2 = (x_{12}, x_{22}, x_{32})^T$ platí

$$\begin{aligned} x_{12} + 2x_{22} + 4x_{32} &= 0 \\ x_{22} + x_{32} &= 1, \end{aligned}$$

odkud

$$\boldsymbol{X}_2 = \begin{pmatrix} -2-2q \\ 1-q \\ q \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbf{R}.$$

Pro sloupec $\boldsymbol{X}_3 = (x_{13}, x_{23}, x_{33})^T$ platí

$$\begin{aligned} x_{13} + 2x_{23} + 4x_{33} &= 4 \\ x_{23} + x_{33} &= 1, \end{aligned}$$

odkud

$$\boldsymbol{X}_3 = \begin{pmatrix} 2-2r \\ 1-r \\ r \end{pmatrix}, \quad r \in \mathbf{R}.$$

Celkem

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1-2p & -2-2q & 2-2r \\ -p & 1-q & 1-r \\ p & q & r \end{pmatrix}, \quad p, q, r \in \mathbf{R}.$$

Řešení rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ se výrazně zjednoduší, je-li matice $\boldsymbol{A}$ řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí. Pro rozšířenou matici $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{B})$ pak dostaneme $(\boldsymbol{A} \,|\, \boldsymbol{B}) \sim (\boldsymbol{E} \,|\, \boldsymbol{C})$, což na základě věty 1.14 znamená, že původní rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ je ekvivalentní s rovnicí $\boldsymbol{EX} = \boldsymbol{C}$ a tedy má řešení $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$. Vypočteme je Gaussovou–Jordanovou eliminací, aniž bychom museli odděleně řešit rovnice pro jednotlivé sloupce matice $\boldsymbol{X}$.

Příklad 1.11 Řešte maticovou rovnici $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & -6 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & -8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Jednotlivé kroky Gaussovy–Jordanovy eliminace pro rozšířenou matici $(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B})$ ukazuje následující výpočet.

$$(\boldsymbol{A}\,|\,\boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & -1 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & -2 & -2 & -8 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -8 & 8 \\ 0 & -6 & 7 & -5 & -11 & 11 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 7 & -3 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) = (\boldsymbol{E}|\boldsymbol{X}).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podle věty 1.9 je inverzní matice k regulární matici $\boldsymbol{A}$ řešením rovnice $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$. Ve spojení s větou 1.20, podle které každá matice řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí je regulární, tak získáváme účinný způsob výpočtu inverzní matice: pomocí Gassovy–Jordanovy eliminace vyřešíme maticovou rovnici $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$.

Příklad 1.12 Vypočtěte inverzní matici k matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Řešme nejdříve rovnici $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 7 & 0 & -6 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 7 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Odtud

$$X = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Protože po vynásobení vychází $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}$, je

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -7 & -4 & 3 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dodejme, že podle vět 1.9 a 1.20, kterou dokážeme na straně 20, není kontrola součinu $\boldsymbol{XA}$ třeba.

Uvedená metoda řešení maticových rovnic tvaru $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ se nedá přímo použít na rovnice, kde neznámá matice $\boldsymbol{X}$ je známou maticí násobena z opačné strany, tedy na rovnice typu $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$. Věty 1.1 a 1.2, na nichž byl výpočet založen, totiž neumožňují rozložit součin $\boldsymbol{XA}$ na jednotlivé sloupce matice $\boldsymbol{X}$ a rozklad na sloupce matice $\boldsymbol{A}$ nemá pro řešení žádný význam. Stačí však přejít k rovnosti trasponovaných matic na obou stranách a použít větu 1.7; rovnice pak přejde do tvaru $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{B}^T$, na kterou již lze metodu založenou na řádkových úpravách rozšířené matice $(\boldsymbol{A}^T \mid \boldsymbol{B}^T)$ použít. Vypočteme tak matici $\boldsymbol{X}^T$, z níž po transpozici získáme $\boldsymbol{X}$.

Příklad 1.13 Řešte rovnici $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. „Transponovaná“ rovnice $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{X}^T = \boldsymbol{B}^T$ má rozšířenou matici

$$(\boldsymbol{A}^T \mid \boldsymbol{B}^T) = \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

pro níž postupně dostáváme

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 3 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na uvedené dva typy maticových rovnic lze pak úpravami, založenými na vztazích z vět 1.3 a 1.4, převést celou řadu dalších maticových rovnic. Postup ilustrujeme příkladem.

Příklad 1.14 Řešte maticovou rovnici $2\boldsymbol{AX} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{X}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $2\boldsymbol{AX}-\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$, odkud vytknutím dostaneme $(2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$. Vzniklou rovnici lze po výpočtu matic $2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}$ a $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ řešit Gaussovou–Jordanovou eliminací:

$$2\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ 2 & 1 & 2\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 0\\ 1 & 5 & -5\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix};$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr}3 & -4 & 2 & -3 & 2 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 1 & 5 & -5\\ 2 & 0 & -1 & 3 & 4 & 2\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}2 & 0 & -1 & 3 & 4 & 2\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -7\\ 0 & 0 & 31 & -31 & 0 & -62\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -2\end{array}\right).$$

Je tedy

$$\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}.$$

1.4 Elementární matice

Elementární operace byly původně zavedeny jako početní prostředek pro zjednodušení soustav lineárních rovnic a pak rozšířeny i na matice. Nyní uvidíme, že každou ze tří elementárních operací bude možné ekvivalentně nahradit násobením vhodně zvolenou maticí.

Definice. Matici $\boldsymbol{L}$ nazýváme *elementární*, jestliže vznikla nějakou elementární operací z jednotkové matice.

Podobně jako elementární operace je možné i elementární matice rozdělit na řádkové a sloupcové. Při řešení maticových rovnic obvykle vystačíme s řádkovými úpravami a tedy i s řádkovými elementárními maticemi. Přívlastek řádková budeme proto v těchto situacích vynechávat.

Věta 1.17 *Nechť $\boldsymbol{L}_1$ je elementární matice m-tého řádu, která vznikla elementární řádkovou operací O_1, nechť $\boldsymbol{L}_2$ je elementární matice n-tého řádu, která vznikla elementární sloupcovou operací O_2 a nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m,n). Pak $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ řádkovou operací O_1 a $\boldsymbol{AL}_2$ je matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ sloupcovou operací O_2.*

Každou elementární *řádkovou* operaci lze tedy ekvivalentně nahradit vynásobením odpovídající elementární maticí *zleva* a každou elementární *sloupcovou* operaci lze ekvivalentně nahradit vynásobením odpovídající elementární maticí *zprava*.

Důkaz. Stačí pouze vypočíst součiny $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{AL}_2$ pro jednotlivé elementární matice. Tento snadný úkon přenecháváme čtenáři. △

Příklad 1.15

$$\boldsymbol{L}_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{L}_2=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{L}_3=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}\quad \text{a}\quad \boldsymbol{L}_4=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

jsou příklady elementárních matic třetího řádu. Matice $\boldsymbol{L}_1$ reprezentuje přičtení dvojnásobku prvního řádku ke druhému, matice $\boldsymbol{L}_2$ prohození prvního a druhého řádku, matice $\boldsymbol{L}_3$ vynásobení třetího řádku čtyřmi, matice $\boldsymbol{L}_4$ přičtení trojnásobku druhého sloupce ke sloupci třetímu.

Z věty 1.17 bezprostředně plyne následující tvrzení. Pomocí něj budeme moci odvodit důležitou a snadno ověřitelnou podmínku pro to, kdy je matice řádkově (případně sloupcově) ekvivalentní s jednotkovou maticí.

Věta 1.18 *Matice $\boldsymbol{A}$ je řádkově (resp. sloupcově) ekvivalentní s jednotkovou maticí právě tehdy, je-li součinem řádkových (resp. sloupcových) elementárních matic.*

Vzhledem k tomu, že ke každé elementární operaci existuje operace inverzní, která je opět elementární operací, nepřekvapí, že každá elementární matice je regulární.

Věta 1.19 *Každá elementární matice je regulární a matice k ní inverzní je opět elementární.*

Důkaz. Pro zjednodušení zápisu uvedeme pouze inverzní matice k těm elementárním maticím, které reprezentují operace s prvním nebo druhým řádkem:

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{L}_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{L}_2^{-1} = \boldsymbol{L}_2.$$

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{L}_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Analogicky vypočteme inverzní matice i pro ostatní případy. △

Věta 1.20 *Čtvercová matice $\boldsymbol{A}$ je regulární právě tehdy, je-li řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí.*

Důkaz. Nechť matice $\boldsymbol{A}$ je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí $\boldsymbol{E}$. Pak je podle věty 1.18 součinem řádkových elementárních matic, které jsou na základě věty 1.19 regulární. Protože součin regulárních matic je opět regulární matice (věta 1.12, strana 10), je i matice $\boldsymbol{A}$ regulární. Obráceně, je-li $\boldsymbol{A}$ regulární matice, pak je podle věty 1.16 řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí. △

Spojením poslední věty s větou 1.18 pak dostaneme další charakterizaci regulárních matic.

Věta 1.21 *Každá regulární matice je součinem konečně mnoha elementárních matic.*

1.5 Cvičení

1.1 Pro matici

$$\boldsymbol{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

vypočtěte $\boldsymbol{R}^2(\alpha)$ a inverzní matici $\boldsymbol{R}^{-1}(\alpha)$ a ukažte, že $\boldsymbol{R}^2(\alpha) = \boldsymbol{R}(2\alpha)$ a $\boldsymbol{R}^{-1}(\alpha) = \boldsymbol{R}(-\alpha)$.

1.2 Odůvodněte, že součinem diagonálních matic $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$ a $\boldsymbol{B} = \operatorname{diag}(b_1, \ldots, b_n)$ je diagonální matice $\boldsymbol{C} = \operatorname{diag}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$. Dále ukažte, že $\boldsymbol{A}^k = \operatorname{diag}(a_1^k, \ldots, a_n^k)$.

1.3 Vypočtěte inverzní matici k diagonální matici $\boldsymbol{D} = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$, kde $d_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, n$.

1.4 Odůvodněte, že součinem dvou horních (resp. dolních) trojúhelníkových matic stejného řádu je opět matice horní (resp. dolní) trojúhelníková.

1.5 Ukažte, že pro libovolnou matici $\boldsymbol{A}$ jsou matice $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ a $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ symetrické.

1.6 Pro matici

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n-tého řádu vypočtěte $\boldsymbol{S}^2$, $\boldsymbol{S}^3, \ldots, \boldsymbol{S}^n$.

1.7 Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná čtvercová matice n-tého řádu, jejíž řádky jsou $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a nechť

$$\boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

je rovněž n-tého řádu. Přesvědčte se, že matice $\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}$ má řádky $\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \ldots, \boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{o}$.

1.8 Vypočtěte všechny matice $\boldsymbol{B}$, pro které $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.9 Ukažte příklad čtvercových matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, pro které $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^2 \neq \boldsymbol{A}^2 + 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2$.

1.10 Odůvodněte, že pokud pro dvě symetrické matice $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ platí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$, pak součin $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ bude opět symetrickou maticí. Dále uveďte příklad takových symetrických matic, jejichž součin nebude symetrickou maticí.

1.11 Ukažte, že pokud jsou $\boldsymbol{A}$ a $\boldsymbol{B}$ regulární komutující matice, potom jsou i $\boldsymbol{A}^{-1}$ a $\boldsymbol{B}^{-1}$ komutující.

1.12 Ukažte, že pro součin matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n), jejíž sloupce jsou $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ a sloupcového vektoru $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)^T$ platí

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{b} = b_1\boldsymbol{a}_1 + b_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + b_n\boldsymbol{a}_n.$$

1.13 Ukažte, že pokud pro matici $\boldsymbol{A}$ platí $\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{E} = \boldsymbol{O}$, pak $\boldsymbol{A}$ je regulární.

1.14 Vypočtěte inverzní matici k matici $\boldsymbol{A}$, je-li:

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.15 Vypočtěte inverzní matici k matici $\boldsymbol{A}$ sudého řádu, je-li:

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

1.6 Řešení

1.3 $\boldsymbol{D}^{-1} = \operatorname{diag}(1/d_1, \ldots, 1/d_n)$.

1.5 Podle věty 1.7 je $\left(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\right)^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$.

1.6 $$\boldsymbol{S}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{S}^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{S}^n = \boldsymbol{S}.$$

1.8 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a+b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R}.$

1.9 Libovolné dvě matice, pro něž $\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$, např. $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$

1.10 $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{AB}$.

1.11 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1} = (\boldsymbol{BA})^{-1} = (\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

1.13 Vypočtěte $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})$.

1.14 a) $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}$; b) $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{4}\boldsymbol{A}$.

1.15 $$\text{a)}\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b)}\quad \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Kapitola 2

Vektory a vektorové prostory

Jednořádkové a jednosloupcové matice jsme v předcházející kapitole nazvali vektory. Řádky a sloupce matic lze tedy rovněž považovat za vektory. Vlastnostmi vektorů se nyní budeme zabývat a využijeme jich pro doplnění dalších vlastností matic. Neomezíme se však pouze na tento speciální typ vektorů. Zavedeme pojem obecného vektorového prostoru tak, aby zahrnoval pro nás nejdůležitější případy řádkových a sloupcových číselných vektorů a zachoval přitom jejich hlavní přednost, tedy možnost popsat každý vektor pomocí „souřadnic“.

Reálný *vektorový prostor* V je neprázdná množina prvků, nazývaných vektory, ve které je definována operace sčítání, která každé dvojici vektorů $\boldsymbol{u} \in V$, $\boldsymbol{v} \in V$ přiřazuje vektor $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in V$ a operace násobení vektorů reálným číslem, která každé dvojici $\alpha \in \mathbf{R}$, $\boldsymbol{u} \in V$ přiřazuje vektor $\alpha\boldsymbol{u} \in V$, přičemž tyto operace mají následující vlastnosti.

(1) $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ pro všechna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$.

(2) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$ pro všechna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w} \in V$.

(3) Existuje vektor $\boldsymbol{o} \in V$, zvaný nulový vektor, tak, že $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{o} = \boldsymbol{v}$ pro všechna $\boldsymbol{v} \in V$.

(4) Ke každému vektoru $\boldsymbol{v} \in V$ existuje jednoznačně určený vektor $-\boldsymbol{v}$ tak, že $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$.

(5) $(\alpha\,\beta)\,\boldsymbol{v} = \alpha\,(\beta\,\boldsymbol{v})$ pro všechna α, $\beta \in \mathbf{R}$ a všechna $\boldsymbol{v} \in V$.

(6) $1\,\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$ pro všechna $\boldsymbol{v} \in V$.

(7) $(\alpha+\beta)\,\boldsymbol{v} = \alpha\,\boldsymbol{v}+\beta\,\boldsymbol{v}$ pro všechna α, $\beta \in \mathbf{R}$ a všechna $\boldsymbol{v} \in V$.

(8) $\alpha\,(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\,\boldsymbol{u}+\alpha\,\boldsymbol{v}$ pro všechna $\alpha \in \mathbf{R}$ a všechna $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in V$.

Analogicky se definuje komplexní vektorový prostor. Vlastnosti reálných a komplexních vektorových prostorů budeme vyšetřovat najednou pod společným názvem vektorový prostor. Termín číslo pak bude v případě reálného vektorového prostoru znamenat reálné číslo, v případě komplexního vektorového prostoru číslo komplexní. Čísla budeme také nazývat skaláry.

Operace sčítání vektorů a násobení vektorů čísly umožňují zavést pojem *lineární kombinace* vektorů. Jsou-li $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ libovolná čísla a $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ libovolné vektory, pak vektor

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$$

nazýváme lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ (s koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$).

Nejdůležitějšími příklady vektorových prostorů jsou prostory reálných a komplexních n-rozměrných *aritmetických vektorů*. Jimi rozumíme n-tice reálných nebo komplexních čísel ve sloupcovém uspořádání, tedy matice typu $(n, 1)$ se sčítáním definovaným stejně jako pro matice typu $(n, 1)$ a násobením čísly také definovaným jako u matic typu $(n, 1)$. Věty 1.3 a 1.4 zajišťují splnění všech vlastností (1)–(8) z definice vektorového prostoru. Prostor reálných aritmetických vektorů značíme $\mathbf{R}^n$ a prostor komplexních aritmetických vektorů značíme $\mathbf{C}^n$.

Příklad 2.1 Uveďme ještě několik dalších příkladů vektorových prostorů. U všech jsou operace sčítání a násobení číslem zavedeny již dříve a splňují vlastnosti (1)–(8) z definice vektorového prostoru.

a) Množina všech reálných matic typu (m, n) tvoří reálný vektorový prostor.

b) Množina P všech polynomů s reálnými koeficienty tvoří reálný vektorový prostor, množina všech polynomů s komplexními koeficienty tvoří komplexní vektorový prostor.

c) Množina všech reálných (resp. komplexních) funkcí se společným definičním oborem tvoří reálný (resp. komplexní) vektorový prostor.

Pokud je podmnožina W vektorového prostoru V také vektorovým prostorem, budeme ji nazývat podprostorem vektorového prostoru V. Ekvivalentně to vyjadřuje následující definice.

Definice. Podmnožinu W vektorového prostoru V nazveme jeho podprostorem, pokud má tyto vlastnosti:

(a) $\boldsymbol{o} \in W$,

(b) pro všechny vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in W$ je $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$,

(c) pro každý skalár α a každý vektor $\boldsymbol{v} \in W$ je $\alpha\boldsymbol{v} \in W$.

Příklad 2.2 Snadno rozpoznatelné jsou následující příklady podprostorů.

a) Množina P_n všech polynomů stupně menšího nebo rovného n je podprostorem vektorového prosoru P všech polynomů.

b) Množina všech symetrických matic n-tého řádu je podprostorem vektorového prostoru všech čtvercových matic řádu n.

c) Množina všech spojitých funkcí na intervalu $\langle a, b\rangle$ je podprostorem vektorového prostoru všech funkcí definovaných na $\langle a, b\rangle$.

Příklad 2.3 Významným příkladem podprostoru je množina všech řešení libovolné homogenní soustavy lineárních rovnic. Pro matici $\boldsymbol{A}$ typu (m, n) a vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ označme $N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$. Pak

(a) evidentně $\boldsymbol{o} \in N(\boldsymbol{A})$;

(b) jsou-li $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$, pak $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$, odkud sečtením a vytknutím dostáváme $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{o}$, tedy $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in N(\boldsymbol{A})$;

(c) je-li $\alpha \in \mathbf{R}$ a $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A})$, pak $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, odkud $\alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{o}$, tedy $\alpha\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A})$.

$N(\boldsymbol{A})$ je tedy podprostorem $\mathbf{R}^n$. Nazývá se *nulovým prostorem* nebo *jádrem* matice $\boldsymbol{A}$.

2.1 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Klíčovým pojmem pro vyšetřování vlastností vektorů je jejich lineární závislost a nezávislost.

Definice. Vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ nazýváme *lineárně závislé*, pokud existují čísla $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ tak, že aspoň jedno z nich je různé od nuly a

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}. \tag{2.1}$$

V opačném případě se vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ nazývají *lineárně nezávislé.*

Vektory $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ jsou tedy lineárně nezávislé právě tehdy, když rovnost (2.1) platí pouze pro $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$.

Příklad 2.4 Vektory

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně nezávislé, neboť rovnost

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \alpha_3\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{o} \tag{2.2}$$

vede na soustavu

$$\begin{aligned} 2\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 &= 0 \\ 3\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0 \\ -\,2\alpha_3 &= 0, \end{aligned}$$

jejímž jediným řešením je $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$.

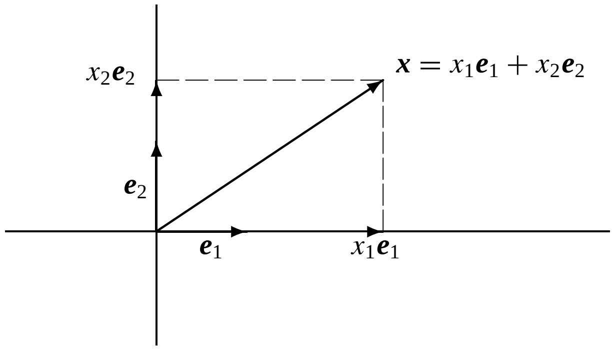
Naopak, vektory

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

jsou lineárně závislé, neboť rovnost (2.2) vede na soustavu

$$\begin{aligned} \alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 &= 0 \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \end{aligned}$$

s nenulovým řešením $\alpha_1 = 2t, \quad \alpha_2 = -t, \quad \alpha_3 = t, \quad t \in \mathbf{R}$.



Obr. 2.1 Souřadná soustava a souřadnice v $\mathbf{R}^2$

2.2 Souřadná soustava a báze

V každém vektorovém prostoru je možné zavést souřadnou soustavu a prvky vektorového prostoru pak popisovat souřadnicemi. Jako motivace pro zavedení souřadné soustavy v obecném vektorovém prostoru nám může sloužit prostor $\mathbf{R}^2$. Nejčastěji používanou souřadnou soustavu tam reprezentují dva vektory $\boldsymbol{e}_1$ a $\boldsymbol{e}_2$ a každý vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^2$ je možné vyjádřit jako jejich lineární kombinaci:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2.$$

Koeficienty x_1, x_2 v této lineární kombinaci jsou pak souřadnicemi vektoru $\boldsymbol{x}$ v souřadné soustavě $E = (\boldsymbol{e}_1, \ \boldsymbol{e}_2)$ a vektor $\boldsymbol{x}$ *jednoznačně* popisují – viz obr. 2.1.

Tatáž myšlenka je použitelná v libovolném vektorovém prostoru V. Souřadná soustava bude tvořena takovými vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, které umožní vyjádřit libovolný vektor $\boldsymbol{x}$ jako jejich lineární kombinaci, a to jednoznačným způsobem:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n. \tag{2.3}$$

To znamená, že množina všech lineárních kombinací vektorů $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ musí splývat s V a navíc musí být pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ koeficienty $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ve vyjádření (2.3) určeny jednoznačně. Přesvědčme se, že tuto jednoznačnost zajistí lineární nezávislost vektorů $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Předpokládejme, že pro lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ a vektor $\boldsymbol{x} \in V$ platí

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + x_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n = y_1\boldsymbol{b}_1 + y_2\boldsymbol{b}_2 + \cdots + y_n\boldsymbol{b}_n.$$

Pak

$$(x_1 - y_1)\boldsymbol{b}_1 + (x_2 - y_2)\boldsymbol{b}_2 + \cdots + (x_n - y_n)\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}. \tag{2.4}$$

Odsud podle definice lineární nezávislosti (strana 25) plyne, že všechny koeficienty v lineární kombinaci na levé straně (2.4) musí být rovny nule:

$$x_1 - y_1 = 0, \ x_2 - y_2 = 0, \ \ldots, \ x_n - y_n = 0, \quad \text{tedy}$$

$$x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \ldots, \ x_n = y_n.$$

Pro zjednodušení formulace definice souřadné soustavy zaveďme nejdříve pojem lineárního obalu.

Definice. Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vektory z vektorového prostoru V, pak jejich *lineárním obalem* nazýváme množinu všech jejich lineárních kombinací, tedy množinu všech vektorů tvaru $\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$, kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jsou libovolná čísla. Značíme jej

$$\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle.$$

Věta 2.1 *Jsou-li $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ vektory z vektorového prostoru V, pak lineární obal $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ je podprostorem V.*

Důkaz. Ověříme, že W má všechny tři vlastnosti z definice podprostoru (strana 24).

(a) $\boldsymbol{o} \in W$, neboť $\boldsymbol{o} = 0 \cdot \boldsymbol{v}_1 + \cdots + 0 \cdot \boldsymbol{v}_n$.

(b) Pokud $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v} \in W$, pak existují čísla $\alpha_1, \ldots \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, tak, že $\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$ a $\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta_n\boldsymbol{v}_n$, odkud $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\boldsymbol{v}_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)\boldsymbol{v}_n$, což znamená, že $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$.

(c) Je-li $\boldsymbol{u} \in W$, pak $\boldsymbol{u} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$ pro jistá čísla $\alpha_1, \ldots \alpha_n$, odkud pro libovolné číslo β plyne $\beta\boldsymbol{u} = \beta\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \beta\alpha_n\boldsymbol{v}_n$ a tedy $\beta\boldsymbol{u} \in W$. △

Definice. Uspořádanou množinu vektorů $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ nazýváme souřadnou soustavou nebo *bází* ve vektorovém prostoru V, je-li B lineárně nezávislá a $\langle B \rangle = V$.

Název souřadná soustava se používá téměř výhradně v geometrických úvahách, kdežto báze se váže spíše k algebraickému prostředí. Jde však o naprosto ekvivalentní pojmy. Naše definice je omezena pouze na případ bází o konečně mnoha prvcích; vektorové prostory, v nichž existuje konečná báze, se nazývají *konečně dimenzionální*. Pokud nebude v dalším uvedeno jinak, budeme pod pojmem vektorový prostor vždy rozumět konečně dimenzionální vektorový prostor.

Příklad 2.5 Bázi vektorového prostoru $\mathbf{R}^n$ tvoří vektory

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jejich lineární nezávislost je patrná ihned a každý vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots x_n)^T \in \mathbf{R}^n$ můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Je tedy $\langle \boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n \rangle = \mathbf{R}^n$ a vektory $\boldsymbol{e}_1, \ldots \boldsymbol{e}_n$ tvoří bázi $\mathbf{R}^n$. Tuto bázi budeme nazývat *standardní*.

Otázku existence báze ve vektorovém prostoru v podstatě řeší tvrzení, že každou lineárně nezávislou množinu lze doplnit na bázi. I když platí pro libovolný vektorový prostor, náš důkaz bude omezen pouze na prostory konečné dimenze.

Věta 2.2 *Nechť S je lineárně nezávislá množina vektorů ve vektorovém prostoru V. Pak existuje množina $S_1 \subset V$ tak, že $S \cup S_1$ je bází prostoru V.*

Důkaz. Nechť $S \subset V$ je lineárně nezávislá množina vektorů. Pokud je S bází V, vezmeme $S_1 = \emptyset$ a jsme hotovi. Není-li S bází V, pak $\langle S \rangle \neq V$ a ve V tedy existuje aspoň jeden nenulový prvek $\boldsymbol{u}_1$, který neleží v $\langle S \rangle$. Protože $\boldsymbol{u}_1$ není lineární kombinací prvků množiny S, je množina $S_1 = S \cup \{\boldsymbol{u}_1\}$ lineárně nezávislá. Pokud je $\langle S_1 \rangle = V$, jsme hotovi. V opačném případě opakujeme předchozí postup. Po konečně mnoha krocích tak dospějeme k bázi prostoru V. △

Základní motivací pro definici báze vektorového prostoru byl požadavek popisovat vektory pomocí jejich souřadnic – viz vztah (2.3). Můžeme tedy vyslovit formální definici souřadnic vektoru vzhledem k uspořádané bázi (to je bázi s pevně určeným pořadím jejích prvků).

Definice. Nechť $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ je uspořádaná báze vektorového prostoru V. *Souřadnicemi* vektoru $\boldsymbol{x} \in V$ v bázi B nazýváme uspořádanou n-tici čísel $(x_1, \ldots, x_n)$, pro která platí

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n.$$

Souřadnice jsou tedy aritmetické vektory a na základě úvahy před definicí báze (strana 26) jsou v dané bázi určeny jednoznačně. Je však zřejmé, při změně báze dojde i ke změně souřadnic. Pokud bude třeba zdůraznit k jaké bázi jsou souřadnice vektoru $\boldsymbol{x}$ vztaženy, použijeme následujícího označení:

$$[\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Vektor na pravé straně (2.5) budeme nazývat *vektor souřadnic* $\boldsymbol{x}$ a vzhledem k dalšímu využití jej budeme vždy zapisovat jako sloupec.

Příklad 2.6 Ze příkladu (2.5) vyplývá, že ve standardní bázi E prostoru $\mathbf{R}^n$ platí pro každý vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$

$$[\boldsymbol{x}]_E = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Nyní ukážeme, že ve vektorovém prostoru s n-prvkovou bází nemůže existovat více než n lineárně nezávislých vektorů. Na základě tohoto tvrzení pak odvodíme, že všechny báze vektorového prostoru mají stejný počet prvků, což umožní zavést pojem dimenze vektorového prostoru.

Věta 2.3 *Nechť V je vektorový prostor s bází $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$ a nechť $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$, kde $m > n$, jsou libovolné vektory z V. Pak $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ jsou lineárně závislé.*

Důkaz. Z vlastností báze vyplývá, že každý z vektorů $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n$. Bude tedy

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= a_{11}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{v}_2 &= a_{12}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \boldsymbol{v}_m &= a_{1m}\boldsymbol{b}_1 + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{b}_n. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Uvažme nyní, kdy bude

$$\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_m\boldsymbol{v}_m = \boldsymbol{o}.$$

Dosazením do tohoto vztahu za $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ z (2.6) dostaneme po úpravě

$$(a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1m}\alpha_m)\,\boldsymbol{b}_1 + \cdots + (a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nm}\alpha_m)\,\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}.$$

Protože vektory $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ jsou lineárně nezávislé, musí být všechny koeficienty v této lineární kombinaci rovny nule:

$$\begin{aligned} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1m}\alpha_m &= 0 \\ &\vdots \\ a_{n1}\alpha_1 + \cdots + a_{nm}\alpha_m &= 0. \end{aligned}$$

V této homogenní soustavě n rovnic pro m neznámých $\alpha_1, \dots \alpha_m$ je $m > n$, takže podle příkladu (1.8) má tato soustava nenulové řešení. To však znamená že vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_m$ jsou lineárně závislé. △

Věta 2.4 *Každé dvě báze vektorového prostoru V mají týž počet prvků.*

Důkaz. Předpokládejme, že $\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n$ a $\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m$ jsou libovolné dvě báze prostoru V. Protože vektory každé z bází jsou lineárně nezávislé, dostáváme dvojnásobným použitím předcházející věty

$$m \le n \quad \text{a} \quad n \le m.$$

Odtud plyne, že $m = n$ a obě báze mají stejný počet prvků. △

I když báze vektorového prostoru není nikdy určena jednoznačně, nezávisí počet jejích prvků na jejím výběru. Následující definice je tedy korektní.

Definice. Počet prvků báze vektorového prostoru V nazýváme *dimenzí* V a značíme $\dim V$.

Připomeňme znovu, že jsme se omezili pouze na ty vektorové prostory, v nichž existují báze o konečně mnoha prvcích. Z věty 2.3 vyplývá, že dimenze vektorového prostoru V je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých vektorů ve V.

Příklad 2.7 Z příkladu 2.5 dostáváme téměř samozřejmý výsledek: $\dim \mathbf{R}^n = n$.

Na závěr tohoto odstavce ještě dokážeme, že při známé dimenzi vektorového prostoru je nalezení jeho báze výrazně jednodušším problémem a dále dvě věty o zachování lineární závislosti, resp. nezávislosti při násobení maticí.

Věta 2.5 *Nechť V je vektorový prostor dimenze n a nechť $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ jsou lineárně nezávislé vektory z V. Pak vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ tvoří bázi V.*

Důkaz. Vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ stačí ukázat, že jejich lineární obal je roven V. Položme $W = \langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ a ukažme, že $W = V$. Je zřejmé, že $W \subset V$, takže stačí ověřit, že $V \subset W$. Zvolme libovolně $\boldsymbol{u} \in V$. Protože $\dim V = n$, jsou podle věty 2.3 vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ lineárně závislé, neboť jich je $n + 1$. Existují tedy čísla $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ tak, že

$$\alpha_0\boldsymbol{u} + \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{o}, \tag{2.7}$$

přičemž aspoň jedno z nich je nenulové. Pokud by bylo $\alpha_0 = 0$, pak by vektory $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ byly lineárně závislé, což podle předpokladu věty není možné. Je tedy $\alpha_0 \ne 0$ a z (2.7) dostáváme

$$\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\alpha_0}\big(\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n\big),$$

neboli vektor $\boldsymbol{u}$ jakožto lineární kombinace vektorů $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ patří do W. To znamená, že $V \subset W$ a důkaz je hotov. △

Věta 2.6 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (m, n) a nechť $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou lineárně závislé vektory z $\mathbf{C}^n$. Pak vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$ jsou rovněž lineárně závislé.*

Důkaz. Z lineární závislosti vektorů $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ vyplývá, že existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_k$, ne všechna nulová, tak, že

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}.$$

Odtud dostáváme po vynásobení obou stran maticí $\boldsymbol{A}$ zleva:

$$\boldsymbol{o} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{o} = \boldsymbol{A}(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k) = \alpha_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k,$$

což znamená, že vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$ jsou rovněž lineárně závislé. △

Věta 2.7 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární matice n-tého řádu a nechť $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ jsou lineárně nezávislé vektory z $\mathbf{C}^n$. Pak vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \dots \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$ jsou rovněž lineárně nezávislé.*

Důkaz. Vyšetřeme, pro která $\alpha_1, \dots \alpha_k$ platí

$$\alpha_1 \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}. \tag{2.8}$$

Úpravou podle vztahů (d) z vět 1.3 a 1.4 dostáváme $\boldsymbol{A}(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k) = \boldsymbol{o}$, odkud vynásobením obou stran maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$ zleva plyne

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}.$$

Vzhledem k předpokladu lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_k$ je poslední rovnost, a tedy i rovnost (2.8) splněna pouze pro $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. To však znamená, že vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_k$ jsou lineárně nezávislé. △

2.3 Skalární součin

Úvahy o skalárním součinu omezíme pouze na aritmetické vektory. Narozdíl od obecného přístupu tak budeme pracovat s konkrétně definovaným vzorcem pro výpočet skalárního součinu, který bude navíc možné převést i do maticové podoby. Je však třeba zdůraznit, že půjde nejen o reálné, ale i komplexní aritmetické vektory a definice skalárního součinu musí tento požadavek zohlednit. Skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ budeme v dalším značit $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Definice. Pro libovolné vektory $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1 \dots, y_n)^T$ z $\mathbf{C}^n$ nebo $\mathbf{R}^n$ definujeme jejich skalární součin vztahem

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \overline{y}_k. \tag{2.9}$$

Věta 2.8 *Skalární součin* (2.9) *má v $\mathbf{C}^n$ i $\mathbf{R}^n$ následující vlastnosti:*

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$ *pro všechny vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$.*

(2) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ *pro všechny vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$.*

(3) $(\alpha \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ *pro všechny vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ a všechna čísla α.*

(4) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geq 0$ *pro všechny vektory* $\boldsymbol{x}$; *rovnost platí jen pro* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

Důkaz. Vlastnosti (1) – (3) vyplývají přímo z (2.9) a vlastnost (4) ze vztahu

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \sum_{k=1}^{n} x_k \, \overline{x}_k = \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2. \tag{2.10}$$

Důsledek 2.1 *Pro libovolný vektor* $\boldsymbol{x}$ *a libovolné číslo* α *platí*

$$(\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Důkaz. Je kombinací vlastností (1) a (3). △

Uvedené čtyři vlastnosti lze také považovat za základ axiomatické definice skalárního součinu v libovolném lineárním prostoru (ne nutně konečné dimenze). Jsou-li některá tvrzení v této kapitole vyslovena pro obecný lineární nebo vektorový prostor V místo $\mathbf{C}^n$ nebo $\mathbf{R}^n$, pak skalárním součinem ve V rozumíme jakékoliv zobrazení $V \times V \to \mathbf{C}$, mající čtyři výše uvedené vlastnosti. Povšimněme si, že skalární součin vektorů $\boldsymbol{x}$ a $\boldsymbol{y}$ v $\mathbf{C}^n$ i $\mathbf{R}^n$ lze vyjádřit též pomocí maticového násobení:

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^T \overline{\boldsymbol{y}}. \tag{2.11}$$

Zde $\overline{\boldsymbol{y}} = (\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n)^T$. Důležitý je vztah skalárního součinu a násobení reálnou maticí.

Věta 2.9 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je reálná čtvercová matice* n*-tého řádu a* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$. *Pak*

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}).$$

Důkaz. Na základě (2.11) je $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^T \overline{\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A}^T)\overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^T (\overline{\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y}}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{y})$. △

Důsledek 2.2 *Pro libovolnou reálnou symetrickou matici* $\boldsymbol{A}$ *a libovolné vektory* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ *platí*

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}). \tag{2.12}$$

Pomocí skalárního součinu zavedeme nyní pojem velikosti vektoru a ortogonálnosti (kolmosti) vektorů.

Definice. Číslo $\sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$ nazýváme velikostí vektoru $\boldsymbol{x}$ a značíme $||\boldsymbol{x}||$. Vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ se nazývají *ortogonální,* jestliže $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Vektory $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ se nazývají *ortonormální,* jestliže

$$(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j) = \left\langle \begin{array}{lll} 1 & \text{pro} & i = j \\ 0 & \text{pro} & i \neq j \end{array} \right. .$$

Bázi tvořenou ortonormálními vektory nazýváme *ortonormální bází.*

Příkladem ortonormální báze v $\mathbf{C}^n$ a $\mathbf{R}^n$ je standardní báze E. Nyní ukážeme, že ortonormální báze existuje v každém nenulovém vektorovém prostoru se skalárním součinem. Nejdříve odvodíme lineární nezávislost libovolné konečné ortonormální množiny.

Věta 2.10 *Každá konečná ortonormální množina je lineárně nezávislá.*

Důkaz. Nechť $\{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k\}$ tvoří ortonormální množinu a nechť

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{o}. \tag{2.13}$$

Vynásobme obě strany rovnice 2.13 skalárně vektorem $\boldsymbol{x}_l$, $1 \le l \le k$. Protože $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_l) = 0$ pro $i \ne l$, dostáváme $\alpha_l\,(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{x}_l) = 0$. Odtud, vzhledem k tomu, že $(\boldsymbol{x}_l, \boldsymbol{x}_l) = 1$, plyne $\alpha_l = 0$ pro $l = 1, \ldots, k$, což znamená lineární nezávislost vektorů $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k$. △

Věta 2.11 *Nechť* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *jsou lineárně nezávislé vektory v* $\mathbf{C}^n$. *Pak existují ortonormální vektory* $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_k$ *tak, že* $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \langle \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_k \rangle$.

Důkaz. Existenci ukážeme matematickou indukcí podle k. Tvrzení je zřejmé pro $k = 1$: stačí položit $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}_1/||\boldsymbol{a}_1||$. Nechť nyní tvrzení platí pro $k-1$ vektorů a nechť vektory $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ jsou lineárně nezávislé. Podle indukčního předpokladu existují ortonormální vektory $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{k-1}$ tak, že $\langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1} \rangle = \langle \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_{k-1} \rangle$. Označme

$$r_{ik} = (\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{a}_k) \quad \text{pro} \quad i = 1, \ldots, k-1 \tag{2.14}$$

a položme

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_k = \boldsymbol{a}_k - \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}\, \boldsymbol{q}_i. \tag{2.15}$$

Pro $l = 1, \ldots, k-1$ pak je

$$(\boldsymbol{q}_l, \widetilde{\boldsymbol{q}}_k) = (\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{a}_k) - \sum_{i=1}^{k-1} (\boldsymbol{q}_i, \boldsymbol{a}_k)(\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{q}_i) = (\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{a}_k) - (\boldsymbol{q}_l, \boldsymbol{a}_k) = 0. \tag{2.16}$$

Kromě toho $\widetilde{\boldsymbol{q}}_k \ne 0$, nebo, jinak by na základě (2.15) byl vektor $\boldsymbol{a}_k$ lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_k$ a tedy také lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, což vzhledem k lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ není možné. Položíme-li nyní $\boldsymbol{q}_k = \widetilde{\boldsymbol{q}}_k/||\widetilde{\boldsymbol{q}}_k||$, je na základě (2.15) $\langle \boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_k \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ a z (2.16) vyplývá ortogonálnost vektorů $\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_k$. △

Postupu, který byl použit v tomto důkazu se říká *Gramův–Schmidtův ortonormalizační proces.* Umožňuje „ortonormalizovat“ libovolnou lineárně nezávislou množinu vektorů, t.j. nahradit libovolnou lineárně nezávislou množinu množinou ortonormální, která má stejný lineární obal jako množina původní, a to nejen v $\mathbf{C}^n$, ale v jakémkoli lineárním prostoru se skalárním součinem. Důkaz věty 2.11 je současně návodem, jak hledané ortonormální vektory vypočíst. Klíčovou roli zde hraje vztah (2.15).

Příklad 2.8 K vektorům

$$\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, -1), \quad \boldsymbol{a}_2 = (0, 0, -1, 1), \quad \boldsymbol{a}_3 = (1, -2, 0, 3)$$

vypočtěte ortonormální vektory $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3$ tak, aby $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3 \rangle = \langle \boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_3 \rangle$.

Řešení. Výpočet probíhá podle právě provedeného důkazu. Pro usnadnění porovnání používáme stejné symboliky jako v důkazu.
1) Položíme $\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{a}_1/||\boldsymbol{a}_1|| = \frac{1}{2}(1, 1, 1, -1)$.
2) Vektor $\widetilde{\boldsymbol{q}}_2$ hledáme ve tvaru

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{a}_2 - r_{12}\boldsymbol{q}_1, \tag{2.17}$$

kde koeficient r_{12} bude takový, aby $(\boldsymbol{q}_1, \widetilde{\boldsymbol{q}}_2) = 0$. Vynásobme obě strany rovnosti (2.17) skalárně vektorem $\boldsymbol{q}_1$. Pak bude

$$0 = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_2) - r_{12}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_1) = -1 - r_{12}.$$

Odtud vychází $r_{12} = -1$ a $\widetilde{\boldsymbol{q}}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \boldsymbol{q}_1 = \frac{1}{2}(1, 1, -1, 1)$. Protože $||\widetilde{\boldsymbol{q}}_2|| = 1$, bude $\boldsymbol{q}_2 = \widetilde{\boldsymbol{q}}_2$.
3) Vektor $\widetilde{\boldsymbol{q}}_3$ hledáme ve tvaru

$$\widetilde{\boldsymbol{q}}_3 = \boldsymbol{a}_3 - r_{13}\boldsymbol{q}_1 - r_{23}\boldsymbol{q}_2, \tag{2.18}$$

kde koeficienty r_{13} a r_{23} budou takové, aby $(\boldsymbol{q}_1, \widetilde{\boldsymbol{q}}_3) = 0$ a $(\boldsymbol{q}_2, \widetilde{\boldsymbol{q}}_3) = 0$. Vynásobme nejdříve obě strany rovnosti (2.18) skalárně vektorem $\boldsymbol{q}_1$. Dostaneme

$$0 = (\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{a}_3) - r_{13}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_1) - r_{23}(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = -2 - r_{13},$$

odkud $r_{13} = -2$. Vynásobme dále obě strany rovnosti (2.18) skalárně vektorem $\boldsymbol{q}_2$. Dostaneme

$$0 = (\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{a}_3) - r_{13}(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_1) - r_{23}(\boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{q}_2) = 1 - r_{23},$$

odkud vychází $r_{23} = 1$. Pak $\widetilde{\boldsymbol{q}}_3 = \boldsymbol{a}_3 + 2\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2 = \frac{1}{2}(3, -3, 3, 3)$. Protože $||\widetilde{\boldsymbol{q}}_3|| = 3$, je

$$\boldsymbol{q}_3 = \tfrac{1}{2}\big(1, -1, 1, 1\big).$$

Celkem tedy je

$$\boldsymbol{q}_1 = \tfrac{1}{2}\big(1, 1, 1, -1\big), \quad \boldsymbol{q}_2 = \tfrac{1}{2}\big(1, 1, -1, 1\big), \quad \boldsymbol{q}_3 = \tfrac{1}{2}\big(1, -1, 1, 1\big).$$

Uplatníme-li Gramův–Schmidtův proces na bázi vektorového prostoru, dostáváme:

Důsledek 2.3 *V každém nenulovém vektorovém prostoru, ve kterém je definován skalární součin, existuje ortonormální báze.*

Všimněme si, že vzorec (2.15) je velice podobný vzorci pro maticové násobení; po malých úpravách jej opravdu lze do maticového tvaru převést. Předpokládejme, že lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$ postupně nahrazujeme ortogonálními vektory $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m$ tak, že pro $k = 1, \dots, m$ platí (2.15). Položme ještě

$$r_{kk} = ||\widetilde{\boldsymbol{q}}_k|| \quad \text{pro} \quad k = 1, \dots, m \qquad \text{a} \qquad r_{ik} = 0 \quad \text{pro} \quad i = k+1, \dots, m. \tag{2.19}$$

Pak z (2.15) dostáváme

$$\boldsymbol{a}_k = \widetilde{\boldsymbol{q}}_k + \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}\,\boldsymbol{q}_i = r_{kk}\,\boldsymbol{q}_k + \sum_{i=1}^{k-1} r_{ik}\,\boldsymbol{q}_i = \sum_{i=1}^{m} r_{ik}\,\boldsymbol{q}_i\,.$$

Pro j -tou souřadnici a_{jk} vektoru $\boldsymbol{a}_k$ pak je

$$a_{jk} = \sum_{i=1}^{m} r_{ik}\, q_{ji} = \sum_{i=1}^{m} q_{ji}\, r_{ik}.$$

To přesně odpovídá maticovému součinu

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R},$$

kde sloupce matice $\boldsymbol{A}$ tvoří vektory $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_m$, sloupce matice $\boldsymbol{Q}$ vektory $\boldsymbol{q}_1, \dots, \boldsymbol{q}_m$ a $\boldsymbol{R}$ je trojúhelníková matice řádu m, jejíž prvky jsou (jednoznačně) určeny vztahy (2.14) a (2.19). Dostáváme tím *větu o QR rozkladu.*

Věta 2.12 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je matice typu (n, m) s lineárně nezávislými sloupci. Pak existuje matice $\boldsymbol{Q}$ typu (n, m) s ortonormálními sloupci a trojúhelníková matice $\boldsymbol{R}$ řádu m tak, že platí*

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}.$$

Příklad 2.9 Výsledek příkladu 2.8 lze zapsat ve tvaru $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{R}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.4 Cvičení

2.1 Vypočtěte všechna $\alpha \in \mathbf{R}$, pro něž budou lineárně nezávislé vektory

$$\boldsymbol{u} = (1, 3, 4), \quad \boldsymbol{v} = (2, 8, -2), \quad \boldsymbol{w} = (3, 11, \alpha).$$

2.2 Vypočtěte, pro která $x, y, z \in \mathbf{R}$ budou lineárně nezávislé vektory

$$\boldsymbol{u} = (1, x, x^2), \quad \boldsymbol{v} = (1, y, y^2), \quad \boldsymbol{w} = (1, z, z^2).$$

2.3 Zjistěte, zda jsou lineárně nezávislé vektory $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{w}+\boldsymbol{u}$ pokud víte, že vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ jsou lineárně nezávislé.

2.4 Zjistěte, zda jsou lineárně závislé matice

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5 Dokažte, že vektory $\boldsymbol{u}_1, \dots \boldsymbol{u}_n$ jsou lineárně závislé právě tehdy, je-li jeden z nich lineární kombinací ostatních.

2.6 Dokažte, že množina všech matic téhož typu s operacemi maticového sčítání a násobení číslem tvoří lineární prostor dimenze mn. Nalezněte nějakou jeho bázi.

2.7 Dokažte, že množina T_n všech horních trojúhelníkových matic řádu n tvoří podprostor vektorového prostoru všech čtvercových matic řádu n a určete dimenzi T_n.

2.8 Ukažte, že množina všech matic $\boldsymbol{X}$, pro které platí $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{XA}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

tvoří podprostor vektorového prostoru všech čtvercových matic druhého řádu. Určete jeho dimenzi a nějakou bázi.

2.9 Dokažte, že vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ jsou ortogonální právě tehdy, je-li $||\boldsymbol{x}||^2 + ||\boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}||^2$. Dále ukažte, že v $\mathbf{C}^n$ toto tvrzení neplatí.

2.10 Dokažte, že mají-li vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ stejnou velikost, pak $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ a $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}$ jsou ortogonální. Uveďte geometrický význam tohoto tvrzení v $\mathbf{R}^2$.

2.11 Ukažte, že v ortonormální bázi $(\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ platí pro souřadnice $(x_1, \ldots, x_n)^T$ vektoru $\boldsymbol{x}$ vztah

$$x_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}_i), \quad i = 1, \ldots, n.$$

2.12 V prostoru $\mathbf{R}^4$ jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (-1, 0, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (0, 1, 0, -3)$
a lineární podprostor

$$V = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4;\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0,\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 0\right\}.$$

Určete nějakou ortogonální bázi V.

2.13 Určete nějakou ortogonální bázi podprostoru $V = \left\{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^3;\ \boldsymbol{Ax} \in N(\boldsymbol{A})\right\}$, kde

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5 Řešení

2.1 Pro všechna $\alpha \neq 2$.

2.2 Musí současně platit $x \neq y$, $y \neq z$, $x \neq z$.

2.3 Vektory $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ a $\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}$ jsou lineárně nezávislé.

2.4 Jsou lineárně závislé, neboť $2\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{O}$.

2.5 Je-li $\boldsymbol{u}_1 = \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n$, pak $(-1)\boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}$ a vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_n$ jsou lineárně závislé. Je-li $\alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}$ a $\alpha_1 \neq 0$, pak $\boldsymbol{u}_1 = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{u}_n)$. Analogicky pro $i = 2, \ldots, n$.

2.6 Bázi tvoří např. mn matic (navzájem různých), které mají na jediném místě 1 a všude jinde 0.

2.7 Součtem dvou horních trojúhelníkových matic je opět horní trojúhelníková matice a násobkem horní trojúhelníkové matice je také matice horní trojúhelníková; $\dim T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2.8 Dimenze je 2, báze např. $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$.

2.9 Pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n$ je $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 = \big((\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}),\ (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\big) = ||\boldsymbol{x}||^2 + 2\,(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + ||\boldsymbol{y}||^2,$ kdežto pro $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbf{C}^n$ platí pouze $||\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}||^2 = ||\boldsymbol{x}||^2 + (\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}) + ||\boldsymbol{y}||^2.$

2.10 Geometrická interpretace: úhlopříčky v kosočtverci jsou na sebe kolmé.

2.11 Skalárně vynásobte vektor $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n$ i-tým vektorem báze $\boldsymbol{b}_i$.

2.12 $\{(1, 0, 1, 0,), (1, 3, -1, 1)\}.$

2.13 $\{(1, -1, 0), (1, 1, 2)\}.$

Kapitola 3

Hodnost matice

3.1 Řádkový a sloupcový prostor matice, hodnost

Guassova eliminace není jen početní prostředek pro úpravu a řešení soustav lineárních rovnic. Již vztah (1.7) naznačuje její význam i pro zkoumání vlastností matic jako takových. V této kapitole využijeme Gaussovy eliminace pro výpočet hodnosti matic – pojmu, který v sobě obsahuje pohled na řádky a sloupce z hlediska lineární nezávislosti. Znalost hodnosti matice nám pak kromě jiného umožní elegantní formulaci kritéria řešitelnosti soustav lineárních rovnic a také charakterizaci množiny všech jejich řešení.

Definice. *Řádkovým prostorem* matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme lineární obal jejích řádků a značíme $R(\boldsymbol{A})$, *sloupcovým prostorem* lineární obal jejích sloupců; značíme jej $S(\boldsymbol{A})$.

Je-li tedy $\boldsymbol{A}$ reálná (resp. komplexní) matice typu (m, n), pak $R(\boldsymbol{A})$ je podprostorem $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) a $S(\boldsymbol{A})$ je podprostorem $\mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{C}^m$). Je-li matice $\boldsymbol{A}$ symetrická, pak jsou oba prostory totožné, pro nesymetrické matice budou odlišné. Vzhledem k výsledku cvičení 1.12 platí pro sloupcový prostor $S(\boldsymbol{A})$ matice $\boldsymbol{A}$ typu (m, n)

$$S(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbf{C}^m : \boldsymbol{u} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} \quad \text{pro nějaký vektor } \boldsymbol{v} \in \mathbf{C}^n\}. \tag{3.1}$$

Definice. *Hodností matice* $\boldsymbol{A}$ nazýváme dimenzi jejího sloupcového prostoru; značíme ji $h(\boldsymbol{A})$.

Z definice dimenze (strana 29) a z věty 2.3 vyplývá, že hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je rovna maximálnímu počtu lineárně nezávislých sloupců matice $\boldsymbol{A}$.

V definici hodnosti matice byl preferován „sloupcový“ pohled na matici před „řádkovým“. Není přitom vůbec samozřejmé, že dimenze řádkového prostoru matice je stejná jako dimenze jejího sloupcového prostoru. Přes obecnou odlišnost řádkového a sloupcového prostoru matice není třeba definovat také „řádkovou“ hodnost matice. Vyplývá to z věty, kterou uvedeme bez důkazu. Lze jej nalézt například v [11, str. 27] nebo [15, str. 92].

Věta 3.1 *Pro každou matici* $\boldsymbol{A}$ *je* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T)$.

Odvoďme nyní, jaký je vztah hodnosti k dalším maticovým operacím – součinu a řádkovým a sloupcovým elementárním úpravám. Nejméně lze říci o součtu; zde odkazujeme na úlohu 3.3.

Věta 3.2 *Jsou-li* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *matice, pro něž existuje součin* $\boldsymbol{AB}$, *pak*

$$h(\boldsymbol{AB}) \leq h(\boldsymbol{B}) \quad \text{a} \quad h(\boldsymbol{AB}) \leq h(\boldsymbol{A}).$$

Důkaz. Ukážeme, že matice $\boldsymbol{AB}$ nemá větší počet lineárně nezávislých sloupců než matice $\boldsymbol{B}$. To na základě definice hodnosti a poznámky po ní následující zaručí nerovnost $h(\boldsymbol{AB}) \leq h(\boldsymbol{B})$. Jsou-li $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ sloupce matice $\boldsymbol{B}$, pak podle věty 1.1 jsou $\boldsymbol{Ab}_1, \ldots, \boldsymbol{Ab}_k$ sloupce matice $\boldsymbol{AB}$. Věta 2.7 (str. 30) pak zajišťuje, že mezi sloupci $\boldsymbol{Ab}_1, \ldots, \boldsymbol{Ab}_k$ nebude *méně* lineárně nezávislých, než mezi $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$. Druhá nerovnost v tvrzení věty pak plyne z první a z věty 3.1:

$$h(\boldsymbol{AB}) = h(\boldsymbol{AB})^T = h(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T) \leq h(\boldsymbol{A}^T) = h(\boldsymbol{A}).$$

Věta 3.3 *Je-li* $\boldsymbol{A}$ *regulární matice a existuje součin* $\boldsymbol{AB}$, *pak* $h(\boldsymbol{AB}) = h(\boldsymbol{B})$. *Analogicky, je-li* $\boldsymbol{B}$ *regulární matice a existuje součin* $\boldsymbol{AB}$, *pak* $h(\boldsymbol{AB}) = h(\boldsymbol{A})$.

Stručně lze tedy říci, že násobení regulární maticí nemění hodnost.

Důkaz. Podle předcházející věty platí $h(\boldsymbol{AB}) \leq h(\boldsymbol{A})$; z věty 2.6 vyplývá, že matice $\boldsymbol{A}$ nemůže mít *více* lineárně nezávislých sloupců než matice $\boldsymbol{AB}$, což znamená, že $h(\boldsymbol{AB}) \geq h(\boldsymbol{A})$. Celkem tedy je $h(\boldsymbol{AB}) = h(\boldsymbol{B})$. Druhá část tvrzení věty vyplývá z rovností

$$h(\boldsymbol{AB}) = h(\boldsymbol{AB})^T = h(\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T) = h(\boldsymbol{A}^T) = h(\boldsymbol{A}).$$

Zde jsme dvakrát použili větu 3.1 a právě dokázanou první část. △

Věta 3.4 *Jsou-li* $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ *řádkově nebo sloupcově ekvivalentní matice, pak* $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$.

Důkaz. Vzhledem k platnosti věty 3.1 stačí tvrzení ověřit pro matice řádkově ekvivalentní. Je-li $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, pak existují elementární matice $\boldsymbol{L}_1, \ldots, \boldsymbol{L}_k$ tak, že $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{L}_1 \cdots \boldsymbol{L}_k\boldsymbol{A}$. Každá z elementárních matice je regulární (věta 1.19, str. 20), tedy podle věty 3.3 je $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{B})$. △

Význam poslední věty spočívá v možnosti použít řádkové nebo sloupcové elementární operace při výpočtu hodnosti matice. Vhodně volenými operacemi převedeme danou matici do takového tvaru, aby „vynikly“ všechny lineárně nezávislé řádky, resp. sloupce. Postup ukážeme pouze na příkladě.

Příklad 3.1

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Poslední matice má evidentně hodnost rovnu 2, je tedy i $h(\boldsymbol{A}) = 2$.

Z příkladu 2.3 na straně 24 již víme, že řešení homogenní soustavy rovnic tvoří podprostor, který nazýváme nulový prostor matice $\boldsymbol{A}$. Nyní můžeme určit jeho dimenzi a získat tak informaci o „počtu řešení“ homogenní soustavy rovnic. Uvedeme ji pro reálné matice, v analogickém znění platí i pro matice komplexní. Jde o větu zásadního významu a budeme se ni v dalších kapitolách často odvolávat. Elegantní myšlenka důkazu pochází z [6]; její předností je, že nevyžaduje komplikovanou analýzu procesu Gaussovy eliminace.

Věta 3.5 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je matice typu* (m,n) *s hodností* h. *Pak pro dimenzi jejího nulového prostoru*

$$N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}\}$$

platí

$$\dim N(\boldsymbol{A}) = n - h.$$

Důkaz. Předpokládejme, že $\dim N(\boldsymbol{A}) = r$ a zvolme v $N(\boldsymbol{A})$ bázi tvořenou vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_r$. Podle věty 2.2 lze vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots \boldsymbol{u}_r$ doplnit $n-r$ vektory $\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ na bázi prostoru $\mathbf{R}^n$. Ukážeme, že vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n$ tvoří bázi prostoru $S(\boldsymbol{A})$, odkud již vyplyne, že $h = \dim S(\boldsymbol{A}) = n - r$. Přesvědčme se nejdříve, že vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n$ jsou lineárně nezávislé. Nechť

$$\alpha_{r+1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}.$$

Pak také

$$\boldsymbol{A}(\alpha_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n) = \boldsymbol{o},$$

takže

$$\alpha_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n \in N(\boldsymbol{A}).$$

Existují tedy čísla $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tak, že

$$\alpha_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{u}_n = \alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{u}_r,$$

neboť vektory $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ tvoří bázi $N(\boldsymbol{A})$. Z poslední rovnosti plyne

$$\alpha_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + \alpha_r\boldsymbol{u}_r - \alpha_{r+1}\boldsymbol{u}_{r+1} - \cdots - \alpha_n\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o},$$

odkud z lineární nezávislosti vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ vyplývá $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, což znamená lineární nezávislost vektorů $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n$. Dále ukažme, že $\langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n \rangle = S(\boldsymbol{A})$. Podle (3.1) je $S(\boldsymbol{A})$ množinou všech vektorů $\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$. Protože každý vektor $\boldsymbol{v} \in \mathbf{R}^n$ je nějakou lineární kombinací bázových vektorů $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$, je

$$S(\boldsymbol{A}) = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n \rangle = \langle \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n \rangle,$$

neboť $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_1 = \cdots = \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{o}$. Vektory $\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_n$ tedy mají obě vlastnosti požadované definicí (strana 27) a jsou bází prostoru $S(\boldsymbol{A})$. Odtud plyne, že $h = \dim S(\boldsymbol{A}) = n - r = n - \dim N(\boldsymbol{A})$ a tedy $\dim N(\boldsymbol{A}) = n - h$. △

Právě dokázanou větu využijeme při odvození tvrzení, které může vzhledem k větě 3.2 vypadat překvapivě. Jeho význam se projeví v následujících kapitolách.

Věta 3.6 *Pro libovolnou čtvercovou matici* $\boldsymbol{A}$ *platí*

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T). \tag{3.2}$$

Důkaz. Stačí dokázat první z rovností; druhá vyplyne ze vztahu $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T)$ (věta 3.1). Předpokládejme, že matice $\boldsymbol{A}$ je n-tého řádu. Pak i $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}$ je n-tého řádu a rovnost (3.2) bude na základě věty 3.5 ekvivalentní rovnosti dimenzí nulových prostorů obou matic:

$$\dim N(\boldsymbol{A}) = \dim N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}).$$

Ukážeme, že dokonce platí $N(\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$. Připomeňme, že $N(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n : \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.\}$ Je-li tedy $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A})$, pak $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ a vynásobením obou stran této rovnosti maticí $\boldsymbol{A}^T$ zleva dostaneme $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, což znamená, že $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$. Naopak, je-li $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$, pak $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, odkud plyne

$$(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

Použitím věty 2.9 odtud dostaneme $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = 0$, tedy

$$||\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}||^2 = 0.$$

To podle věty 2.8, tvrzení (4) znamená, že $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, takže $\boldsymbol{x} \in N(\boldsymbol{A})$. Celkem jsme dokázali, že

$$N(\boldsymbol{A}) \subset N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}) \quad \text{a} \quad N(\boldsymbol{A}) \supset N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}),$$

z čehož plyne $N(\boldsymbol{A}) = N(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})$. △

Hodnost matice je rovněž užitečným nástrojem pro zjištění řešitelnosti soustavy lineárních rovnic tvaru $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. V české literatuře se uvádí pod názvem *Frobeniova věta*. Využívá porovnání hodnosti matice soustavy $\boldsymbol{A}$ a hodnosti rozšířené matice $\overline{\boldsymbol{A}}$ (viz strana 11).

Věta 3.7 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je libovolná matice typu (m,n), $\boldsymbol{b}$ sloupcový vektor z $\mathbf{C}^n$ a nechť $\overline{\boldsymbol{A}}$ značí rozšířenou matici soustavy $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Pak soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, je-li*

$$h(\boldsymbol{A}) = h(\overline{\boldsymbol{A}}).$$

Důkaz. Z (3.1) vyplývá, že soustava $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ má řešení právě tehdy, patří-li vektor $\boldsymbol{b}$ do sloupcového prostoru matice $\boldsymbol{A}$, což znamená, že $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$. Je-li však vektor $\boldsymbol{b}$ je lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$, pak jeho přidání jako dalšího sloupce k matici $\boldsymbol{A}$ nezmění její hodnost. Obráceně, pokud mají matice $\boldsymbol{A}$ a $\overline{\boldsymbol{A}}$ stejnou hodnost, pak přidaný sloupec $\boldsymbol{b}$ musí být lineární kombinací sloupců matice $\boldsymbol{A}$. △

3.2 Cvičení

3.1 Rozhodněte, které z vektorů $\boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_2$, $\boldsymbol{b}_3$ patří do sloupcového prostoru matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 1 \\ 4 & -7 & 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{b}_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.2 Vypočtěte nějakou bázi sloupcového prostoru matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.3 Ukažte příklad nenulových matic $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, pro které

a) $h(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = 0$;

b) $h(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = h(\boldsymbol{A}) + h(\boldsymbol{B})$.

3.4 Vypočtěte hodosti následujících matic

$$\text{a)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.5 Vypočtěte, pro která α, $\beta \in \mathbf{R}$ bude hodnost matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & \alpha & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \beta & -4 \end{pmatrix}$$

minimální a tuto hodnost stanovte.

3.6 Vypočtěte dimenzi a nějakou bázi nulového prostoru matice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 5 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.7 Vypočtěte všechna $\alpha \in \mathbf{R}$, pro něž má soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ s maticí

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 6 & \alpha \end{pmatrix}$$

aspoň jedno nenulové řešení.

3.8 Určete všechna α, $\beta \in \mathbf{R}$, pro něž nemá řešení soustava s rozšířenou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \beta \end{array}\right).$$

3.3 Řešení

3.1 Pouze $\boldsymbol{b}_2$; $\boldsymbol{b}_i$ patří do $S(\boldsymbol{A})$ právě tehdy, existuje-li řešení rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}_i$.

3.2 Například $B = \{(1, 2, 1)^T,\ (1, -1, -2)^T\}$.

3.3 Řešení není jednoznačné, například

a) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{E}$.

b) $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.4 a) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$, b) $\mathrm{h}(\boldsymbol{A}) = 3$.

3.5 Pro $\alpha = 3$ a $\beta = -3$ je $h(\boldsymbol{A}) = 2$.

3.6 dim $N(\boldsymbol{A}) = 3$, báze $N(\boldsymbol{A})$ je např. $B = \left\{(2, 7, 3, 0, 0,)^T,\ (-1, 4, 0, 0, 3)^T,\ (1, 1, 0, 0, 1, 0)^T\right\}$.

3.7 $\alpha = 11$.

3.8 $\alpha = 2$, $\beta \neq \frac{3}{2}$, nebo $\alpha = 1$, $\beta \neq 1$.

Kapitola 4

Determinanty

Pojem determinantu matice se historicky vyvinul jako nástroj pro řešení soustavy rovnic $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ s regulární maticí $\boldsymbol{A}$. Je-li

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

pak snadno ověříme, že

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Definujeme-li

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{4.1}$$

a označíme

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

pak můžeme pro řešení psát

$$x_1 = \frac{\det \boldsymbol{A}_1}{\det \boldsymbol{A}} \quad \text{a} \quad x_2 = \frac{\det \boldsymbol{A}_2}{\det \boldsymbol{A}}.$$

Analogické vztahy bychom dostali (byť se značně větší početní námahou) pro soustavu s regulární maticí třetího řádu, pokud bychom pro matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

definovali

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \tag{4.2}$$

4.1 Definice a vlastnosti

Pokus o zobecnění vztahů (4.1) a (4.2) na matice čtvrtého a vyšších řádů metodou popisu řešení příslušných soustav rovnic naráží na značnou zdlouhavost a komplikovanost výpočtů. Obecná definice determinantu bude založena na vlastnostech, které jsou společné pro výše uvedené determinanty matic druhého a třetího řádu. Všimněme si, že v obou případech je determinant součtem součinů prvků matice, vybraných tak, aby z každého sloupce i řádku byl zvolen právě jeden prvek. Byly utvořeny všechny takové výběry, odpovídající součiny byly opatřeny znaménky podle zákonitosti, kterou dále objasníme a všechny součiny byly sečteny. Pro matici n-tého řádu tedy vybereme:
v prvním řádku prvek ve sloupci j_1
ve druhém řádku prvek ve sloupci j_2
. . .
v n-tém řádku prvek ve sloupci j_n
tak, že každé z čísel $j_1, j_2, \ldots, j_n$ je rovno některému z čísel $1, 2, \ldots, n$ a všechna jsou navzájem různá. To znamená, že čísla $j_1, j_2, \ldots, j_n$ jsou *permutací*[1] čísel $1, 2, \ldots, n$. Je známo, že takových permutací existuje celkem $n! = n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$.

Dvojici (j_i, j_k) nazveme *inverzí* v permutaci $\pi = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, jestliže $j_i > j_k$ a $i < k$. Je-li p celkový počet inverzí v permutaci $\pi = (j_1, j_2, \ldots, j_n)$, pak číslo $(-1)^p$ nazýváme znaménkem permutace π a značíme $\operatorname{sig}\pi$.

Příklad 4.1 V permutaci $(3, 1, 2, 5, 4)$ čísel $(1, 2, 3, 4, 5)$ jsou tři inverze: $(3, 1)$, $(3, 2)$, a $(5, 4)$. Její znamenko tedy je -1.

Věta 4.1 *Vznikne-li permutace* π_2 *přehozením dvou prvků permutace* π_1, *pak* $\operatorname{sig}\pi_2 = -\operatorname{sig}\pi_1$.

Důkaz. Spočívá v porovnání počtu inverzí obou permutací. Viz např. [15, str. 123].

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice n-tého řádu. *Determinantem* matice $\boldsymbol{A}$ nazýváme číslo

$$\det\boldsymbol{A} = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{4.3}$$

Determinant matice $\boldsymbol{A}$ značíme též $|\boldsymbol{A}|$.

Přesvědčme se nejdříve, že pro matice druhého a třetího řádu dává uvedená definice stejný výsledek jako již uvedené vztahy (4.1) a (4.2).

Příklad 4.2 Nechť

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Množina $(1, 2)$ má 2 permutace: $(1, 2)$ a $(2, 1)$. Je tedy

$$\det\boldsymbol{A} = \operatorname{sig}(1,2)\, a_{11}\, a_{22} + \operatorname{sig}(2,1)\, a_{12}\, a_{21} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}.$$

[1]Permutací množiny $(1, 2, \ldots, n)$ rozumíme libovolnou uspořádanou n-tici jejích prvků $(j_1, j_2, \ldots j_n)$. Prvky $j_1, j_2, \ldots j_n$ jsou přitom navzájem různé.

Příklad 4.3 Nechť

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

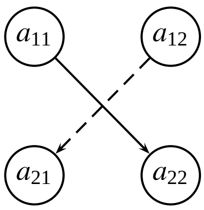
Je celkem $3! = 6$ permutací množiny $(1, 2, 3)$. Jsou znázorněny v následující tabulce, včetně jim příslušných součinů, počtu inverzí p a znamének $\operatorname{sig}\pi$.

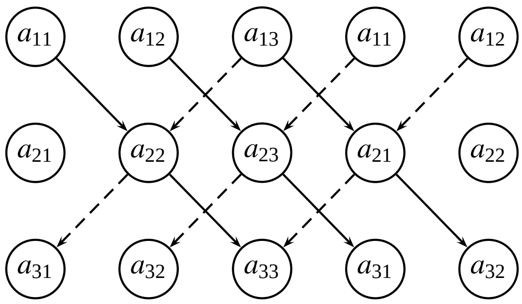
π	součin	p	$\operatorname{sig}\pi$
$(1, 2, 3)$	$a_{11}\,a_{22}\,a_{33}$	0	1
$(1, 3, 2)$	$a_{11}\,a_{23}\,a_{32}$	1	-1
$(2, 1, 3)$	$a_{12}\,a_{21}\,a_{33}$	1	-1
$(2, 3, 1)$	$a_{12}\,a_{23}\,a_{31}$	2	1
$(3, 1, 2)$	$a_{13}\,a_{21}\,a_{32}$	2	1
$(3, 2, 1)$	$a_{13}\,a_{22}\,a_{31}$	3	-1

Opravdu tedy po přeuspořádání sčítanců vychází

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Pro snadnější zapamatování vztahů pro výpočet determinantů matic druhého a třetího řádu lze použít následujících obrázků. V nich jsou spojeny prvky, jejichž součin se objevuje v determinantu; spojení plnou čarou znamená, že znaménko odpovídající permutace je 1, přerušovaná spojovací čára odpovídá permutaci se znaménkem -1.





Uvedený způsob výpočtu determinantu matice třetího řádu se nazývá *Sarrusovo pravidlo*. Na výpočet determinantů matic vyšších řádů však analogii tohoto pravidla *nelze* použít. V následujících větách ukážeme, že výpočet determinantu matice libovolného řádu lze založit na převodu matice do trojúhelníkového tvaru pomocí elementárních operací. Nejdříve uveďme, jak se vypočte determinant trojúhelníkové matice.

Věta 4.2 *Je-li $A = (a_{ij})$ trojúhelníková matice n-tého řádu, pak*

$$\det A = a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Důkaz. Pro horní i dolní trojúhelníkovou matici je jediným nenulovým členem v (4.3) součin $a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}$. Protože znaménko odpovídající permutace je $(-1)^0 = 1$, je $\det A = a_{11}\,a_{22}\cdots a_{nn}$. △

Příklad 4.4

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6.$$

Dříve, než odvodíme pravidla pro výpočet determinantu obecné čtvercové matice, ukážeme, že transpozice matice nemění hodnotu determinantu. Tím bude u determinantů „zrovnoprávněn“ pohled na řádky a sloupce matice a všechna tvrzení o determinantech dokázaná pro řádky budou platit i pro sloupce.

Věta 4.3 *Pro každou čtvercovou matici platí*

$$\det \boldsymbol{A}^T = \det \boldsymbol{A}.$$

Důkaz. Uvažujme čtvercovou matici $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ n-tého řádu. V transponované matici $\boldsymbol{A}^T$ bude na pozici (i, j) prvek a_{ji}, takže pro její determinant bude podle definice platit:

$$\det \boldsymbol{A}^T = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n}.$$

Převedeme-li vhodnými záměnami permutaci $\pi = (j_1, j_2 \ldots, j_n)$ na $(1, 2, \ldots, n)$, pak tytéž záměny převedou základní permutaci $(1, 2, \ldots, n)$, na jistou permutaci $\pi' = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$. Protože obě permutace π a π' vznikly stejným počtem záměn z $(1, 2, \ldots, n)$, mají stejnou signaturu. Je tedy

$$\det \boldsymbol{A}^T = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{j_1 1} a_{j_2 2} \cdots a_{j_n n} = \sum_{(k_1,\ldots,k_n)} \operatorname{sig}(k_1, \ldots, k_n)\, a_{1k_1} a_{2k_2} \cdots a_{nk_n} = \det \boldsymbol{A}.$$

Nyní postupně ověříme, jaký vliv mají na hodnotu determinantu elementární řádkové operace.

Věta 4.4 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice* n*-tého řádu a nechť matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *výměnou* i*-tého a* j*-tého řádku* $(i \neq j)$*. Pak* $\det \boldsymbol{A}' = -\det \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Všechny součiny $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ z determinantu matice $\boldsymbol{A}$ se objeví i v determinantu matice $\boldsymbol{A}'$, podle věty 4.1 však výměnou dvou řádků změní všechny permutace svá znaménka. Odtud výsledek plyne. △

Věta 4.5 *Má-li čtvercová matice* $\boldsymbol{A}$ *dva stejné řádky, je* $\det \boldsymbol{A} = 0$.

Důkaz. Po výměně stejných řádků v matici $\boldsymbol{A}$ dostáváme z předcházející věty $\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$, odkud plyne $\det \boldsymbol{A} = 0$. △

Věta 4.6 *Nechť* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice* n*-tého řádu a nechť matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *vynásobením* i*-tého řádku číslem* α*. Pak* $\det \boldsymbol{A}' = \alpha \det \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Podle definice determinantu je

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A}' &= \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots \alpha a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \\ &= \alpha \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} = \alpha \det \boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

Věta 4.7 *Nechť* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice* n*-tého řádu a* $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_n)$ *řádkový vektor. Pak pro každé* i, $1 \le i \le n$, *platí*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1}+b_1 & a_{i2}+b_2 & \cdots & a_{in}+b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i-1,1} & a_{i-1,2} & \cdots & a_{i-1,n} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{B}$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ nahrazením jejího i-tého řádku vektorem $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{C}$ matici, která vznikne přičtením vektoru $\boldsymbol{b}$ k i-tému řádku matice $\boldsymbol{A}$. Máme dokázat, že

$$\det \boldsymbol{C} = \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}.$$

Podle definice determinantu je

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{C} &= \sum_{(j_1,\dots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (a_{ij_i} + b_{j_i}) \cdots a_{nj_n} = \\ &= \sum_{(j_1,\dots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \\ &\quad + \sum_{(j_1,\dots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \dots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{j_i} \cdots a_{nj_n} = \\ &= \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}. \end{aligned}$$

Věta 4.8 *Nechť* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice* n*-tého řádu a nechť matice* $\boldsymbol{A}'$ *vznikne z* $\boldsymbol{A}$ *přičtením* α*-násobku jejího* k*-tého řádku k řádku* i*-tému* $(k \ne i)$. *Pak* $\det \boldsymbol{A}' = \det \boldsymbol{A}$.

Důkaz. Při výpočtu $\det \boldsymbol{A}'$ postupně použijeme tří předcházejících vět. Dostaneme

$$\det \boldsymbol{A}' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1}+\alpha\, a_{k1} & a_{i2}+\alpha\, a_{k2} & \cdots & a_{in}+\alpha\, a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & \cdots & a_{k,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \boldsymbol{A} + \alpha \cdot 0 = \det \boldsymbol{A}.$$

I když tedy řádkově ekvivalentní matice nemusejí mít stejné determinanty, lze převodu matice do trojúhelníkového tvaru pomocí elementárních operací použít k výpočtu determintu libovolné čtvercové matice.

Příklad 4.5

$$\left|\begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 := r_2 \\ r_2 := r_1 \\ r_3 := r_3 \\ r_4 := r_4 \end{array} = - \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 := r_1 \\ r_2 := r_2 - 2r_1 \\ r_3 := r_3 - 4r_1 \\ r_4 := r_4 - 3r_1 \end{array} =$$

$$= - \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 := \ r_1 \\ r_2 := \ r_2 \\ r_3 := 5r_3 - 6r_2 \\ r_4 := 5r_4 - 4r_2 \end{array} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{l} r_1 := \quad r_1 \\ r_2 := \quad r_2 \\ r_3 := \quad r_3 \\ r_4 := 17r_4 - 3r_3 \end{array} =$$

$$= -\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{17} \cdot \left|\begin{array}{rrrr} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -17 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 80 \end{array}\right| = -\frac{1 \cdot (-5) \cdot (-17) \cdot 80}{25 \cdot 17} = -16$$

Jinou možností výpočtu determinantu libovolné čtvercové matice je *rozvoj* podle některého řádku, případně sloupce. Před formulací a důkazem věty o výpočtu determinantu rozvojem podle řádku zaveďme pojmy subdeterminantu a doplňku.

Definice. Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice n-tého řádu, $n \geq 2$. *Subdeterminantem* A_{ij} matice $\boldsymbol{A}$ příslušným pozici (i, j) nazýváme determinant matice, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. *Doplňkem* D_{ij} matice $\boldsymbol{A}$ příslušným pozici (i, j) nazýváme číslo

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Věta 4.9 *Nechť $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ je čtvercová matice n-tého řádu $n \geq 2$. Pak pro každé $i = 1, \ldots, n$ platí*

$$\det \boldsymbol{A} = a_{i1} D_{i1} + \cdots + a_{in} D_{in} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{ik}. \tag{4.4}$$

Důkaz. Uvažujme nejdříve matici $\boldsymbol{A}$, jejíž první řádek je $(a_{11}, 0, \ldots, 0)$. Z definice determinantu pak podle (4.3) dostáváme

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_1, \ldots, j_n)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = a_{11} \sum_{(j_2,\ldots,j_n)} \operatorname{sig}(j_2, \ldots, j_n)\, a_{2j_2} a_{3j_3} \cdots a_{nj_n} =$$

$$= a_{11} A_{11} = a_{11} D_{11}.$$

Dále uvažme matici $\boldsymbol{A}$, jejíž i-tý řádek je

$$(0, \ldots, 0, a_{ij}, 0, \ldots, 0). \tag{4.5}$$

Pak pomocí $j-1$ sloupcových záměn a $i-1$ řádkových záměn převedeme prvek a_{ij} na pozici $(1,1)$ a protože pro vzniklou matici $\boldsymbol{A}'$ je

$$\det \boldsymbol{A}' = (-1)^{i-1+j-1} \det \boldsymbol{A} = (-1)^{i+j} \det \boldsymbol{A},$$

je na základě předchozího výpočtu

$$\det \boldsymbol{A} = (-1)^{-i-j} a_{ij} A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij} A_{ij} = a_{ij} D_{ij}.$$

Libovolný řádkový vektor $a_{i1}, \dots, a_{in}$ je pak součtem celkem n řádků tvaru (4.5), takže n-násobným použitím věty 4.7 dostaneme (4.4). △

Příklad 4.6 Použijme větu o rozvoji determinantu podle řádku na výpočet determinantu matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pro rozvoj je vhodné zvolit řádek s maximálním počtem nulových prvků, tedy druhý. Pak bude

$$\det \boldsymbol{A} = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \cdot 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 12\,(-2-6) = -96.$$

Pouze pomocný charakter má tvrzení, které se vzorci pro rozvoj determinantu opticky podobá. Využijeme je při důkazu věty 4.13 týkající se výpočtu inverzní matice využitím determinantů.

Věta 4.10 *Nechť* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ *je čtvercová matice* n*-tého řádu* $n \geq 2$. *Pak pro každé* $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, *platí*

$$a_{i1} D_{j1} + \dots + a_{in} D_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{jk} = 0.$$

Důkaz. Uvažujme matici $\boldsymbol{B}$, která má stejné prvky jako matice $\boldsymbol{A}$, kromě j-tého řádku; ten je stejný jako řádek i-tý $(j \neq i)$. Podle věty 4.5 je $\det \boldsymbol{B} = 0$. Kromě toho podle věty 4.9, kde rozvíjíme podle j-tého řádku, je

$$\det \boldsymbol{B} = a_{i1} D_{j1} + \dots + a_{in} D_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} D_{jk}.$$

Porovnáním obou výsleků dostáváme tvrzení věty. △

Na závěr tohoto oddílu uvedeme důležitou větu o determinantu součinu dvou matic. V literatuře existuje několik přístupů k jejímu důkazu, ani jeden však nelze považovat za jednoduchý. Nejpřístupnější důkaz lze nalézt v [13, strana 49].

Věta 4.11 *Jsou-li* $\boldsymbol{A}$ *a* $\boldsymbol{B}$ *čtvercové matice téhož řádu, pak*

$$\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}.$$

4.2 Soustavy lineárních rovnic s regulární maticí

Determinanty umožňují nahlédnout hlouběji do vlastností regulárních matic, hrají významnou roli při rozpoznání regulárních matic a výpočtu matic inverzních. Lze jimi explicitně popsat řešení libovolné soustavy rovnic s regulární maticí.

Věta 4.12 *Je-li* $\boldsymbol{A}$ *regulární matice, pak* $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ *a*

$$\det \boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}. \tag{4.6}$$

Důkaz. K regulární matici $\boldsymbol{A}$ existuje inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ a platí $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$. Odtud je s využitím věty 4.11

$$1 = \det \boldsymbol{E} = \det \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{A}^{-1}.$$

To znamená, že jak $\det \boldsymbol{A}$ tak i $\det \boldsymbol{A}^{-1}$ jsou nenulové a platí (4.6). △

Věta 4.13 *Má-li matice* $\boldsymbol{A}$ *nenulový determinant, je regulární a platí*

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \Big(D_{ij}\Big)^T. \tag{4.7}$$

Důkaz. Označme $\boldsymbol{B} = (D_{ij})^T$, kde D_{ij} je doplněk k pozici (i, j) v matici $\boldsymbol{A}$ a vypočtěme $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{C} = (c_{ij})$. Je

$$c_{ij} = a_{1,i} D_{1,j} + \cdots + a_{n,i} D_{n,j}.$$

Pro $i = j$ je podle věty o rozvoji determinantu (4.9) $c_{ij} = \det \boldsymbol{A}$, kdežto pro $i \neq j$ je podle věty 4.10 $c_{ij} = 0$. Tedy $\boldsymbol{C} = (\det \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{E}$. Stejně se spočítá, že $\boldsymbol{BA} = (\det \boldsymbol{A})\, \boldsymbol{E}$, odkud plyne (4.7). △

Nyní již snadno odvodíme, že pro existenci a výpočet inverzní matice k libovolné čtvercové matici $\boldsymbol{A}$ stačí vyřešit jedinou rovnici: $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$.

Věta 4.14 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice, k níž existuje matice* $\boldsymbol{X}$ *tak, že platí buď* $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$ *nebo* $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}$. *Pak matice* $\boldsymbol{A}$ *je regulární a* $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Důkaz. Ze vztahu $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$ i $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}$ plyne stejným způsobem jako ve větě 4.12, že $\det \boldsymbol{A} \neq 0$. Podle předcházející věty je tedy matice $\boldsymbol{A}$ regulární, což umožňuje použít větu 1.9 na straně 10. Z ní plyne $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}$. △

Gaussova eliminační metoda je sice univerzálním prostředkem k výpočtu řešení soustavy lineárních rovnic, neumožňuje však řešení popsat explicitním vzorcem ani udat jeho vlastnosti. Je tudíž účelné se zabývat i jinými možnostmi pro výpočet řešení soustav lineárních rovnic. Je-li matice soustavy regulární, můžeme využít matice k ní inverzní. Obě strany rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ vynásobíme zleva maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$, což dává ekvivalentní rovnost

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}. \tag{4.8}$$

A protože inverzní matice k regulární matice je určena jednoznačně (věta 1.10), platí

Věta 4.15 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární matice n-tého řádu. Pak soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ má pro každý vektor $\boldsymbol{b} \in \mathbf{C}^n$ jediné řešení dané vztahem $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$.*

Pro homogenní soustavu $(\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o})$ s regulární maticí tak dostáváme jediné řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Je třeba si však uvědomit, že vzorec (4.8) nepřináší žádné zjednodušení *výpočtu* řešení soustavy. Pro výpočet matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ použijeme úplně stejného postupu, jakým bychom řešení $\boldsymbol{x}$ dostali přímo: Gaussovy–Jordanovy eliminace. V (4.8) však musíme ještě navíc vektor $\boldsymbol{b}$ vynásobit maticí $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Znalost determinantu a jeho souvislost s inverzní maticí nám dovoluje se navrátit k možnosti vyjádřit řešení soustavy rovnic s regulární maticí pomocí determinantů. Vzorec, který v následující větě odvodíme, se nazývá *Cramerovo pravidlo*. Protože bylo známo dříve než Gaussova eliminace, stalo se hned po svém objevení velice populární. Dnes je jeho význam hlavně teoretický.

Věta 4.16 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je regulární matice n-tého řádu a $\boldsymbol{b}$ libovolný sloupcový vektor z $\mathbf{C}^n$. Označme $\boldsymbol{A}_i$ matici, která vznikne z matice $\boldsymbol{A}$ náhradou jejího i-tého sloupce vektorem $\boldsymbol{b}$, $i = 1, \dots, n$. Pak řešením soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je vektor $\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, kde*

$$x_i = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz. Pro regulární matici $\boldsymbol{A}$ má rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ řešení $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Dosadíme-li za $\boldsymbol{A}^{-1}$ z (4.9), dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Odtud pak

$$x_i = \frac{A_{1i}b_1 + A_{2i}b_2 + \cdots + A_{ni}b_n}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{\det \boldsymbol{A}_i}{\det \boldsymbol{A}},$$

neboť v čitateli je rozvoj determinantu matice $\boldsymbol{A}_i$ podle i-tého řádku. △

Celkově lze vlastnosti regulárních a singulárních matic shrnout do následujících dvou přehledných vět.

Věta 4.17 *Nechť $\boldsymbol{A}$ je čtvercová matice n-tého řádu. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

(a) *$\boldsymbol{A}$ je regulární;*

(b) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$;

(c) *$\boldsymbol{A}$ je řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí;*

(d) $h(\boldsymbol{A}) = n$;

(e) *řádky matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou lineárně nezávislé;*

(f) *sloupce matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou lineárně nezávislé;*

(g) *soustava* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ *má jediné řešení* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$;

(h) *soustava* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ *má jediné řešení pro každý vektor* $\boldsymbol{b} \in \mathbf{C}^n$.

Důkaz. Postup důkazu bude následující:
(a) $\Leftrightarrow$ (b), (a) $\Leftrightarrow$ (c), (c) $\Rightarrow$ (d), (d) $\Rightarrow$ (e), (e) $\Rightarrow$ (f), (f) $\Rightarrow$ (g), (g) $\Rightarrow$ (h), (h) $\Rightarrow$ (a).

1) [(a) $\Leftrightarrow$ (b)] Ekvivalence tvrzení (a), (b) je obsahem vět 4.12 a 4.13.

2) [(a) $\Leftrightarrow$ (c)] Ekvivalence tvrzení (a), (c) je obsahem věty 1.20.

3) [(c) $\Rightarrow$ (d)] Je-li $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{E}$, pak obě matice mají podle věty 3.4 stejnou hodnost. Protože matice $\boldsymbol{E}$ má lineárně nezávislé řádky, je její hodnost rovna n (viz poznámku ze definicí hodnosti matice). Hodnost matice $\boldsymbol{A}$ je tedy rovněž rovna n.

4) [(d) $\Rightarrow$ (e)] Plyne z definice hodnosti matice (strana 37) a po ní následující poznámky.

5) [(e) $\Rightarrow$ (f)] Plyne z rovnosti $h(\boldsymbol{A}) = h(\boldsymbol{A}^T)$ (věta 3.1).

6) [(f) $\Rightarrow$ (g)] Nechť $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ jsou sloupce matice $\boldsymbol{A}$. Pro $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ je pak
$$\boldsymbol{Ax} = x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n.$$
Z lineární nezávislosti sloupců $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ plyne, že $x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{o}$ jedině pokud platí $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$, tedy $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$.

7) [(g) $\Rightarrow$ (h)] Platí-li (g), pak podle věty 1.15 je matice $\boldsymbol{A}$ řádkově ekvivalentní s jednotkovou maticí a podle již dokázané ekvivalence (a) $\Leftrightarrow$ (c) je matice $\boldsymbol{A}$ regulární; vektor $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ je pak řešením rovnice $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Nechť vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jsou řešeními soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Je tedy
$$\boldsymbol{Au} = \boldsymbol{b} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{Av} = \boldsymbol{b}.$$
Odečtením dostáváme po úpravě $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$, odkud z předpokladu (g) plyne $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ a tedy $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}$. To znamená, že řešení soustavy $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ je určeno jednoznačně.

8) [(h) $\Rightarrow$ (a)] Má-li soustava $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ řešení pro libovolný sloupcový vektor $\boldsymbol{b}$, pak existují vektory vektory $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, pro něž $\boldsymbol{Ax}_i = \boldsymbol{e}_i$, $i = 1, \ldots, n$, kde $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ jsou sloupce jednotkové matice $\boldsymbol{E}$. Podle věty 1.2 tedy platí $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}$, kde $\boldsymbol{X}$ je matice se sloupci $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$, z čehož podle věty 4.14 plyne, že matice $\boldsymbol{A}$ je regulární. $\triangle$

Analogické vlastnosti singulárních matic pak dostaneme negací odpovídajících vlastností matic regulárních.

Věta 4.18 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je čtvercová matice* n*-tého řádu. Pak následující vlastnosti jsou ekvivalentní:*

(a) $\boldsymbol{A}$ *je singulární;*

(b) $\det \boldsymbol{A} = 0$;

(c) $h(\boldsymbol{A}) < n$;

(d) *řádky matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou lineárně závislé;*

(e) *sloupce matice* $\boldsymbol{A}$ *jsou lineárně závislé;*

(f) *soustava* $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ *má aspoň jedno nenulové řešení.*

4.3 Cvičení

4.1 Rozhodněte, která z následujících tvrzení o determinantech jsou pravdivá.

a) Pro každé dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stejného řádu platí $\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \det\boldsymbol{A} + \det\boldsymbol{B}$.

b) Pro každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ a každé číslo α platí $\det(\alpha\boldsymbol{A}) = \alpha\det\boldsymbol{A}$.

c) Pro každé dvě čtvercové matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ stejného řádu platí $\det(\boldsymbol{AB}) = \det\boldsymbol{A}\cdot\det\boldsymbol{B}$.

d) Pro každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ platí $\det\boldsymbol{A}^T = \det\boldsymbol{A}$.

e) Pro každou regulární matici $\boldsymbol{A}$ platí $\det\boldsymbol{A}^{-1} = 1/\det\boldsymbol{A}$.

f) Pro každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ lichého řádu platí $\det(-\boldsymbol{A}) = -\det\boldsymbol{A}$.

g) Pro každou čtvercovou matici $\boldsymbol{A}$ a každé přirozené n platí $\det\boldsymbol{A}^n = (\det\boldsymbol{A})^n$.

h) Elementární operace nemění hodnotu determinantu.

i) Determinant regulární matice je nenulový.

j) Determinant singulární matice je roven nule.

k) Má-li matice nenulový determinant, jsou její řádky i sloupce lineárně nezávislé.

l) Má-li matice nulový determinant, jsou její řádky i sloupce lineárně závislé.

4.2 Vypočtěte následující determinanty:

$$\text{a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}, \qquad \text{b)}\ \begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}, \qquad \text{c)}\ \begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

4.3 Vypočtěte determinant (nazývá se Jacobián)

$$J(r,\varphi,\psi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi\sin\psi & -r\sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\sin\psi & r\cos\varphi\sin\psi & r\sin\varphi\cos\psi \\ \cos\psi & 0 & -r\sin\psi \end{vmatrix}.$$

4.4 Vypočtěte determinanty následujících matic n-tého řádu

$$\text{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & n & n & \cdots & n \\ n & 2 & n & \cdots & n \\ n & n & 3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad \text{b)}\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & .\cdot\cdot^{\cdot} & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{c)}\ \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1-n \end{pmatrix}$$

4.5 Vypočtěte determinant

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda \end{vmatrix}.$$

4.4 Řešení

4.1 Všechna kromě a), b), h).

4.2 a) -8, b) 90, c) 60.

4.3 $J(r, \varphi, \psi) = r^2 \sin \psi$.

4.4 a) $(-1)^{n-1} n!$ b) $(-1)^{\frac{n}{2}}$ pro sudé n, $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ pro liché n, c) 0.

4.5 $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n$.
Návod: První sloupec vynásobte λ a přičtěte ke druhému. Vzniklý sloupec vynásobte λ a přičtěte ke třetímu, atd. Nakonec determinant rozviňte podle posledního sloupce.

Kapitola 5

Lineární zobrazení

Matice jsou nejen účinným nástrojem pro popis a řešení soustav lineárních rovnic, ale umožňují i popis jakýchkoliv lineárních závislostí mezi vektorovými prostory. Dostáváme se tak k pojmu, v němž spojíme využití matic a vektorových prostorů: lineární zobrazení.

Definice. Nechť V a W jsou vektorové prostory, buď oba reálné nebo oba komplexní. Zobrazení $A\colon V \to W$ nazýváme *lineárním zobrazením*, jestliže pro všechny vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ a všechna čísla α platí

(a) $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = A(\boldsymbol{x}) + A(\boldsymbol{y})$

(b) $A(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha A(\boldsymbol{x})$.

V technických aplikacích se místo názvu lineární zobrazení používá také *lineární systém*.

Podmínky (a), (b) z definice lineárního zobrazení se dají nahradit jedinou podmínkou pro všechny vektory $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ a všechna čísla α, β :

$$A(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha A(\boldsymbol{x}) + \beta A(\boldsymbol{y}) \tag{5.1}$$

nebo podmínkou pro obraz jakékoliv lineární kombinace

$$A(\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k) = \alpha_1 A(\boldsymbol{x}_1) + \cdots + \alpha_k A(\boldsymbol{x}_k). \tag{5.2}$$

Vztah (5.2) se také nazývá *princip superpozice*.

Z geometrických zobrazení patří mezi lineární zobrazení například rotace kolem počátku v $\mathbf{R}^2$ nebo $\mathbf{R}^3$, kolmá projekce do roviny procházející počátkem v $\mathbf{R}^3$, či symetrie kolem přímky nebo roviny procházející počátkem v $\mathbf{R}^3$.

5.1 Matice lineárního zobrazení

Vztah mezi lineárními zobrazeními a maticemi popisují následující dvě věty. Stručným způsobem lze jejich obsah charakterizovat takto: Každá matice typu (m, n) určuje lineární zobrazení mezi prostory n-rozměrných a m-rozměrných aritmetických vektorů a každé lineární zobrazení mezi dvěma konečně dimenzionálními vektorovými prostory lze charakterizovat maticí.

Věta 5.1 *Nechť* $\boldsymbol{A}$ *je reálná matice typu* (m, n). *Pak zobrazení* A *definované vztahem*

$$A(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \tag{5.3}$$

je lineárním zobrazením z $\mathbf{R}^n$ *do* $\mathbf{R}^m$.

Důkaz. Vlastnosti (a), (b) z definice lineárního zobrazení jsou pro uvedené zobrazení ekvivalentní tvrzení (d) ve větách 1.3 a 1.4. △

Vztah (5.3) definuje rovněž lineární zobrazení z $\mathbf{C}^n$ do $\mathbf{C}^m$. Stejně tak pro každou komplexní matici $\boldsymbol{A}$ typu (m,n) určuje (5.3) lineární zobrazení z $\mathbf{C}^n$ do $\mathbf{C}^m$.

Následující věta ukazuje obrácený pohled: k danému lineárnímu zobrazení A sestrojíme matici $\boldsymbol{A}$, která bude A popisovat vztahem analogickým k (5.3). Připomeňme, že symbolem $[\boldsymbol{x}]_B$ označujeme sloupcový vektor souřadnic $\boldsymbol{x}$ v bázi B.

Věta 5.2 *Nechť V je vektorový prostor s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a W vektorový prostor s bází $C = (\boldsymbol{c}_1, \dots, \boldsymbol{c}_m)$. Nechť A je lineární zobrazení V do W a nechť $\boldsymbol{A}$ je matice, jejíž sloupce tvoří vektory $[A(\boldsymbol{b}_1)]_C, \dots, [A(\boldsymbol{b}_n)]_C$. Pak pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ platí*

$$[A(\boldsymbol{x})]_C = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_B.$$

Podle této věty je zobrazení A charakterizováno maticí typu (m,n), jejíž *sloupce tvoří souřadnice obrazů bázových vektorů*. Tuto matici nazýváme maticí zobrazení A vzhledem k bázím B a C. Slovy pak můžeme obsah této důležité věty vyjádřit takto: Souřadnice (v bázi C) obrazu libovolného vektoru $\boldsymbol{x} \in V$ dostaneme jako součin matice zobrazení a vektoru souřadnic $\boldsymbol{x}$ (v bázi B).

Důkaz. Zvolme $\boldsymbol{x} \in V$ a popišme jej souřadnicemi v bázi B:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \dots + x_n\boldsymbol{b}_n.$$

Je tedy

$$[\boldsymbol{x}]_B = (x_1, \dots, x_n)^T.$$

Ze vztahu (5.2) pak vyplývá

$$A(\boldsymbol{x}) = x_1 A(\boldsymbol{b}_1) + \dots + x_n A(\boldsymbol{b}_n)$$

a pro souřadnice tedy platí

$$\big[A(\boldsymbol{x})\big]_C = x_1\big[A(\boldsymbol{b}_1)\big]_C + \dots + x_n\big[A(\boldsymbol{b}_n)\big]_C.$$

Na základě věty 1.2 lze poslední rovnost přepsat do tvaru $[A(\boldsymbol{x})]_C = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_B$, čímž je věta dokázána. △

Z tvrzení věty 5.2 vyplývá, že v pevně zvolených bázích prostorů V a W je matice lineárního zobrazení $A\colon V \to W$ určena jednoznačně, avšak při změně báze v prostoru V nebo W se matice zobrazení A změní. V následujícím oddílu ukážeme, jaké zákonitosti tato změna podléhá.

Příklad 5.1 Ukažme, jak vypadají matice dvou nejjednodušších příkladů lineárního zobrazení, zobrazení nulového a zobrazení identického. Nulové zobrazení přiřazuje všem vektorům svého definičního oboru vektor nulový. Protože nulový vektor má v libovolné bázi nulové souřadnice, je maticí nulového zobrazení pro jakoukoliv volbu bází v prostoru V nulová matice $\boldsymbol{O}$.

Identické zobrazení $I\colon V \to V$ je bez ohledu na volbu báze definováno vztahem

$$I(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \quad \text{pro každý vektor } \boldsymbol{x} \in V.$$

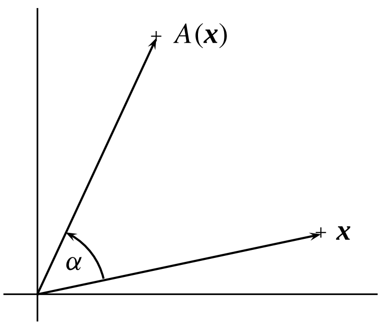
Zvolíme-li v prostoru V libovolně bázi B a na identické zobrazení pohlížíme jako na zobrazení z prostoru V s bází B do prostoru V s touž bází B, pak je snadné si uvědomit, že jeho maticí je jednotková matice $\boldsymbol{E}$. Jinak bude vypadat matice identického zobrazení I, pokud je uvažujeme jako zobrazení z prostoru V s jednou bází do prostoru V s bází jinou. Zvolme tedy v prostoru V dvě různé báze $B = (\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ a $B' = (\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n)$ a spočítejme, jakou matici bude mít identické zobrazení I z prostoru V s bází B' do prostoru V s bází B. Podle věty 5.2 budou sloupce této matice tvořit souřadnice vektorů $I(\boldsymbol{b}'_1), \ldots, I(\boldsymbol{b}'_n)$ vzhledem k bázi B. Protože $I(\boldsymbol{b}'_i) = \boldsymbol{b}'_i$ pro každé $i = 1, \ldots, n$, bude každý ze sloupců matice identického zobrazení tvořen souřadnicemi vektorů $\boldsymbol{b}'_1, \ldots, \boldsymbol{b}'_n$ vzhledem k bázi B. Dostaneme je z následujících rovnic:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}'_1 &= p_{11}\boldsymbol{b}_1 + p_{21}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{b}_n \\
\boldsymbol{b}'_2 &= p_{12}\boldsymbol{b}_1 + p_{22}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{b}_n \\
&\vdots \\
\boldsymbol{b}'_n &= p_{1n}\boldsymbol{b}_1 + p_{2n}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{b}_n
\end{aligned}$$

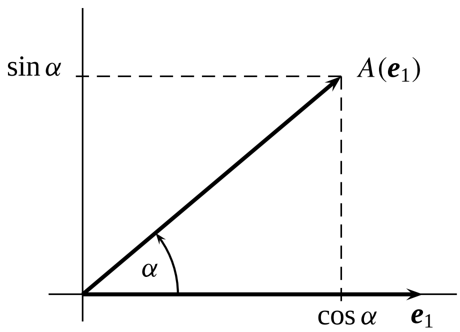
Maticí zobrazení I pak bude $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$.

V dalším příkladu vypočteme matici zobrazení, které se velmi často vyskytuje ve fyzikálních i geometrických aplikacích.

Příklad 5.2 Definujme zobrazení $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ jako „otočení kolem počátku o úhel α v kladném smyslu“ a vypočtěme jeho matici vzhledem ke standardní bázi $\mathbf{R}^2$.



Obr. 5.1 Otočení o úhel α v $\mathbf{R}^2$.



Obr. 5.2 Otočení vektoru $\boldsymbol{e}_1$.

Řešení. Podle věty 5.2 budou sloupce hledané matice $\boldsymbol{A}$ tvořit souřadnice obrazů vektorů standardní báze, tedy vektorů $A(\boldsymbol{e}_1)$ a $A(\boldsymbol{e}_2)$. Přitom $A(\boldsymbol{e}_1)$ vznikne otočením vektoru $\boldsymbol{e}_1$ o úhel α (viz obr. 5.2) a $A(\boldsymbol{e}_2)$ je vektor $\boldsymbol{e}_2$ otočený o úhel α. Výpočet souřadnic je jednoduchým trigonometrickým problémem a pro vektor $A(\boldsymbol{e}_1)$ jej znázorňuje jej obr. 5.2. Vyplývá z něj, že

$$A(\boldsymbol{e}_1) = \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \sin\alpha\,\boldsymbol{e}_2 \quad \text{a podobně vyjde} \quad A(\boldsymbol{e}_2) = -\sin\alpha\,\boldsymbol{e}_1 + \cos\alpha\,\boldsymbol{e}_2.$$

Pro výslednou matici $\boldsymbol{A}$ tedy dostáváme

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Pomocí matice $\boldsymbol{A}$ vypočteme souřadnice libovolného otočeného vektoru $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)^T$:

$$A(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha \\ x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

5.2 Transformace souřadnic

Uvažujme ve vektorovém prostoru V dvě různé báze $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a $B' = (\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_n)$ a vyjádřeme pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ jeho souřadnice v obou bázích:

$$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{b}_n \quad \text{a} \quad \boldsymbol{x}' = x'_1\boldsymbol{b}'_1 + \cdots + x'_n\boldsymbol{b}'_n.$$

Označme

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}]_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \boldsymbol{X}' = [\boldsymbol{x}]_{B'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Vyšetřujme nyní, jak lze popsat změnu souřadnic vektoru $\boldsymbol{x}$ při přechodu od báze B k bázi B'. Vyjádříme-li všechny vektory báze B' jako lineární kombinace vektorů báze B:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b}'_1 &= p_{11}\boldsymbol{b}_1 + p_{21}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{n1}\boldsymbol{b}_n \\ \boldsymbol{b}'_2 &= p_{12}\boldsymbol{b}_1 + p_{22}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{n2}\boldsymbol{b}_n \\ &\vdots \\ \boldsymbol{b}'_n &= p_{1n}\boldsymbol{b}_1 + p_{2n}\boldsymbol{b}_2 + \cdots + p_{nn}\boldsymbol{b}_n \end{aligned} \tag{5.5}$$

a označíme-li $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$, pak *sloupce* matice $\boldsymbol{P}$ tvoří souřadnice vektorů $\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_n$ vzhledem k bázi B. To znamená, že $\boldsymbol{P}$ je maticí identického zobrazení prostoru V s bází B' do prostoru V s bází B (viz příklad 5.1) a tudíž pro každý vektor $\boldsymbol{x} \in V$ platí

$$\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}]_B = [I(\boldsymbol{x})]_B = \boldsymbol{P}[\boldsymbol{x}]_{B'} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{X}'. \tag{5.6}$$

Matice $\boldsymbol{P}$ nazýváme *maticí přechodu* od báze B k bázi B'. Název je motivován vztahy 5.5, nikoliv rovnicí 5.6. Protože sloupce matice $\boldsymbol{P}$ tvoří souřadnice vektorů báze, jsou lineárně nezávislé. To podle věty 4.17 (a), (g) na straně 51 znamená, že $\boldsymbol{P}$ je regulární a existuje k ní matice inverzní. Ze vztahu 5.6 tak dostáváme rovnost, umožňující vypočíst „nové“ souřadnice $\boldsymbol{X}'$ z „původních“ souřadnic $\boldsymbol{X}$:

$$\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{X}. \tag{5.7}$$

Nyní již můžeme odvodit vztah, který popíše jak se změní matice lineárního zobrazení $A\colon V \to W$ při změně bází v prostorech V a W. Pro zjednodušení zápisu budeme uvažovat pouze nejčastěji se vyskytující případ $V = W$. Předpokládejme tedy, že V je vektorový prostor s bází $B = (\boldsymbol{b}_1, \dots, \boldsymbol{b}_n)$ a uvažujme lineární zobrazení $A\colon V \to V$. Označme matici tohoto zobrazení (vzhledem k bázi B) jako $\boldsymbol{A}$. Zvolme dále v prostoru V jinou bázi $B' = (\boldsymbol{b}'_1, \dots, \boldsymbol{b}'_n)$ a označme matici přechodu od báze B k bázi B' jako $\boldsymbol{P}$. Pro popis souřadnic vektorů $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ v obou bázích použijme označení podle (5.4). Je-li nyní $\boldsymbol{y} = A(\boldsymbol{x})$, pak $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$. Dosazením z (5.6) dostaneme

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}',$$

odkud vynásobením obou stran maticí $\boldsymbol{P}^{-1}$ zleva plyne

$$\boldsymbol{Y}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{X}',$$

kde jsme označili

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}. \tag{5.8}$$

Vidíme tedy, že při změně báze z B na B' se původní matice $\boldsymbol{A}$ změní na matici $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, kde $\boldsymbol{P}$ je matice přechodu od báze B k bázi B'.

5.3 Cvičení

5.1 Lineární zobrazení $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je dáno vztahy

$$A(1,2) = (3,1),$$
$$A(2,3) = (6,2).$$

Vypočtěte matici tohoto zobrazení v bázi $B = \{(1,2),\ (2,3)\}$.

5.2 Nechť A je lineární zobrazení z $\mathbf{R}^3$ do $\mathbf{R}^3$, jehož matice v bázi $B = \{\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3\}$ je

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete matici zobrazení A v bázi $B' = \{\boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_3\}$.

5.3 Označme M_2 lineární prostor všech čtvercových matic druhého řádu a zvolme v něm bázi

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Nechť T je zobrazení, které každé matici $\boldsymbol{A}$ z M_2 přiřadí transponovanou matici $\boldsymbol{A}^T$:

$$T(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^T.$$

Ukažte, že T je lineární a vypočtěte matici zobrazení T vzhledem k bázi B.

5.4 Zobrazení $Z\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ je definováno jako symetrie kolem přímky p procházející počátkem a svírající s „kladnou osou x_1“ úhel α (t.j. Z je zrcadlení podle přímky p). Nalezněte jeho matici $\boldsymbol{Z}$ ve standardní bázi $\mathbf{R}^2$.

5.5 Zobrazení $P\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ je definováno jako ortogonální projekce na rovinu π procházející osou x_3 a svírající s osou x_1 úhel α. Vypočtěte jeho matici $\boldsymbol{P}$ ve standardní bázi $\mathbf{R}^3$.

5.6 Lineární zobrazení $A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ má ve standardní bázi $\mathbf{R}^2$ matici

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vypočtěte jeho matici v bázi tvořené vektory $\boldsymbol{b}_1 = (3,1)^T$ a $\boldsymbol{b}_2 = (2,1)^T$.

5.7 Dokažte, že lineární zobrazení $A\colon V \to V$ je prosté právě tehdy, má-li v nějaké bázi prostoru V regulární matici.

5.8 Ukažte, že matice složeného zobrazení je součinem matic jednotlivých zobrazení, t.j. že platí: Jsou-li B_1, B_2, B_3 báze vektorových prostorů V_1, V_2, V_3, A lineární zobrazení V_1 do V_2, jehož matice vzhledem k bázím B_1 a B_2 je $\boldsymbol{A}$ a B je lineární zobrazení V_2 do V_3, jehož matice vzhledem k bázím B_2 a B_3 je $\boldsymbol{B}$, pak složené zobrazení BA :

$$BA(\boldsymbol{x}) = B\big(A(\boldsymbol{x})\big), \quad \boldsymbol{x} \in V_1$$

má vzhledem k bázím B_1 a B_3 matici $\boldsymbol{BA}$.

5.9 Ukažte, že matice inverzního zobrazení je inverzní matice k matici zobrazení původního.

5.4 Řešení

5.1 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -7 & -14 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}.$

5.2 $\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$

5.3 $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5.4 $\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}.$

5.5 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & \cos\alpha \sin\alpha & 0 \\ \cos\alpha \sin\alpha & \sin^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

5.6 $\boldsymbol{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$

5.7 A je prosté právě tehdy, když pro libovolné vektory $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$ platí $A(\boldsymbol{x}) \neq A(\boldsymbol{y})$, takže v bázi B prostoru V bude platit
$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \iff A(\boldsymbol{x}) \neq A(\boldsymbol{y}) \iff A(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \neq \boldsymbol{o} \iff \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}]_B \neq \boldsymbol{o} \iff \boldsymbol{Au} \neq \boldsymbol{o}$ pro $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$.
To je podle věty 4.14 (g) ekvivalentní regulárnosti matice $\boldsymbol{A}$.

5.8 $\big[B\big(A(\boldsymbol{x})\big)\big]_{B_3} = \boldsymbol{B}\big[A(\boldsymbol{x})\big]_{B_2} = \boldsymbol{BA}\big[\boldsymbol{x}\big]_{B_1}.$

5.9 Je-li $\boldsymbol{y} = A^{-1}(\boldsymbol{x})$, pak $\boldsymbol{x} = A(\boldsymbol{y})$ a tedy $[\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{A}\,[\boldsymbol{y}]$, odkud plyne $[\boldsymbol{y}] = \boldsymbol{A}^{-1}[\boldsymbol{x}]$.

Literatura

[1] J. Brabec, *Vybrané kapitoly z teorie matic.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1975.

[2] J. Brabec, F. Martan, Z. Rozenský, *Matematická analýza I.* SNTL, Praha, 1985.

[3] J. Brabec, B. Hrůza, *Matematická analýza II.* SNTL, Praha, 1986.

[4] M. Demlová, B. Pondělíček, *Úvod do algebry.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1996.

[5] M. Fiedler, *Speciální matice a jejich použití v numerické matematice.* SNTL, Praha, 1981.

[6] S. H. Friedberg, A. J. Insel, L. E. Spence, *Linear Algebra.* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.

[7] G. H. Golub, Ch. F. Van Loan, *Matrix Computations.* The John Hopkins University Press, Baltimore, 1983.

[8] P. R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces.* Springer, New York, 1987.

[9] V. Havel, J. Holenda, *Lineární algebra.* SNTL Praha, 1984.

[10] E. Krajník, *Maticový počet.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 2000.

[11] P. Olšák, Lineární algebra. Online http://math.feld.cvut.cz/olsak/linal.html

[12] M. O'Nan, *Linear Algebra.* Harcourt Brace Jovanovich, Inc., New York, 1976.

[13] P. Pták, *Introduction to Linear Algebra.* Vydavatelství ČVUT, Praha, 1997.

[14] M. Ráb, *Metody řešení diferenciálních rovnic,* 2.díl. Vydavatelství VUT, Brno, 1989.

[15] J. Rohn, *Lineární algebra a optimalizace.* Karolinum, Praha 2004.

Rejstřík