

---

## Kalkulus pro zvědavé středoškoláky

Motto: „Ten čítecel jde k nule fakt ale hovadsky rychle“, *doc. RNDr. Luboš Pick, CSc., DSc.*

---

$$\int \sum_{i=1}^n f_i(x) dx = \sum_{i=1}^n \int f_i(x) dx$$

JAKUB MARIAN

Gymnázium Litoměřická 726  
Septima A / Oktáva A

# Předmluva

Tento text byl sepsán za tím účelem, aby poskytl středoškolským studentům, které matematika zajímá a zajímají je metody, které matematika používá ve fyzice, určitý pokročilý přehled. Cílem tohoto textu je podat víceméně ucelený výklad o matematické disciplíně souhrnně zvané **kalkulus**, jehož aparát je pro fyziku pravděpodobně nejdůležitější. Do tohoto oboru spadá diferenciální a integrální počet, teorie diferenciálních rovnic, variační počet, teorie metrických prostorů a další obory. Pro velkou část studentů je sice problém číst vysokoškolská skripta, středoškolské učebnice jim však svým rozsahem nevyhovují. Proto jsem se rozhodl sepsat tento text, který svou úrovní leží kdesi mezi střední a vysokou školou. V žádném případě to však neznamená, že by byl nevhodný pro běžné studenty středních škol – pokročilejší partie, které běžný student nemusí znát, jsou vysázeny menším písmem, či je zmínka o pokročilosti kapitol uvedena přímo na počátku dané kapitoly.

Text je logicky členěn tak, aby na sebe jednotlivé kapitoly navazovaly, žádná kapitola nevyžaduje znalost spadající zaměřením do tohoto textu, která by nebyla v předchozích kapitolách vysvětlena. Na konci velké části kapitol jsou samostatné kapitoly nazvané „**ri-  
gorózní dodatky**“<sup>1</sup>. Tyto kapitoly nemusí čtenář číst, pokud mu jde pouze o nabytí víceméně středoškolských znalostí – obsah běžného textu se nikde neodvolává na tyto malé kapitoly. Vřele však všem čtenářům přečtení těchto kapitol doporučuji, jejich obsah prohlubuje pochopení běžně vykládané látky a většinou tyto dodatky nejsou příliš náročné na pochopení.

## Opožděné „vydání“

Původně měl tento text zahrnout také letmý úvod do teorie diferenciálních rovnic a variačního počtu a pár dalších zajímavých oborů spadajících do matematické analýzy. Z časových důvodů jsem však sepsání příslušných kapitol odložil na neurčito. Nyní, když jsem se k textu vrátil již jako student MFF, zjistil jsem, že bych celý text koncipoval poněkud jinak, než jak jsem učinil při jeho tvorbě během studia septimy na gymnáziu. Proto jsem se rozhodl již další kapitoly nedotvářet, ale pouze jsem provedl pár malých korektur v již hotovém textu, který tak zůstává víceméně v původní podobě (kromě sekce 1.6.2, kde jsem se nechal poněkud unést motivováním čtenáře, a několika dodělávek v části o integrování).

Jakub Marian, 9. srpna 2009

---

<sup>1</sup>Slovo „rigorózní“ znamená „přesný“, „precizní“.

# Obsah

<b>1</b>	<b>Diferenciální počet</b>	<b>4</b>
1.1	Motivace . . . . .	4
1.2	Trocha historie . . . . .	5
1.3	Základní pojmy . . . . .	6
1.4	Limita . . . . .	7
1.4.1	Intuitivní zavedení limity . . . . .	7
1.4.2	Matematické zavedení limity . . . . .	8
1.4.3	Rigorózní dodatek k definici limity . . . . .	10
1.4.4	Praktické výpočty limit . . . . .	10
1.4.5	Rigorózní dodatek k větám o limitách . . . . .	13
1.5	Derivace . . . . .	13
1.5.1	Intuitivní zavedení derivace . . . . .	14
1.5.2	Matematické zavedení derivace . . . . .	14
1.5.3	Rigorózní dodatek k definici derivace . . . . .	16
1.5.4	Věty o derivacích . . . . .	17
1.6	Diferenciál . . . . .	21
1.6.1	Rigorózní dodatek k definici diferenciálu . . . . .	22
1.6.2	Rigorózní dodatek k rigoróznímu dodatku . . . . .	22
1.7	Derivace vektorů . . . . .	23
1.7.1	Rigorózní dodatek k derivacím vektorů . . . . .	25
1.8	Vyšetřování průběhu funkce . . . . .	25
1.8.1	Nalezení extrému funkce . . . . .	26
1.8.2	Konvexní a konkávní funkce . . . . .	28
1.9	Derivace funkcí více proměnných . . . . .	29
1.9.1	Parciální derivace . . . . .	30
1.10	Taylorův rozvoj . . . . .	32
1.11	Taylorův rozvoj funkce více proměnných . . . . .	35
1.12	Význam diferenciálního počtu ve fyzice . . . . .	35
1.12.1	Rychlost, zrychlení, Newtonova pohybová rovnice . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Integrální počet</b>	<b>39</b>
2.1	Motivace . . . . .	39
2.2	Neurčitý (Newtonův) integrál . . . . .	39
2.2.1	Rigorózní dodatek - Bližší vzhled do zápisu integrálů . . . . .	41
2.2.2	Metody výpočtu neurčitého integrálu . . . . .	43
	Metoda per partes . . . . .	44

	Bonbónek k per partes - integrály $x^k \sin(x)$ a $x^k \cos(x)$ . . . . .	45
	Metoda „vyjádření integrálu“, přičtení nuly . . . . .	46
	Substituční metoda . . . . .	48
2.2.3	Rigorózní dodatek . . . . .	52
2.2.4	Pokročilé metody výpočtu neurčitého integrálu . . . . .	52

# Kapitola 1

## Diferenciální počet

V této kapitole bude zavedeno určité základní minimum z diferenciálního počtu. Většina vykládané látky koresponduje s výukou diferenciálního počtu na středních školách, naleznete zde však také některé kapitoly, které středoškolský výklad přesahují. Čtenáři však doporučuji, aby si je přečetl také, získá tak větší přehled o tom, jaký smysl vykládaná látka má.

### 1.1 Motivace

Začneme tím, čím matematické učebnice většinou nezačínají – vysvětlením, k čemu se diferenciální počet používá. Diferenciální počet totiž není jen bezduchá kapitola, jejímž cílem bylo „zaplácnout“ mezeru v učivu a ztížit studentovi život, je to jeden ze základních stavebních kamenů moderní matematiky. Bez diferenciálního počtu si není možné představit moderní fyziku, chemii, ekonomii, stavebnictví, strojírenství, ba dokonce ani biologii. Umožňuje nám totiž zaznamenat, jak se veličiny (poloha, hmotnost, rychlost apod. ve fyzice, cena zboží v ekonomii, množství buněk v biologii. . .) mění v čase. Jak uvidíte, tato informace (jak se daná veličina mění) je jedna z nejdůležitějších informací, které o veličině můžeme získat.

Aplikujeme-li diferenciální počet ve fyzikálních disciplínách, které znáte již ze střední školy, jsme schopni dosáhnout neuvěřitelných výsledků. V klasické mechanice je možné díky diferenciálnímu počtu vybudovat mechaniku kontinua, jež popisuje kompletně mechanicky chování velké části tuhých (i pružných) těles, kapalin a plynů. Pokud máte rádi počítačové hry, jistě jste už hráli nějakou, kde se pohybovaly všude kolem předměty po výbuchu granátu, či se rozvlnila vodní hladina po dopadu těla zastřeleného nepřítele. Vězte, že všechny tyto efekty jsou založené na fyzikálních výpočtech vycházejících z klasické mechaniky a určitých velmi pokročilých partií diferenciálního počtu. Co například taková termodynamika? Konstruování moderních automobilových a letadlových motorů by se bez metod moderního kalkulu naprosto neobešlo. V elektřině a magnetismu je to obdobné – základní rovnice elektromagnetismu jsou totiž určité velmi specifické diferenciální rovnice (které bez nástrojů kalkulu nejsou řešitelné, či, lépe řečeno, ani nedávají smysl). Z těchto rovnic se teprve vše odvíjí, elektromagnetické vlnění bylo dokonce vypočteno teoreticky o mnoho let dříve, než ho byl schopen kdokoli změřit. Dá se tedy říci, že bez kalkulu by neexistovaly žádné moderní technologie založené na elektromagnetismu, se kterými se denně setkáváme – televize, počítače, mikrovlnné trouby. . . Nemůžeme samozřejmě opomenout nejpokročilejší disciplíny moderní fyziky – kvantovou mechaniku a obecnou teorii relativity. Ty nám v současnosti umožňují hluboké poznání toho, jak náš svět ve skutečnosti funguje, a umožňují nám na základě těchto

informací konstruovat extrémně pokročilé technologie a účinně získávat energii. Obě tyto disciplíny je však nemožné vybudovat bez velmi pokročilých metod kalkulu (ovšem kvantová mechanika také ukazuje, že důležitou, ba dokonce dominantní roli v moderní fyzice hraje také obecná a lineární algebra).

Snad vás tento motivační úvod přesvědčil, že kalkulus není jen výplň v učivu čtvrtého ročníku, ale že je to v důsledku velmi užitečná věc, která je schopna poskytnout nám dechberoucí výsledky. Přesuňme se tedy do tajů zájkladní disciplíny kalkulu – diferenciálního počtu.

## 1.2 Trocha historie

Minuly doby Koperníkovy, Keplerovy a Galileiovy a fyzici si začali uvědomovat, že k popisu našeho světa nestačí pouze fyzikální poučky o tom, že dva předměty různého složení puštěné z věže dopadnou na zem ve stejnou chvíli, či astronomické poučky o pohybu hvězd po obloze. Fyzici si uvědomili, že fyzikální svět je možné popsat matematicky. Prvním, kdo s tímto systematickým popisem začal, byl **Sir Isaac Newton**. Jeho jméno jistě znáte, newtonovská mechanika se učí již v prvním ročníku středních škol. Newtonovská mechanika však staví na diferenciálním a integrálním počtu, bez kterých není možné vybudovat smysluplnou (a ze studentského hlediska ne úplně nudnou) teorii. Sir Newton si uvědomil, že jednou z hlavních věcí, kterou se musí fyzika zabývat, je pohyb (či obecněji: změna nějaké veličiny v čase<sup>1</sup>). A právě ke studiu pohybu vybudoval základy teorie, kterou se budeme zabývat v této kapitole. To mu umožnilo mnohé – společně z gravitačním zákonem mohl například spočítat, po jakých drahách se pohybují planety kolem slunce. Nejen že tím dokázal známe tři Keplerovy zákony, ale popsal obecně pohyby planet. Tento popis pohybu planet zůstal v platnosti až do zveřejnění Einsteinovy obecné teorie relativity roku 1915. Uvědomíme-li si, že Newton tyto výpočty provedl v 17. století, zjistíme, jaký obrovský intelektuální počin to byl. Newtonova mechanika se však nezaměřuje jen na pohyby vzdálených nebeských těles, dokáže popsat jakékoliv mechanické soustavy. Spočítat, kam dopadne vystřelená dělová koule či jakou tíhu ponese nosník stavby, přestalo být neřešitelným problémem. To umožnilo obrovský rozvoj v mnohých vědeckých i „inženýrských“ oborech.

Dalším, kdo se zabýval diferenciálním a integrálním počtem (a nejen jím), byl německý matematik a filosof **Gottfried Wilhelm Leibniz**. Leibniz vedl s Newtonem nesmiřitelný spor o to, kdo že je vlastně prvním objevitelem diferenciálního počtu (tato otázka je poněkud sporná, v jistém smyslu jsou objeviteli Leibniz i Newton). Jejich pojetí diferenciálního počtu se lišilo hlavně v přístupu (Newtonovo bylo spíše fyzikální, Leibnizovo matematické). Ovšem ani Newton, ani Leibniz nepodal skutečně matematicky rigorózní popis problematiky, moderní epsilon-delta definice se objevuje teprve v 19. stol. v pracích Karla Weierstrasse. Nicméně symbolika, kterou zavedl Leibniz (např. zápis derivace  $df/dx$ ) se používá doposud.

Po Leibnizovi přišli mnozí další matematikové, kteří aparát kalkulu dále rozvíjeli. Dnes je to robustní teorie, kterou nemá jeden člověk nejmenší šanci celou zvládnout. My se však zaměříme pouze na základy, které většinou nepřesáhnou ani to, s čím přišli již Newton a Leibniz.

---

<sup>1</sup>Ovšem už se nezabýval otázkou, co vlastně onen čas je; byla to pro něj pevná stále plynoucí veličina. Na skutečné „vysvětlení“ tohoto pojmu si budete muset počkat dalších více než 300 let.

### 1.3 Základní pojmy

V této části si zadefinujeme některé pojmy nutné pro výklad dalších částí. Jsou to pojmy obecně známé a nikterak složité, proto tato část bude stručná. Opravdu není nutné se tuto část učit zpaměti jako telefonní seznam, je pouze potřeba mít určité povědomí o tom, co daný pojem znamená. Neznámá by čtenáři mohla být snad jen definice funkce více proměnných, která je uvedena na konci této sekce.

**Definice 1.3.1.** „Předpis“  $f$ , který některým (nebo i všem) reálným číslům přiřazuje nějaké další (klidně i to samé) reálné číslo, nazýváme (reálnou) **funkcí jedné proměnné**. Číslo, které funkce přiřazuje číslu  $x$ , značíme  $f(x)$ . To, že funkce zobrazuje množinu  $A$  do množiny  $B$  zapisujeme  $f : A \rightarrow B$ .

*Poznámka.* Tím, že funkce zobrazuje prvky množiny  $A$  do množiny  $B$  míníme, že „vybírám“ jednotlivé prvky  $z$   $A$  a přiřazuji jim nějaké prvky  $z$   $B$ . Neznamena to ovšem, že by nutné musela „využít“ všechny prvky  $z$  množiny  $B$ , např. pro funkci  $f(x) = x^2$  platí:  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ale také  $f : \mathbb{R} \rightarrow \langle 0; \infty \rangle$

*Poznámka.* Často bývá v matematické literatuře zvykem mluvit o funkci  $f(x)$ , nikoliv o funkci  $f$ , ačkoli  $f(x)$  značí funkční hodnotu, nikoliv funkci jako takovou. My tento zápis budeme používat v některých místech také, protože má určité výhody, např. je z něj zřejmé, zda jde o funkci jedné či více proměnných, a jak nazýváme argument (tj. většinou  $x$ ) funkce.

**Definice 1.3.2.** Množinu  $A$  čísel, z níž funkce  $f$  „vybírám“ prvky, nazýváme definičním oborem funkce  $f$  a značíme ji  $D_f$ .

**Definice 1.3.3.** Množinu  $H_f$  čísel, v níž leží funkční hodnoty funkce  $f$ , nazýváme oborem hodnot funkce  $f : A \rightarrow B$ . Vždy platí  $H_f \subseteq B$ .

**Definice 1.3.4.** O funkci  $f : A \rightarrow B$  řekneme, že je **prostá**, pokud pro každé  $y \in B$  existuje právě jedno  $x \in A$ , pro které platí  $f(x) = y$ . Jinak řečeno – funkce je prostá, pokud nepřisazuje žádným dvěma bodům z definičního oboru to samé číslo.

**Definice 1.3.5.** O funkci  $f : A \rightarrow B$  řekneme, že je **na**, resp. že zobrazuje množinu  $A$  **na** množinu  $B$ , pokud pro každé  $y \in B$  existuje alespoň jedno  $x \in A$  pro které  $f(x) = y$ . Jinými slovy – pokud funkce  $f$  využívá celou množinu  $B$ , neboli  $H_f = B$ .

**Definice 1.3.6.** O funkci  $f$  řekneme, že je **vzájemně jednoznačné zobrazení**, neboli **bijekce** množiny  $A$  na množinu  $B$ , pokud je zároveň prostá i na. To znamená, že každému prvku  $x \in A$  přiřazuje právě jeden prvek  $y \in B$ .

**Příklad 1.3.1.** Vezměme funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2$ . Oborem hodnot této funkce je  $\langle 0; \infty \rangle$ , tedy tato funkce není na. Spočteme-li hodnoty funkce např. v bodech  $-2$  a  $2$ , zjistíme, že  $f(-2) = f(2) = 4$ . Tedy dvěma různým bodům přiřazuje stejné číslo a není tedy prostá.

**Příklad 1.3.2.** Naopak funkce  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^3$  „využívám“ celá reálná čísla, je tedy na. Je také prostá, protože pro každé  $y \in \mathbb{R}$  můžeme jednoznačně určit  $x \in \mathbb{R}$ , pro které  $f(x) = y$ , je totiž  $x = \sqrt[3]{y}$ . Tato funkce je tedy bijekcí z  $\mathbb{R}$  do  $\mathbb{R}$ .

**Definice 1.3.7.** Necht'  $f(x)$  je prostá funkce. Sestrojíme-li funkci  $g(x)$ , která má tu vlastnost, že  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ , pak tuto funkci  $g(x)$  nazýváme **inverzní funkce k**  $f(x)$  a značíme

$g(x) = f^{-1}(x)$ . Upozorňujeme výslovně, že horní index  $-1$  nemá nic společného s mocněním ve smyslu násobení reálných čísel, je to pouze symbol, který označuje, že vytváříme funkci inverzní. Jinými slovy – víme-li hodnotu (prosté) funkce  $y = f(x_0)$  v bodě  $x_0$ , „řekne“ nám funkce  $f^{-1}(y)$ , jaké je ono  $x_0$ .

**Příklad 1.3.3.** Sestrojte inverzní funkce k funkcím  $x^2$  na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$ ,  $\sin(x)$  na intervalu  $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$  a k funkci  $2x + 1$  pro  $x \in R$ .

**Řešení.** Čtenář jistě snadno určí inverzní funkce k všem třem funkcím. K funkci  $x^2$  je to  $\sqrt{x}$ , k funkci  $\sin(x)$  je to  $\arcsin(x)$  a z funkce  $y = 2x + 1$  snadno vyjádříme  $x$  jako  $x = (y - 1)/2$ . Záměnou symbolů  $x$  a  $y$  dostaneme funkci inverzní, a tou je  $(x - 1)/2$ .

Nyní zadefinujeme funkci více proměnných. Ačkoli je tento text určen primárně jako diferenciální počet funkcí jedné proměnné, v některých částech bude nutné použít i určité minimum z teorie funkcí více proměnných. Proto je zde uvedena následující

**Definice 1.3.8. Funkcí n-proměnných** nazveme zobrazení  $f : R^n \rightarrow R$ , kde  $R^n$  znamená kartézský součin  $R \times R \times \dots \times R$   $n$ -krát, neboli množinu všech uspořádaných  $n$ -tic reálných čísel, které každému prvku  $R^n$  přiřazuje určité reálné číslo. Hodnotu, kterou funkce přiřazuje danému bodu  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , značíme  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

*Poznámka.* Pokud  $n = 2$ , resp.  $n = 3$ , získáme funkci dvou, resp. tří proměnných. V takovém případě často značíme parametry  $x, y$ , resp.  $x, y, z$  místo  $x_1, x_2$ , resp.  $x_1, x_2, x_3$

**Příklad 1.3.4.** Pokud je  $n = 2$ , získáme zobrazení  $f : R^2 \rightarrow R$ , neboli funkci dvou proměnných. Tu můžeme zadat funkčním předpisem např.  $f(x, y) = x \cdot y$ . Pokud si tuto funkci představíme jako zadání „výšky“ bodu nad rovinou  $xy$ , tj.  $z = f(x, y)$ , zjistíme, že daný předpis vytváří plochu ve tvaru paraboloidu. Tato geometrická interpretace, kde funkce pouze zadává  $z$ -ovou souřadnici v trojrozměrném prostoru, může být velmi užitečná v geometrických úvahách.

## 1.4 Limita

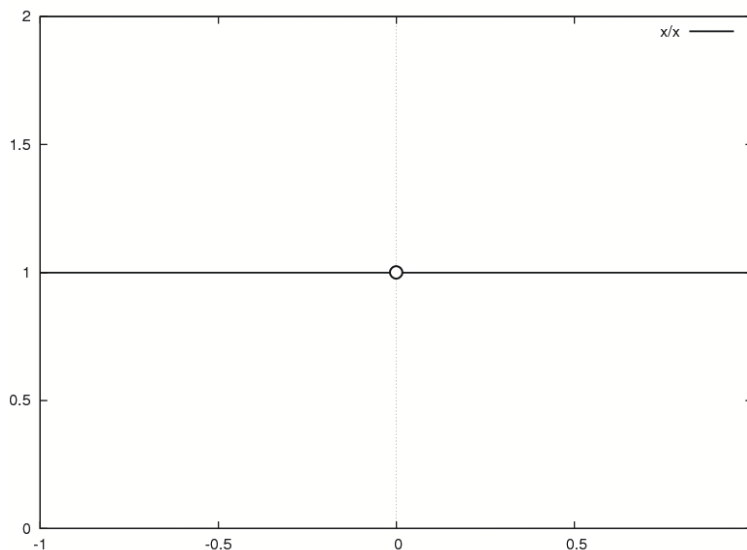
Pojem limity je jedním ze základních pojmů matematické analýzy. Pro zvládnutí další látky je však většinou nutné hlavně intuitivní pochopení tohoto pojmu a určité povědomí o praktických metodách výpočtu, ne desítky triků na výpočty limit, jímž je většinou na vysokých školách věnována až přemrštěná pozornost při úvodních kurzech matematiky.

### 1.4.1 Intuitivní zavedení limity

Začněme konkrétním příkladem. Představme si funkci  $f(x) = \frac{x}{x}$ . To je přeci rovno jedné, řeknete si. Ale pamatujete na to, jak jste v prvním ročníku na střední škole právě u této funkce museli v bodě nula kreslit prázdné kolečko, protože tam funkce není definována (viz obr. 1.1)? Nezdálo by se přirozené, že i v bodě 0 by funkce měla mít hodnotu 1, když na všech ostatních číslech má taktéž hodnotu 1?

Právě k tomuto přirozenému „dodefinování“ funkce v bodech, kde funkce není definována, slouží pojem **limita**. Jak uvidíme později, limita vůbec není závislá na tom, zda je funkce v daném bodě definována. Limitu zapisujeme takto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$$

Obrázek 1.1: Funkce  $x/x$  v intervalu  $(-1, 1)$ 

Tento zápis znamená, že blížíme-li se nekonečně k bodu  $x_0$ , blíží se hodnota funkce  $f(x)$  nekonečně hodnotě  $a$ . Např. u funkce  $f(x) = x/x$  je zřejmé, že jakkoliv se blížíme nule, má funkce pořád hodnotu 1. Tedy:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

### 1.4.2 Matematické zavedení limity

V předchozí sekci jsme si zavedli pojem limity intuitivně, pokusme se ho nyní zavést matematicky.

**Definice 1.4.1.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  **vlastní limitu**  $L$ , je-li:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \quad (1.1)$$

Toto číslo  $L$  pak nazýváme **limitou funkce v bodě**  $x_0$  a značíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

Předchozí zavedení limity bylo poněkud abstraktní, proto ho zkusme popsat slovně. Zápis (1.1) znamená, že pro každé  $\varepsilon > 0$  musí existovat (maličké)  $\delta > 0$  takové, že leží-li  $x$  ve vzdálenosti menší než  $\delta$  od bodu  $x_0$ , je vzdálenost  $f(x)$  od čísla  $a$  menší než  $\varepsilon$ . Jinými slovy, čím více se přiblížíme k bodu  $x_0$ , tím méně nám funkce  $f(x)$  „odbíhá“ pryč od bodu  $L$ , a když se přiblížíme nekonečně, hodnota funkce  $f(x)$  se také nekonečně blíží  $L$ .

Všimněte si toho, že v definici 1.4.1 jsme použili množinu  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ , nikoliv celý interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ . To znamená, že limita nijak nezávisí na hodnotě funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$ . Tato funkce tam může mít zcela jinou hodnotu, než jaká je její limita v tomto bodě, popř. vůbec nemusí být v tomto bodě definována. Použijeme-li příklad funkce  $f(x) = x/x$  a pouze ji „dodefinujeme“ v bodě 0 tak, že  $f(0) = 59$ , na její limitě v bodě 0 to nic nezmění - stále bude 1.

Dále zavádíme také tzv. nevlastní limity, kde limitou funkce není reálné číslo, ale  $+\infty$  nebo  $-\infty$ . Typickým příkladem funkce, jež má ve *vlastním* (konečném) bodě nevlastní limitu je funkce:

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

pro  $x \rightarrow 0$ . Přibližujeme-li se nule, blíží se hodnota funkce neomezeně  $+\infty$ . Precizujme tedy pojem nevlastní limity:

**Definice 1.4.2.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  nevlastní limitu  $+\infty$ , pokud k libovolně velkému číslu  $K$  existuje  $\delta > 0$  takové, že:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} : x > K$$

Jinak řečeno, funkce má nevlastní limitu  $+\infty$ , pokud k libovolně velké konstantě můžeme najít okolí (viz. definice 1.4.4) bodu  $x_0$ , ve kterém je funkce větší než daná konstanta. A tedy zákonitě musí jít  $f(x)$  s tím, jak se blížíme k  $x_0$ , k nekonečnu. Tuto limitu pak značíme:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Analogicky definujeme i nevlastní limitu  $-\infty$ .

*Poznámka.* Analogicky k pojmu limita se zavádí i tzv. **jednostranné limity**, neboli limity zleva a zprava. Princip zůstává stejný, pouze nepožadujeme, aby byl výsledek limity stejný, ať se k bodu  $x_0$  blížíme z jakéhokoliv směru, ale může se obecně lišit, když se blížíme zleva či zprava. (Oboustranná) limita pak existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné limity a mají obě stejnou hodnotu. My však pojem jednostranných limit nebudeme dále potřebovat, proto mu zde nebudeme věnovat větší pozornost. Zmíníme pouze, že limita zleva k bodu  $x_0$  se značí připsáním  $-$  a limita zprava připsáním  $+$ . Například funkce  $1/x$  jde evidentně pro  $x \rightarrow 0$  k nekonečnu. Když ovšem dosazujeme malá záporná čísla  $x$ , dostáváme velká záporná čísla  $1/x$ , když dosazujeme čísla kladná, dostáváme čísla kladná. Je tedy:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

a oboustranná limita neexistuje.

Poslední typ limity, jež si zde uvedeme, je limita v nevlastním bodě. *Nevlastním bodem* nazýváme  $+\infty$  nebo  $-\infty$ . Definice limity funkce v nevlastním bodě je zcela analogická definici limity posloupnosti.

**Definice 1.4.3.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v nevlastním bodě  $+\infty$  limitu  $L$ , platí li:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists x_0 : x > x_0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Slovy: Čím více se  $x$  blíží nekonečnu, tím více se hodnota  $f(x)$  blíží  $L$ . Při nekonečném přiblížení  $f(x)$  a  $L$  splývají. To zapisujeme:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

Definice limity pro  $x \rightarrow -\infty$  je zcela analogická.

### 1.4.3 Rigorózní dodatek k definici limity

Při zavádění obecného pojmu limita se většinou pracuje s tzv. **okolím** bodu. Okolí bodu je totiž pojem obecný, který můžeme aplikovat i na jiné *prostory* než je prostor reálných čísel. Zavedení teorie tzv. *metrických prostorů* je však již výrazně nad rámec této publikace, proto jej zde uvádět nebudeme. Můžeme však definovat okolí pomocí pojmu vzdálenosti, který se ukáže jako přirozeným rozšířením pojmu okolí na plochu a prostor.

**Definice 1.4.4.**  $\varepsilon$ -**okolím** bodu  $x_0$  nazýváme množinu všech bodů  $x$ , pro které platí:  $\rho(x, x_0) < \varepsilon$ , kde  $\rho(x, x_0)$  je vzdálenost bodu  $x$  od bodu  $x_0$ . Toto okolí značíme  $U_\varepsilon(x_0)$ .

**Redukovaným  $\varepsilon$ -okolím** bodu  $x_0$  nazýváme množinu  $U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}$  a značíme  $U_\varepsilon^*(x_0)$ , je to tedy okolí bodu  $x_0$ , ze kterého je bod  $x_0$  vyjmut.

**Příklad 1.4.1.** Na reálných číslech platí  $\rho(a, b) = |b - a| = |a - b|$  (Je-li  $b > a$ , pak evidentně vzdálenost těchto bodů na reálné ose je  $b - a$ . Absolutní hodnotu používáme pro případ, že by bylo  $b < a$ .)  $\varepsilon$ -okolím bodu  $x_0$  je pak interval  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ .

Na množině všech uspořádaných dvojic reálných čísel je vzdálenost bodů  $A[x_1, y_1]$  a  $B[x_2, y_2]$  dána vztahem  $\rho(A, B) = |AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ , což je vlastně klasická Pythagorova věta.  $\varepsilon$ -okolím bodu  $S$  je pak vnitřek kruhu o poloměru  $\varepsilon$  a středu  $S$ .

Po zavedení pojmu okolí můžeme definici limity přepsat do následujícího tvaru:

**Definice 1.4.5.** Řekneme, že funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  **limitu**  $L$ , je-li:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in U_\delta^*(x_0) \Rightarrow f(x) \in U_\varepsilon(L) \quad (1.2)$$

Slovy: Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  limitu  $L$  právě tehdy, když pro libovolně malé okolí bodu  $L$  můžeme najít takové okolí bodu  $x_0$ , že pro všechny hodnoty  $x$  z tohoto okolí leží hodnoty  $f(x)$  v tomto libovolně malém okolí bodu  $L$ . (Vágně řečeno - neutěče-li nám nikam funkce na dostatečně malém intervalu, neutěče nám ani v daném konkrétním bodě).

Pro úplnost uveďme ještě následující větu:

**Věta 1.4.1** (Heineho). *Nechť posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  konverguje k hodnotě  $x_0$  ( $a_n \rightarrow x_0$ ) a zároveň  $a_n \neq x_0$  pro všechna přirozená  $n$ , limita  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existuje právě tehdy, když existuje limita  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$  pro každou posloupnost  $(a_n)_{n=1}^\infty$  a má pro všechny posloupnosti s danou vlastností stejnou hodnotu.*

Důkaz této věty čtenář najde např. v [KI, str. 58]. Znění předchozí věty se také někdy považuje za definici spojitosti (kterou pak nazýváme Heineho definice spojitosti).

### 1.4.4 Praktické výpočty limit

V předchozí části jsme definovali jednotlivé pojmy spojené s limitami. Neukázali jsme však žádné praktické postupy, jak limity počítat. Definice limity nám žádné praktické informace o výpočtech limit nepodává – říká totiž jen, zda je dané číslo limitou funkce v daném bodě, neříká však, jak toto číslo zjistit. Viz následující

**Příklad 1.4.2.** Určete hodnotu limity:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

**Řešení.** Dosadíme hodnoty blízké 1. Zkusme například 1,01:  $(1,01^2 - 1)/(1,01 - 1) = 2,01$ , nebo 0,99:  $(0,99^2 - 1)/(0,99 - 1) = 1,99$ . Zdá se tedy, že daná limita má hodnotu 2. Dokažme to. Z definice limity musí platit:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x \in (1 - \delta, 1 + \delta) \setminus \{1\} \Rightarrow \left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| < \varepsilon$$

V na celé množině  $(1 - \delta, 1 + \delta) \setminus \{1\}$  je výraz  $(x^2 - 1)/(x - 1)$  definován, můžeme ho tedy s klidným svědomím pokrátit na  $(x^2 - 1)/(x - 1) = (x + 1)(x - 1)/(x - 1) = x + 1$ . Dosazením do předchozí rovnice dostaneme podmínku:

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \varepsilon$$

kteřá musí platit pro každé  $x$  z množiny  $(1 - \delta, 1 + \delta) \setminus \{1\}$ . Najdeme-li ke každému  $\varepsilon$  takové  $\delta$ , že tato podmínka platí, dokážeme tím, že námi „uhodnutá“ limita 2 je skutečně limitou dané funkce pro  $x \rightarrow 1$ . Co když ale zvolíme např.  $\delta = \varepsilon/2$ ? Maximální hodnota výrazu  $|x - 1|$  pak může být pouze  $|(1 + \delta) - 1| = |\delta| = \varepsilon/2$ , jelikož  $x$  nikdy nemůže mít větší hodnotu než  $1 + \delta$ . Ale  $\varepsilon/2$  je určitě menší než  $\varepsilon$  pro každé kladné epsilon. Tím je tedy dokázáno, že jsme limitu uhodli správně.

Tento způsob počítání limit se však skutečně nejeví jako praktický. Povšimneme-li si však, že jsme v předchozím příkladu výhodně využili faktu, že výraz  $(x - 1)$  je nenulový na celé množině, na které jsme problém řešili, a díky tomu jsme jednoduše daný zlomek pokrátili, můžeme dojít k následující větě:

**Věta 1.4.2.** *Počítáme-li limitu funkce  $f(x)$  pro  $x \rightarrow x_0$ , můžeme nejdříve provést libovolné ekvivalentní algebraické úpravy na množině  $(a, b) \setminus \{x_0\}$ , kde  $(a, b)$  je libovolný interval obsahující  $x_0$ , a pokud je výsledný výraz definován v bodě  $x_0$ , určíme hodnotu limity tím, že do výsledného výrazu dosadíme  $x_0$  za  $x$ .*

Uveďme bez důkazu ještě několik dalších vět, které nám pomohou s výpočty limit (agilní čtenář si může zkusit provést důkazy sám, k většině postačí hrátky s trojúhelníkovou nerovností):

**Věta 1.4.3.** *Předpokládejme, že funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  mají v bodě  $x_0$  vlastní limitu. Pak platí:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \quad (1.3)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right) \quad (1.4)$$

*Předpokládejme dále, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$ , pak:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} \quad (1.5)$$

*Má-li  $f(x)$  vlastní limitu a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ , pak platí:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad (1.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \pm\infty \quad (1.7)$$

*kde znaménko nekonečna závisí na znaménku  $f(x)$  a  $g(x)$ .*

Všimněme si, že věty 1.4.2 a 1.4.3 nic neřekají o tom, jak určit hodnotu limit, pokud i po všech úpravách dojdeme k výrazům ve tvaru  $\frac{0}{0}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0^0$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$  apod. To jsou tzv. neurčitě výrazy. Některé z těchto výrazů je možné spočítat pravidlem uvedeným v následující větě (kterou při prvním čtení můžete klidně přeskočit):

**Věta 1.4.4** (l'Hospitalovo pravidlo). *Platí-li  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , nebo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  a  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ , pak:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

kde  $f'(x)$  a  $g'(x)$  jsou derivace funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$ .

Jelikož pojem derivace je zaveden až v kapitole 1.5, není pro čtenáře, který není s pojmem derivace obeznámen, zatím možné tuto větu využít. Z důvodu pozdějších referencí je však logické uvést tuto větu společně s ostatními větami o limitách.

Uvěďme nyní nějaké příklady, na kterých demonstrujeme předešlé věty:

**Příklad 1.4.3.** Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

**Řešení.** Podle věty 1.4.2 platí:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1)$$

Poslední výraz můžeme podle věty 1.4.3 rozložit na součet tří limit, z nichž každá má hodnotu 1. Výsledná limita je tedy:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$$

**Příklad 1.4.4.** Spočtěte limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 + 7x + 3}{x^3 + 2x^2 - 1}$$

**Řešení.** Podle věty 1.4.2 můžeme čitatele i jmenovatele vydělit  $x^3$  a hodnota limity se nezmění:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x + 3}{x^3 + 2x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{7}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}}$$

Aplikujeme-li nyní vzorec (1.6) ( $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = +\infty$  pro všechna  $n > 0$ ) na zlomky v jednotlivých částech podílu, získáme:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 7x + 3}{x^3 + 2x^2 - 1} = \frac{5 + 0 + 0}{1 + 0 + 0} = 5$$

*Poznámka.* Z příkladu 1.4.4 je zřejmé, jakým způsobem určovat limity v podílu, pokud jde  $x$  k nekonečnu. Vydělením zlomku  $x^n$ , kde  $n$  je nejvyšší vyskytující se mocnina, se vyruší všechna čísla s mocninou menší. Mají-li tedy polynomy v čitateli i jmenovateli stejný stupeň, je limita tohoto podílu rovna podílu koeficientů u nejvyšší mocniny  $x$ . Má-li číselník stupeň vyšší než jmenovatel, je limita nevlastní a má-li číselník stupeň nižší než jmenovatel, je limita 0.

Uveďme nyní ještě jeden velmi důležitý pojem a s ním související věty:

**Definice 1.4.6.** O funkci  $f(x)$  řekneme, že je spojitá v bodě  $x_0$ , je-li funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$  definována a platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Neformálně řečeno – to, že je funkce spojitá, si můžeme představit tak, že její graf je možné nakreslit jedním tahem. Proto tedy musí být v bodě  $x_0$  definována. Pokud by definována byla, ale měla jinou hodnotu, než od ní „očekáváme“, taktéž ji nemůžeme jedním tahem nakreslit. Pro spojitě funkce platí následující věty:

**Věta 1.4.5.** Jsou-li  $f(x)$  a  $g(x)$  spojitě funkce v bodě  $x_0$ , jsou i  $f(x) + g(x)$ ,  $f(x) \cdot g(x)$  a  $f(x)/g(x)$  (kde  $g(x) \neq 0$ ) funkce spojitě v bodě  $x_0$

**Věta 1.4.6.** Je-li  $g(x)$  funkce spojitá v bodě  $x_0$  a  $f(x)$  funkce spojitá v bodě  $A = g(x_0)$ , pak je i funkce  $f(g(x))$  spojitá v bodě  $x_0$ .

*Poznámka.* Věta 1.4.5 plyne přímo z věty 1.4.3. Věta 1.4.6 plyne z věty o limitě složené funkce, kterou uvádíme v následujícím rigorózním dodatku k této části.

### 1.4.5 Rigorózní dodatek k větám o limitách

Jak již bylo řečeno, zde bude uvedena věta (resp. věty) o limitě složených funkcí. Jednodušší verze, které je možné poměrně snadno uvěřit a která se většinou v aplikacích využívá, je:

**Věta 1.4.7.** Nechť  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$  a funkce  $f(x)$  je spojitá v bodě  $A$ . Pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)\right) \quad (1.8)$$

Tuto větu udáváme až v rigorózním dodatku proto, že mnohdy není funkce  $f$  v bodě  $A$  ani definovaná, natož pak spojitá. V takovém případě je nutné použít následující větu, pro jejíž platnost je potřeba splnit jistý ne zcela zjevný předpoklad:

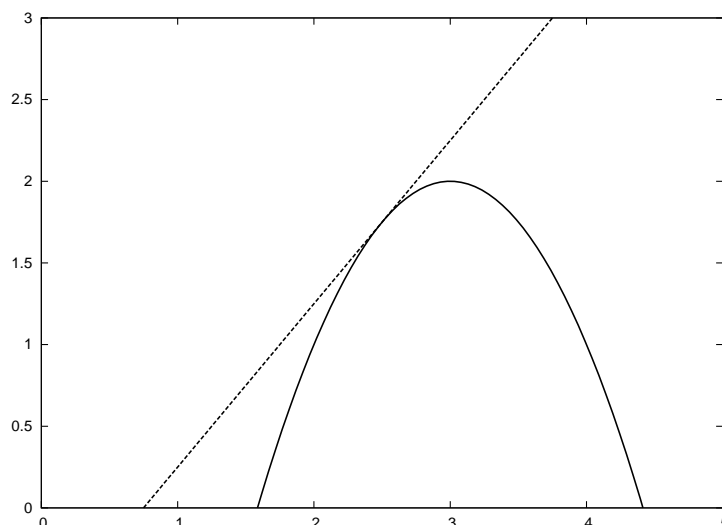
**Věta 1.4.8.** Nechť pro funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  platí:  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow A} f(x) = B$ . Jestliže existuje takové okolí  $U^*(x_0)$ , že  $g(x) \neq A$  pro všechna  $x \in U^*(x_0)$ , pak funkce  $f(g(x))$  má v bodě  $x_0$  limitu a platí:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} f(y) = \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B \quad (1.9)$$

Požadavek  $\forall x \in U^*(x_0) : g(x) \neq A$  a je důležitý, pokud ho nevezmeme v úvahu, může se stát, že formálním aplikováním vzorce (1.9) získáme limitu i u funkce, jež limitu nemá. Důkaz věty a příklad, proč je daný požadavek důležitý, najde čtenář v [KI, str. 68].

## 1.5 Derivace

Pojem derivace patří k naprosto základním pojmům matematické analýzy. V nějaké formě zasahuje prakticky do všech oborů matematiky, proto je nanejvýše vhodné se s tímto pojmem seznámit. Co to tedy ona *derivace* je? Derivování funkce  $f(x)$  je jakýsi „proces“, který provedeme s funkcí, abychom získali funkci jinou. Tato nově vzniklá funkce pak vyjadřuje to, jak se původní funkce mění (resp. jak v daném bodě roste). Zkusme to trochu lépe geometricky znázornit.

Obrázek 1.2: Funkce  $-(x - 3)^2 + 2$  a její tečna v bodě 2,5.

### 1.5.1 Intuitivní zavedení derivace

Na obrázku 1.2 je zobrazena funkce (v tuto chvíli nezáleží na konkrétním předpisu) a její tečna. Nyní se pozastavme nad tím, co vlastně znamená pojem *tečna*. Čtenář obeznámený pouze se „základoškolskou“ definicí tečny předpokládá, že tečna má v daném bodě stejný „směr“, jako daný geometrický útvar (v našem případě funkce) a tento bod je jediný bod, ve kterém se tečna daného útvaru dotýká. Pro naše úvahy je však pojem tečny potřeba zobecnit, a to tak, že upustíme od požadavku, že tečna prochází pouze jedním bodem geometrického útvaru. Definujme tedy (zatím pouze intuitivně) tečnu:

**Definice 1.5.1.** Tečna ke grafu funkce  $f(x)$  je přímka, která prochází nějakým bodem  $[x, f(x)]$  funkce a má v tomto bodě stejný směr jako funkce  $f(x)$ .

Předně si povšimněme jedné důležité věci - to, že tečna je přímka znamená, že (pokud bychom ji chtěli zapsat jako funkci), musí to být funkce lineární, tj. funkce ve tvaru  $t(x) = ax + b$  (jiná než lineární funkce nemá jako svůj graf přímku). Sklon této přímky je plně zadán číslem  $a$ ;  $b$  značí pouze posunutí ve směru osy  $y$ . A právě tento sklon je to, co nás zajímá. Určíme-li sklon tečny v určitém bodě, určíme tím i sklon funkce  $f(x)$  v tomto bodě. Podívejme se nyní, jak tento sklon vypočítat. Obvykle se tento sklon nazývá *směrnice*, definujme tedy přesně tento pojem:

**Definice 1.5.2.** Necht'  $f(x) = ax + b$  je lineární funkce, pak číslo  $a$  nazveme směrnici této funkce.

### 1.5.2 Matematické zavedení derivace

Nejdříve potřebujeme vyřešit problém, jak určit konstantu  $a$  u funkce  $s(x) = ax + b$ , víme-li, že funkce prochází body  $[x_1, y_1]$  a  $[x_2, y_2]$ . Rozepišme daný problém jako soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} s(x_1) &= y_1 \\ s(x_2) &= y_2 \end{aligned}$$

Tyto dvě rovnice rozepíšeme, čímž získáme soustavu dvou lineárních rovnic:

$$\begin{aligned} ax_1 + b &= y_1 \\ ax_2 + b &= y_2 \end{aligned}$$

Odečtením první rovnice od druhé získáme:

$$\begin{aligned} a(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \\ \Rightarrow a &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \end{aligned}$$

Symboly  $\Delta y$  a  $\Delta x$  jsme označili příslušné rozdíly  $y_2 - y_1$  a  $x_2 - x_1$ . Zamysleme se nyní nad problémem, jak určit směrnici (tj. konstantu  $a$ ) sečny funkce  $f(x)$ , jež prochází body  $[x_1, f(x_1)]$  a  $[x_2, f(x_2)]$ . Ale to je ve skutečnosti stejný problém, který jsme právě vyřešili – sečna je totiž taková lineární funkce  $s(x) = a_s x + b$ , která prochází zadanými dvěma body. Jediné, co potřebujeme dosadit do předchozího výpočtu, je:  $y_1 = f(x_1)$  a  $y_2 = f(x_2)$ . Pro směrnici sečny tedy platí:

$$a_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (1.10)$$

Teď už zbývá učinit poslední krok - určit směrnici tečny ke grafu funkce  $f(x)$  v daném bodě  $x_0$ . Jak bychom postupovali, kdybychom se snažili tečnu přibližně napodobit? Můžeme např. zvolit nějaké dva blízké body  $x_1 = x_0$  a  $x_2 = x_0 + \Delta x$ , kde  $\Delta x$  je nějaké malé číslo, v těchto dvou bodech zjistíme funkční hodnoty funkce  $f(x)$  a sestrojíme sečnu. Směrnice této sečny bude dána výrazem:

$$a_s = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{x_0 + \Delta x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.11)$$

Čím menší číslo  $\Delta x$  bude, tím více se tato sečna bude blížit tečně. Ale matematický aparát zavedený v sekci o limitách nám umožňuje považovat  $\Delta x$  za nekonečně malé. Dostáváme se tedy k následující definici:

**Definice 1.5.3. Derivací funkce  $f(x)$  v bodě  $x_0$**  nazýváme směrnici její tečny v tomto bodě. Tuto směrnici značíme  $f'(x_0)$  a je dána výrazem:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu můžeme zapsat v ekvivalentním tvaru, který odpovídá rovnici (1.10):

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ukažme nyní, že derivace není pouze jakýsi „matný“ pojem, ale jedná se u některých funkcí o věc relativně snadno spočitatelnou.

**Příklad 1.5.1.** Určete derivaci konstantní funkce  $f(x) = c$  v bodě  $x_0$ .

**Řešení.** Již z geometrického názoru je zřejmé, že konstantní funkce má nulový „sklon“. Odvoďme to tedy z definice derivace:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c - c}{\Delta x} = 0 \quad (1.12)$$

**Příklad 1.5.2.** Určete derivaci funkce  $f(x) = x^2$  v bodě  $x_0$  pomocí obou limit uvedených v definici 1.5.3.

**Řešení.** Zapišme nejdříve první limitu:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} \end{aligned}$$

Což po vydělení posledního zlomku a aplikaci věty 1.4.3 dá:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 2x_0 + 0 = 2x_0$$

Nyní aplikujme celý postup znovu na alternativní definici derivace:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x + x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = x_0 + x_0 = 2x_0 \end{aligned}$$

Dospěli jsme tedy ke stejnému výsledku o trochu jednodušší cestou. To, jaký tvar je pro výpočet vhodnější, závisí vždy na konkrétním případě.

Cílem této publikace ovšem není čtenáře naučit odvozovat derivace jednotlivých funkcí, cílem je podat určitý obecný přehled a ukázat základní metody. Přehled derivací různých funkcí je možné nalézt ve většině matematicko-fyzikálních tabulek, učebnic matematické analýzy, či středoškolských učebnic diferenciálního počtu. Derivace některých vybraných funkcí je možné nalézt v tabulce 1.1.

Zadefinujme ještě tzv. derivace vyšších řádů:

**Definice 1.5.4. Derivací  $n$ -tého řádu** funkce  $f(x)$  nazýváme funkci, která vznikne, když  $n$ -krát zderivujeme funkci  $f(x)$ . Derivaci  $n$ -tého řádu značíme  $f^{(n)}(x)$ . Derivaci druhého a třetího řádu obvykle značíme  $f''(x)$  a  $f'''(x)$ .

**Příklad 1.5.3.** Spočítejte třetí derivaci funkce  $f(x) = x^5$ .

**Řešení.** Využijeme vzorce  $(x^n)' = nx^{n-1}$  z tabulky 1.1. Počítejme po řadě první, druhou a třetí derivaci. Každá další derivace vznikne tak, že znovu zderivujeme funkci předchozí:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5x^4 \\ f''(x) &= (5x^4)' = 20x^3 \\ f'''(x) &= (20x^3)' = 60x^2 \end{aligned}$$

Výsledek  $60x^2$  je námi hledaná třetí derivace funkce  $x^5$ .

### 1.5.3 Rigorózní dodatek k definici derivace

V intuitivním zavedení derivace jsme derivaci nazvali „jakýsi proces“. Zkusme nyní tento pojem trochu přesněji definovat. Co vlastně derivace s funkcí provede? „Vezme“ jednu funkci a „vrátí“ funkci jinou. Tento proces se však nikterak neliší od procesu, kdy funkce „vezme“ číslo a „vrátí“ číslo jiné. Tedy derivace je vlastně funkce, jejímž definičním oborem však nejsou čísla, ale funkce. Vybudování přesně té množiny funkcí, jež tvoří definiční obor derivace, zde rozebírat nebudeme. Zmíňme však, že funkce, jejímž definičním oborem je nějaká množina funkcí, se obvykle nazývá **operátor**. Alespoň my budeme operátor používat v tomto smyslu:

Funkce $f(x)$	Derivace $f'(x)$	Podmínka
$c$	$0$	
$x$	$1$	
$x^n$	$nx^{n-1}$	pokud je $x^\alpha$ i $x^{\alpha-1}$ definováno
$e^x$	$e^x$	
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$a^x$	$a^x \ln(a)$	
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{cotg}(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$	$x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in \langle -1, 1 \rangle$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \in \langle -1, 1 \rangle$
$\arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
$\operatorname{arccotg}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

Tabulka 1.1: Přehled derivací

**Definice 1.5.5.** Zobrazení  $A : F \rightarrow M$  nazveme **operátor**, je-li  $F$  nějaká množina funkcí a  $M$  libovolná jiná množina. Speciálně, je-li  $M$  množina čísel (reálných či komplexních) nazýváme operátor  $A$  **funkcionál**.

Operátory značíme obvykle velkými písmeny a vynecháváme závorky, když označujeme funkční hodnotu. Například pokud operátor  $A$  aplikovaný na funkci  $f$  vrátí funkci  $g$ , zapíšeme to zápisem:

$$A(f) = Af = g$$

operátor derivace se obvykle značí  $D$ , nebo  $\frac{d}{dx}$ . To, jaký důvod má druhý způsob zápisu, vyplývá z definice diferenciálu. Platí tedy např.  $D(\sin) = d(\sin)/dx = \cos$ . Operátor derivace má, jak odvodíme v další části, jednu důležitou vlastnost. Je to tzv. **lineární operátor**, tj. platí pro něj  $D(f + g) = Df + Dg$ . Toho lze s výhodou využít při řešení diferenciálních rovnic.

Pro čtenáře, který je již obeznámen s maticovým počtem, ještě podotkneme, že, vznikne-li množina  $F$  funkcí, na nichž derivaci zavádíme, jako lineární kombinace (tj. součet reálných násobků) nějaké konečné množiny funkcí, můžeme tuto množinu považovat za vektorový prostor, zvolit bázi a derivaci pak v této bázi vyjádřit jako zcela obyčejnou matici. Odpověď na otázku, kde končí algebra a začíná analýza, je tedy asi poněkud složitější, než by se mohlo zdát. . .

### 1.5.4 Věty o derivacích

Odvoďme nyní derivaci součtu a součinu dvou funkcí:

**Příklad 1.5.4.** Z definice derivace odvoďte derivaci funkce  $h(x) = f(x) + g(x)$ , která je dána součtem dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$ .

**Řešení.** Vyjděme z definice derivace:

$$h'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Pooslední zlomek jednoduše přepíšeme na součet dvou zlomků

$$h'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

**Příklad 1.5.5.** Z definice derivace odvodte derivaci funkce  $h(x) = f(x)g(x)$ , která je dána součinem dvou funkcí  $f(x)$  a  $g(x)$ .

**Řešení.** Vyjděme z definice derivace:

$$h'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0}$$

Nyní použijeme takový malý „trik“. K čitateli posledního zlomku přičteme výraz  $f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x)$ , který je nulový, tedy tím nemůžeme nic zkazit. Posléze vytkneme  $g(x)$  a  $f(x_0)$ .

$$\begin{aligned} h'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} f(x_0) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\ &= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

Derivaci podílu zde odvozovat nebudeme, čtenář si ji může obdobnými postupy zkusit odvodit sám. Shrňme získané výsledky o derivacích do následující věty:

**Věta 1.5.1.** *Pokud mají funkce  $f(x)$  a  $g(x)$  derivaci v příslušných bodech, pak pro ně platí následující vzorce:*

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (1.13)$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) \quad (1.14)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (1.15)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \quad (1.16)$$

*Speciálně, pokud je  $g(x) = c$  konstantní funkce, dostaneme ze vzorce pro derivaci součinu (jelikož derivace konstanty je nula):*

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \quad (1.17)$$

Demonstrujme tyto věty na několika příkladech:

**Příklad 1.5.6.** Spočtete derivaci funkce  $h(x) = \sin(x) \cos(x)$

**Řešení.** Vyjděme ze vzorce (1.15), kam dosadíme  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = \cos(x)$ . Podle tabulky 1.5.2 je  $f'(x) = \cos(x)$ ,  $g'(x) = -\sin(x)$  a tedy:

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) = \cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x) = \cos(2x)$$

V posledním kroku jsme pouze použili známou goniometrickou identitu.

**Příklad 1.5.7.** Spočtěte derivaci funkce  $\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

**Řešení.** Podíváme-li se do tabulky 1.5.2, zjistíme, že  $\operatorname{tg}(x)$  se v ní nachází. Mohli bychom tedy říci, že jsme s prací hotovi, ale nevzdávejme se tak snadno a spočtěme tuto derivaci podle vzorce (1.16):

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x)(\cos(x))'}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Zde jsme pouze použili vztah  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ . Jak vidíme, náš výsledek se shoduje s výsledkem v tabulce.

K tomu, abychom dokázali zderivovat prakticky jakoukoliv funkci nám chybí ještě jeden podstatný vzorec. Je to derivace složené funkce  $h(x) = f(g(x))$ . Zkusme nyní z definice derivace odvodit derivaci složené funkce:

$$h'(x) = (f(g(x)))' = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \quad (1.18)$$

Nyní použijeme podobný trik jako při odvozování derivace součinu. Nebudeme však přičítat výraz s hodnotou nula, ale vynásobíme celý zlomek výrazem  $(g(x) - g(x_0))/(g(x) - g(x_0))$ , který má hodnotu 1:

$$h'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

Použijeme-li substituci  $y = g(x)$ ,  $y_0 = g(x_0)$ , pak, pokud je  $g(x)$  spojitá funkce, platí pro  $x \rightarrow x_0$  také  $g(x) \rightarrow g(x_0)$  a tedy  $y \rightarrow y_0$ . Rozepíšeme-li předchozí výraz na dvě limity, získáme:

$$h'(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} = f'(y_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Zde jsme pouze využili toho, že první limita přesně odpovídá definici derivace (pouze s přeznačením  $y$  za  $x$  a  $y_0$  za  $x_0$ ) a poté jsme za  $y_0$  dosadili  $y_0 = g(x_0)$ . Shrňme tento výsledek do věty:

**Věta 1.5.2** (Derivace složené funkce). *Nechť  $g(x)$  má derivaci v bodě  $x$  a  $f(x)$  má derivaci v bodě  $g(x)$ . Pak složená funkce  $f(g(x))$  má derivaci v bodě  $x$  a její hodnota je:*

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (1.19)$$

Ukažme si zase pár příkladů, které toto pravidlo osvětlí.

**Příklad 1.5.8.** Spočtěte derivaci funkce  $h(x) = \sin(x^2)$

**Řešení.** Použijeme vzorce (1.19), kam dosadíme  $f(x) = \sin(x)$ ,  $g(x) = x^2$ . Zapišme tedy postup:

$$(\sin(x^2))' = \sin'(x^2) \cdot (x^2)' = \cos(x^2) \cdot 2x$$

**Příklad 1.5.9.** Dokažte pomocí vzorce (1.19), že  $(x^4)' = 4x^3$ , víte-li, že  $(x^2)' = 2x$ .

**Řešení.** Předně si povšimněme, že označíme-li  $f(x) = x^2$ , pak  $x^4 = f(f(x))$ , tedy stačí použít vzorec (1.19), kde dosadíme  $g(x) = f(x)$ . Platí  $f'(x) = 2x$ , a tedy:

$$(x^4)' = ((x^2)^2)' = (f(f(x)))' = f'(f(x))f'(x) = 2x^2 \cdot 2x = 4x^3$$

Zkusme nyní jeden „obecnější“ příklad:

**Příklad 1.5.10.** Odvoďte vzorec pro derivaci složení tří funkcí, tj. vzorec pro derivaci funkce  $f(g(h(x)))$ .

**Řešení.** Samozřejmě, že by bylo možné tento vzorec odvodit limitou stejně, jako jsme odvodili vzorec pro derivaci složení dvou funkcí. To však provádět nebudeme, místo toho zase pouze aplikujeme vzorec (1.19). Označme  $G(x) = g(h(x))$ . Pak se nám problém zredukuje na derivaci funkce  $f(G(x))$ , kterou již známe, je to

$$(f(G(x)))' = f'(G(x)) \cdot G'(x)$$

Derivaci  $G(x)$  ovšem také známe, je to totiž podle stejné věty  $G'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ , což po dosazení dá:

$$(f(G(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

Uveďme ještě jednu větu, kterou je díky způsobu jejího odvození poměrně snadné si zapamatovat. Odvoďme derivaci funkce  $f^{-1}(x)$ , která je inverzní (viz definice 1.3.7) k funkci  $f(x)$  (upozorňujeme, že horní index  $-1$  není exponent, neprobíhá tedy žádné dělení). Vyjdeme z toho, že pro každé  $x \in D_f$  platí:

$$f(f^{-1}(x)) = x \tag{1.20}$$

Jsou-li si rovny funkce na obou dvou stranách rovnosti (1.20), musí si být logicky rovny i jejich derivace. Zderivujme tedy obě strany této rovnosti podle věty o derivaci složené funkce:

$$(f(f^{-1}(x)))' = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1}(x))' = (x)' = 1 \tag{1.21}$$

Z rovnice (1.21) pak již snadno vyjádříme  $(f^{-1}(x))'$ .

**Věta 1.5.3** (Derivace inverzní funkce). *Má-li funkce  $f(x)$  inverzní funkci  $f^{-1}(x)$ , pak v bodech, kde  $f' \neq 0$ , platí:*

$$(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Demonstrujme tuto větu na příkladech:

**Příklad 1.5.11.** Spočítejte derivaci funkce  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$  jakožto funkce inverzní k funkci  $f(x) = x^2$ .

**Řešení.** Vyjdeme z věty 1.5.3. Víme, že  $f'(x) = 2x$ , a tedy:

$$(\sqrt{x})' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Vyjdeme-li ze vzorce  $(x^n)' = nx^{n-1}$ , kde za  $n$  dosadíme  $\frac{1}{2}$ , získáme výsledek:

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Výsledky získané oběma způsoby se tedy shodují.

**Příklad 1.5.12.** Spočtěte derivaci funkce  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  jakožto funkce inverzní k funkci  $f(x) = \sin(x)$ .

**Řešení.** Opět vyjdeme z věty 1.5.3. Víme, že  $f'(x) = \cos(x)$ , a tedy:

$$(\arcsin(x))' = (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Poslední výraz nevypadá zrovna moc přívětivě, můžeme ho však ještě poměrně jednoduše upravit. Vyjdeme ze vztahu  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ , tedy  $\cos(x) = \sqrt{1 - \sin^2(x)}$ . Po dosazení do předchozího vzorce získáme výsledek:

$$\frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Tento výraz odpovídá zápisu v tabulce 1.1.

## 1.6 Diferenciál

V této části se pokusíme vysvětlit, co je to tzv. *diferenciál*. Hlubší vysvětlení tohoto pojmu se na střední škole většinou poněkud zanedbává a studenti o něm mají poněkud matnou představu. Háček je ovšem v tom, že tento pojem vnímají různě i sami matematici a fyzici. Značí ho však (skoro) všichni stejně – diferenciál funkce  $f$  značíme  $df$ . Fyzici se na diferenciál většinou dívají jako na nekonečně malou změnu toho, čeho je to diferenciál, takže např. při zápisu derivace je možné vynechat symbol limity, protože  $dx$  už samo o sobě představuje změnu nekonečně malou:

$$f' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$$

Derivaci můžeme zapsat například také takto:

$$f'(x) = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$$

Vezmeme-li tedy za definici diferenciálu  $df$ , že je to to samé jako  $\Delta f$ , pouze explicitně předpokládáme, že hodnota se limitně blíží nule, pak jsme hotovi, řekli jsme k tomu vše potřebné. Poznamenejme ještě, že zápis:

$$\frac{db}{da}$$

značí derivaci  $b$  podle  $a$ , nehledě na to, co je  $a$  a co je  $b$ . Pomocí tohoto zápisu můžeme také snadno „odvodit“ derivaci složené funkce  $F(x) = f(g(x))$ :

$$F'(x) = \frac{dF}{dx} = \frac{dF}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = \frac{d(f(g))}{dg} \cdot \frac{dg}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

*Poznámka.* Pomocí „děček“ je možné zapsat i derivace vyšších řádů. Přirozeně můžeme diferenciál zapsat několikrát za sebou:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} \dots \frac{d}{dx} f(x)$$

Tento zápis je však nepohodlný, a proto je používán zápis jiný, který sice nemá nic společného s původním významem pojmu diferenciál, je však kratší a přehlednější:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

### 1.6.1 Rigorózní dodatek k definici diferenciálu

Zvídavý člověk však s předchozí definicí diferenciálu nemůže být spokojen. Nezavádí totiž žádný matematický základ pro to, co to onen diferenciál ve skutečnosti je, jaká jsou pravidla pro počítání s ním apod. Diferenciál však můžeme zavést také poněkud jinak. Následující definice je inspirována definicí v [KI, str. 100], kde je možné najít i přesné definice a důkazy, které jsou zde podávány pouze intuitivně.

**Definice 1.6.1.** Diferenciál funkce  $f$  je taková funkce dvou proměnných  $x$  a  $\Delta x$  (označme ji  $df(x, \Delta x)$ ), pro kterou platí, že je v bodě  $x$  nejlepším lineárním přiblížením přírůstku funkce při posunu o malou vzdálenost  $\Delta x$

Jinými slovy požadujeme, aby při nekonečně malém posunutí  $\Delta x$  dal diferenciál funkce v bodě  $x$  přesné nekonečně malé posunutí  $\Delta f$ , o kolik se funkce změní. Tj. známe-li hodnotu funkce  $f$  v bodě  $x_0$ , a chceme vědět, o kolik se přibližně změní hodnota funkce  $f$ , posuneme-li se do bodu,  $x_0 + \Delta x$ , pro nějaké velmi malé  $\Delta x$ , jednoduše tyto dvě hodnoty dosadíme do výše definovaného diferenciálu. Není těžké nahlédnout, že lineární růst funkce vyjadřuje její derivace, a tedy diferenciál můžeme zapsat jako:

$$df(x, \Delta x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

Demonstrujme to na příkladu funkce  $f(x) = x^2$ . Pro její diferenciál pak platí:

$$df(x, \Delta x) = 2x \cdot \Delta x$$

dosadíme např.  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0,1$ . Pak snadným dosazením určíme, že je:

$$df(2, 0,1) = 4 \cdot 0,1 = 0,4$$

Spočtíme nyní, o kolik se liší hodnoty funkce  $f$  v bodech 2 a 2,1:

$$f(2,1) - f(2) = 4,41 - 4 = 0,41$$

Jak vidíme, diferenciál nám prakticky přesně řekl, o kolik se funkce v těchto dvou bodech liší. Čím menší je  $\Delta x$ , tím přesnější je výsledek. Jak takto zavedený diferenciál souvisí s derivací? Pro diferenciál funkce  $g(x) = x$  platí zjevně

$$dg(x, \Delta x) = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

Většinou místo  $dg$  zapisujeme  $dx$ . Když nyní dosadíme do podílu

$$\frac{df(x, \Delta x)}{dx(x, \Delta x)} = \frac{f'(x)\Delta x}{\Delta x} = f'(x)$$

zjistíme, že podíl takto definovaných diferenciálů je roven derivaci funkce  $f$ .

### 1.6.2 Rigorózní dodatek k rigoróznímu dodatku

Předchozí rigorózní dodatek dává určitý vhled do toho, že diferenciál je skutečně matematicky pochytitelnou veličinou. V době, kdy tento pojem zaváděl Leibniz, chápal zápis  $dx$  jako nekonečně malé číslo, což ovšem z hlediska běžného zavedení reálných čísel nedává smysl (žádná nekonečně malá čísla neexistují). Teprve v 60. letech dvacátého století objevil Abraham Robinson způsob, který umožňuje zkonstruovat rozšíření reálných čísel, ve kterém existují nekonečně malé i nekonečně velké veličiny. Na základě tohoto přístupu je poté možné vybudovat zcela matematicky rigorózní teorii, které se dnes říká nestandardní analýza (non-standard analysis). Ukazuje se, že tato analýza je přinejmenším stejně silná jako klasická matematická analýza, tedy že jakýkoliv „klasický“ problém lze řešit i „nestandardně“. Jsou ovšem i jisté indície, že by nestandardní analýza mohla být i řešením mnohých problémů moderní matematiky, především existence tzv. neměřitelných množin (v klasické analýze je možné<sup>2</sup> například rozdělit kouli v prostoru na několik disjunktních množin, ty poté pouze posunovat a

<sup>2</sup>pokud přijmeme tzv. axiom výběru

otáčet a výsledkem tohoto procesu budou dvě koule vedle sebe stejně velké jako původní koule<sup>3</sup> – to je ovšem možné jen díky existenci onich neměřitelných množin, tedy množin, u kterých nejsme schopni změřit jejich objem).

Pojem diferenciálu je ovšem i v „klasické“ moderní analýze mnohem obecnější, než jak byl prezentován v předchozím rigorózním dodatku. Je možné jej zavést i pro funkce více proměnných. Mějme nějakou funkci dvou proměnných  $f : R^2 \rightarrow R$ . Když odhlédneme od možného vnoření této funkce do prostoru, můžeme si definiční obor a obor hodnot představit jako nezávislé jedno a dvourozměrné prostory. Diferenciál  $f$  v bodě  $(x, y)$  pak bude funkce, která povede z „tečného prostoru“ k  $R^2$  v daném bodě do tečného prostoru k  $R$  v bodě  $f(x, y)$ . Jelikož ale prostory  $R^n$  jsou „rovné“, je tečný prostor k nim opět příslušný vhodně rozměrný prostor, v našem případě tedy  $R^2$  a  $R$ . Diferenciál pak bude funkce, která „sežere“ vektor z  $R^2$  a vrátí hodnotu, o kolik přibližně funkce  $f$  ve směru tohoto vektoru povyroste či klesne.

I tento koncept se ovšem dá dále zobecnit. Příslušná funkce nemusí vést do  $R$ , ale může vést do vícerozměrného prostoru. Diferenciál dané funkce pak bude dostávat vektor a vrátí také vektor, což ale není překvapující – když udává změnu vektorové funkce, musí vracet vektor. A konečně – zřůdnost ve formě tečných prostorů v minulém odstavci byla zmíněna proto, že diferenciál je možné zavést i pro funkce, které vedou mezi „krivými“ prostory. Pak operuje na vektorech právě v tečných prostorech v daných bodech.

Souvislost pojmu diferenciálu a teorie integrování se zavádí přes tzv. diferenciální formy. Ty pro diferenciály budují přívětivou algebru, která s nimi umožňuje dělat zázračné věci – třeba počítat povrch koule, nebo i něco zajímavějšího.

Posledních několik odstavců, prosím, **berte jako pouhou ochutnávku** toho, co existuje. Rozhodně se nedá předpokládat, že byste zhuštěným pojmům, které jsem zde vychrlil, jen po přečtení této kapitoly porozuměli. Doufám však, že vás bude motivovat k tomu, abyste neustrnuli u „jednoduchých“, „středoškolských“ pojmů, které jsou vykládány v tomto textu, ale abyste se ponořili do neuvěřitelně bohatého světa skutečné matematiky.

## 1.7 Derivace vektorů

V předchozí kapitole jsme se zaměřili pouze na derivace „běžných“ funkcí. Ve fyzice se však daleko častěji setkáváme s vektorovými veličinami (jako je např. poloha bodu, rychlost, zrychlení, síla, hybnost...), které se v některých jednoduchých případech dají nahradit pouze jednou souřadnicí (funkcí jedné proměnné), např. při svislém vrhu, volném pádu, přímočarém pohybu atd. Pokud však zůstaneme v kartézském systému souřadnic (tj. máme dvě nebo tři souřadnicové osy, jež jsou navzájem kolmé), je zavedení derivací vektorů stejně jednoduché jako zavedení derivace funkce jedné proměnné. Vektor v trojrozměrném prostoru totiž reprezentujeme trojicí čísel  $\mathbf{r} = (x, y, z)$ . Chceme-li, aby daný vektor nebyl konstantní, ale byla to funkce nějakého parametru  $t$  (ve fyzikálních aplikacích se jedná většinou o čas), pak pouze ze tří složek vektoru uděláme funkce parametru  $t$ , tj.  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ . Derivaci vektoru  $\mathbf{r}$  pak zavádíme zcela analogicky, jako derivaci funkce jedné proměnné:

**Definice 1.7.1.** Derivací vektorové funkce (vektoru)  $\mathbf{r}$  nazýváme vektor:

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h}$$

*Poznámka.* Pokud derivujeme podle proměnné  $t$ , bývá v literatuře zvykem psát místo  $\mathbf{r}'$ , kde je derivace označena čárkou,  $\dot{\mathbf{r}}$ , kde derivace je značena tečkou nad vektorem.

<sup>3</sup>tzv. Banach-Tarského paradox

Uvědomíme-li si, že pro dva vektory  $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$  a  $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$  platí:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$

můžeme snadno derivaci vektoru převést na tento tvar:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h}, \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \right) \\ &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \end{aligned}$$

Tedy stačí, derivujeme-li funkce  $x(t)$ ,  $y(t)$  a  $z(t)$  jako běžné funkce jedné proměnné, což je ale věc, kterou jsme řešili celou kapitolu 1.5. Vektory se tedy dervují „po složkách“. Definujme nyní skalární a vektorový součin vektorů, definicí se nebudeme zabývat hlouběji, předpokládáme že čtenář je s těmito pojmy již obeznámen, a jejich podrobnější znalost nebude nikde v následujícím výkladu potřeba:

**Definice 1.7.2.** Skalárním součinem vektů  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  nazýváme číslo:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

**Příklad 1.7.1.** Pro vektory  $\mathbf{u} = (5, 3, -2)$  a  $\mathbf{v} = (2, -1, 6)$  platí:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 6 = -5$$

**Věta 1.7.1.** Pro velikost skalárního součinu platí:

$$|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos(\alpha)$$

kde  $\alpha$  je velikost úhlu, který vektory svírají.

*Poznámka.* Z předchozí věty mimo jiné plyne, že, jsou-li na sebe vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  kolmé, je jejich skalární součin roven nule.

**Definice 1.7.3.** Vektorovým součinem vektorů  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  a  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  nazýváme vektor<sup>4</sup>:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

**Příklad 1.7.2.** Pro vektory  $\mathbf{u} = (5, 3, -2)$  a  $\mathbf{v} = (2, -1, 6)$  platí:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (3 \cdot 6 - (-2) \cdot (-1), (-2) \cdot 2 - 5 \cdot 6, 5 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = (16, -34, -11)$$

**Věta 1.7.2.** Pro vektor  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$  platí, že  $\mathbf{w}$  je kolmý na oba vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$  (což lze ověřit z definice tak, že tento vektor skalárně vynásobíme vektory  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{v}$ ) a pro jeho velikost platí:

$$|\mathbf{u} \times \mathbf{v}| = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \sin(\alpha)$$

kde  $\alpha$  je velikost úhlu, který vektory svírají.

---

<sup>4</sup>Ve skutečnosti se nejedná o vektor, ale o tzv. axiální vektor, neboli nepravý vektor. Tento vektor se netransformuje jako vektor při zrcadlení souřadnicových os. Hlubší výklad této problematiky je však již nad rámec této publikace

Zkusíme-li vektory  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  a  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  derivovat po složkách dojdeme k následujícímu zjištění, které nám práci s derivacemi vektorů velmi usnadní:

**Věta 1.7.3.** *Pro derivace součinů vektorů  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$  a  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$  platí:*

$$\begin{aligned}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})' &= \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}'\end{aligned}$$

Jak vidíme, derivace skalárního a vektorového součinu je zcela analogická s derivací běžné funkce.

### 1.7.1 Rigorózní dodatek k derivacím vektorů

V předchozím odstavci jsme jednoduše řekli, že derivaci vektoru  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  můžeme převést na tvar  $\dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$ , tedy, že je zřejmé, že vektory derivujeme po složkách. To, proč to tak je, má ovšem hlubší důvod. Vysvětleme si to na příkladu vektoru o dvou složkách. Definice 1.4.4 zavádí pojem okolí, jenž nám umožňuje pojem derivace zobecnit i do vícerozměrného prostoru. Zformulujeme pojem limity pro vektory v  $R^2$ :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : t \in U_\delta^*(t_0) \Rightarrow \mathbf{a}(t) \in U_\varepsilon(\mathbf{b})$$

Přeformulujeme-li to pomocí explicitního vyjádření pojmu okolí, získáme:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |\mathbf{a}(t) - \mathbf{b}| < \varepsilon$$

Pokud označíme  $\mathbf{a}(t) = (x(t), y(t))$  a  $\mathbf{b} = (x_0, y_0)$ , můžeme tento výraz dále upravit na:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{a}(t) = \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} < \varepsilon$$

Můžeme vypočítat (či i později dokázat z toho, až si ukážeme, že odmocnina je tzv. konkávní), že platí  $\sqrt{m+n} \leq \sqrt{m} + \sqrt{n}$  pro nezáporná reálná čísla  $m$  a  $n$ , tedy platí:

$$\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \leq \sqrt{(x(t) - x_0)^2} + \sqrt{(y(t) - y_0)^2} = |x(t) - x_0| + |y(t) - y_0|$$

Pokud tedy ke každému  $\varepsilon/2$  najdeme  $\delta$  takové, že  $|x(t) - x_0| < \varepsilon/2$  a  $|y(t) - y_0| < \varepsilon/2$ , bude to znamenat, že:

$$\sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \leq |x(t) - x_0| + |y(t) - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

To ale znamená, že:

$$\forall \varepsilon' > 0 \exists \delta > 0 : 0 < |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x_0| < \varepsilon'$$

kde jsme označili  $\varepsilon' = \varepsilon/2$ . To ovšem znamená, že:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x_0$$

a totéž platí i pro y-ovou složku.

Zjistili jsme tedy, že, pokud nalezneme limity jednotlivých složek, nalezneme i limitu celého vektoru.

## 1.8 Vyšetřování průběhu funkce

Zatím jsme se naučili derivace počítat, nenaučili jsme se je však k ničemu praktickému využít. Bohužel však nezbyvá než konstatovat, že to, co se naučíme v této kapitole, taktéž nebude mít nějaký velký praktický přínos, půjde spíše o to poznat, k čemu se derivace dají využívat i jen z čistě matematického hlediska, bez ohledu na jejich fyzikální, ekonomické, či jiné aplikace. O aplikacích ve fyzice pak pojednává kapitola 1.12.

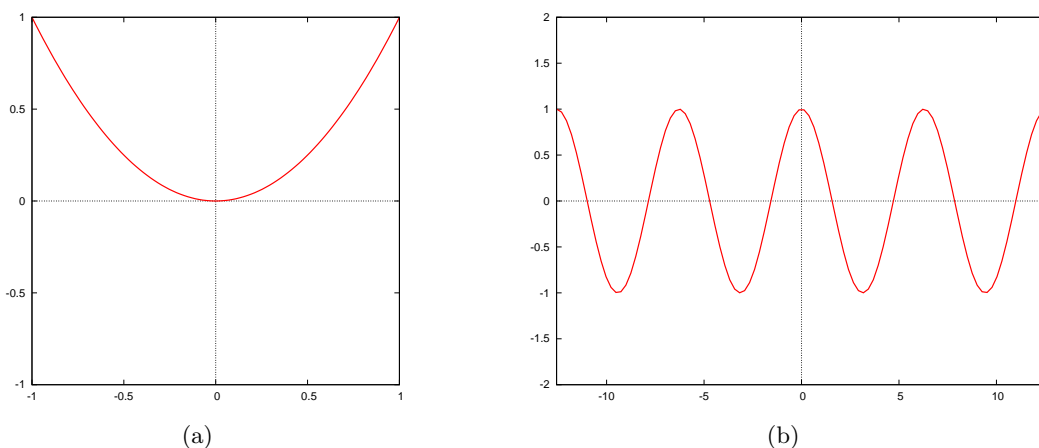
### 1.8.1 Nalezení extrému funkce

V této části si popíšeme, jak zjistit, kde funkce nabývá své „extrémní“, tj. maximální nebo minimální hodnoty. Zdefinujeme nyní pojmy, které k tomu budeme potřebovat:

**Definice 1.8.1.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **globální maximum** (resp. **minimum**), je-li  $f(x) \leq f(x_0)$  (resp.  $f(x) \geq f(x_0)$ ) pro každé  $x \in D_f$ .

**Definice 1.8.2.** Řekneme, že funkce  $f$  má v bodě  $x_0$  **lokální maximum** (resp. **minimum**), je-li  $f(x) < f(x_0)$  (resp.  $f(x) > f(x_0)$ ) pro  $x \in (x_0 - d, x_0 + d) \setminus \{x_0\}$ , kde  $d > 0$  je nějaké kladné číslo. Použijeme-li pojmu okolí (viz definice 1.4.4), znamená to, že je  $f(x) < f(x_0)$  (resp.  $f(x) > f(x_0)$ ) pro  $x \in U_d^*(x_0)$

Předchozí definice byly poněkud abstraktní, zkusme si je trochu osvětlit. Definice 1.8.1 říká, že  $x_0$  je bod, v němž má funkce největší (resp. nejmenší) hodnotu ze svého definičního oboru. Například parabola  $f(x) = x^2$  nabývá zjevně své nejmenší hodnoty pro  $x = 0$ , kde je  $f(0) = 0$ , jelikož všude jinde je hodnota funkce větší než 0. Bod  $x = 0$  je tedy globálním minimem této funkce (viz obrázek 1.3a).



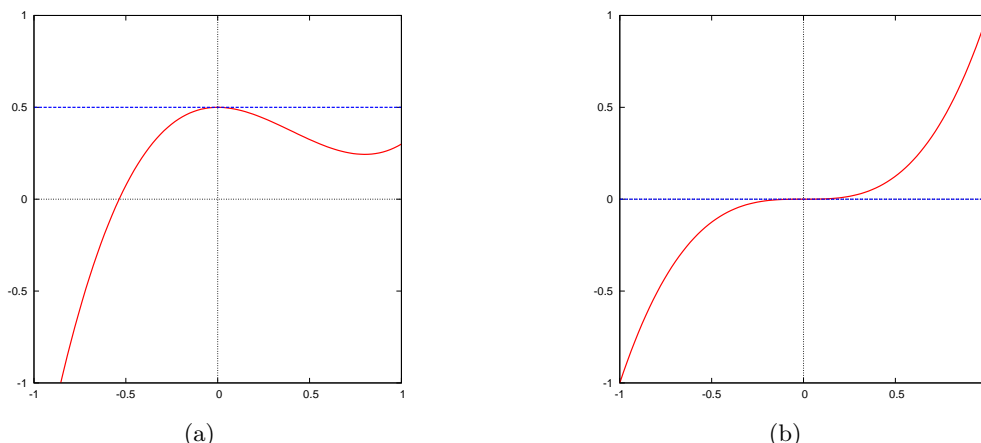
Obrázek 1.3: Funkce  $x^2$  a  $\cos(x)$

Naproti tomu definice 1.8.2 říká, že hodnota  $f(x_0)$  musí být největší (nejmenší) jen v nějakém malém okolí okolí bodu  $x_0$ , vůbec nic neříká o celé funkci, funkce může mít ve větší vzdálenosti od bodu  $x_0$  absolutně libovolné vlastnosti. Jinými slovy, lokální extrém má funkce v bodě, kde tvoří „kopeček“ nebo „proláklinu“. Např. funkce  $\cos(x)$  má lokální extrém pro každé  $x = k\pi$  - viz obrázek 1.3b.

*Poznámka.* Definice 1.8.1 požaduje, aby hodnota funkce v bodě  $x_0$  byla přinejmenším tak velká (resp. malá), jako v celém definičním oboru funkce. Globálních extrémů tedy může být nekonečně mnoho, musí mít však ve všech bodech stejnou hodnotu. Příkladem je funkce  $\cos(x)$ , jejíž lokální extrémy splývají s globálními.

Odvoďme nyní poměrně zřejmé podmínky pro lokální extrém. Má-li být v bodě  $x_0$  *kopeček* nebo *proláklina*, nesmí v daném bodě funkce ani růst, ani klesat. To znamená, že tam musí být **nulová derivace**, neboli nulový sklon tečny v tomto bodě (viz obrázek 1.4a).

Tento výsledek vyjadřuje následující



Obrázek 1.4: Body s nulovou derivací

**Definice 1.8.3. Stacionárním bodem**, neboli **bodem podezřelým z extrému** funkce  $f(x)$  nazveme bod  $x_0$ , pokud platí  $f'(x_0) = 0$

Je nutné si uvědomit, že to, že je v daném bodě nulová derivace, ještě neznamená, že se v něm nachází lokální extrém. Na obrázku 1.4b je zobrazena část grafu funkce  $x^3$ . Tato funkce má v bodě 0 nulovou derivaci, lokální extrém se zde však nenachází. Obecná věta vyjadřující, zda se v bodě  $x_0$  nachází lokální extrém, je následující:

**Věta 1.8.1.** *Funkce  $f(x)$  má v bodě  $x_0$  lokální extrém, pokud je  $x_0$  její stacionární bod (tj. je  $f'(x_0) = 0$ ) a pokud platí  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , kde  $n$  je sudé číslo. Pak platí, že:*

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ je bodem lokálního minima}$$

$$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ je bodem lokálního maxima}$$

*Pokud je  $n$  liché, pak bod  $x_0$  není bodem lokálního extrému.*

Je nutné přiznat, že předchozí věta je již od pohledu poněkud „ošklivá“ a, co je horší, pro praktické výpočty téměř nepoužitelná. Má smysl ji použít ve chvíli, kdy je nenulová hned druhá derivace. Pak stačí zjistit znaménko druhé derivace, a je-li  $f''(x_0)$  kladné, je  $x_0$  bodem lokálního minima, je-li záporné, je  $x_0$  bodem lokálního maxima. Proč toto platí, se ozřejmí po zavedení definice konkávní a konvexní funkce. Pokud bychom měli počítat vyšší derivace, je jednodušší dosadit hodnoty blízké hodnotě  $x_0$  a z toho určit, zda se jedná o extrém a o jaký typ extrému se jedná. Demonstrujme to na několika příkladech:

**Příklad 1.8.1.** Určete stacionární body funkce  $f(x) = x^3 + x^2 - x + 2$  a rozhodněte, zda jsou to body lokálních extrémů. Pokud ano, rozhodněte, zda se jedná o minimum, nebo maximum.

**Řešení.** Spočteme derivaci funkce  $f$ . Platí:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$$

Stacionární body získáme řešením rovnice  $f'(x) = 0$ . To je však jednoduchá kvadratická rovnice, jejíž kořeny snadno spočítáme. Řešením rovnice je  $x \in \{-1, \frac{1}{3}\}$ . Spočteme druhou derivaci funkce.

$$f''(x) = 6x + 2$$

Pro kořen  $x = -1$  dostáváme  $f''(-1) = -4 < 0$ , jde tedy o bod lokálního maxima, pro kořen  $x = \frac{1}{3}$  dostáváme  $f''(\frac{1}{3}) = 4 > 0$ , jde tedy o bod lokálního minima. Kdybychom chtěli určit, zda jde o lokální maximum či minimum dosazením blízkých hodnot, můžeme dosadit např. hodnoty  $-1,1$ ,  $-1$  a  $-0,9$  do funkce  $f(x)$ . Platí:  $f(-1,1) = 2,979$ ,  $f(-1) = 3$  a  $f(-0,9) = 2,981$ . Funkce tedy v daném bodě musí tvořit „kopeček“, jde tedy o bod lokálního maxima. Pro bod  $\frac{1}{3}$  by byl postup analogický.

## 1.8.2 Konvexní a konkávní funkce

Snad ze zvyku, snad pro úplnost výkladu zavedme definici tzv. konkávnosti a konvexnosti. Tyto pojmy nebudeme nikde v dalším výkladu používat, patří však k základním charakteristikám průběhu funkce.

**Definice 1.8.4.** Funkci  $f$  nazveme v bodě  $x_0$  **konvexní**, pokud leží graf funkce v okolí bodu  $x_0$  „nad“ tečnou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

**Definice 1.8.5.** Funkci  $f$  nazveme v bodě  $x_0$  **konkávní**, pokud leží graf funkce v okolí bodu  $x_0$  „pod“ tečnou ke grafu funkce  $f$  v bodě  $x_0$ .

Příkladem konvexní funkce (ve všech bodech definičního oboru) je funkce na obrázku 1.3a, příkladem funkce konkávní v bodě, kde je zakreslena tečna, je funkce na obrázku 1.4a. Konvexní funkce tedy tvoří v daném bodě jakési „údolí“, konkávní funkce tvoří „kopeček“.

*Poznámka.* Dobrou mnemotechnickou pomůckou pro zapamatování si, který pojem patří ke kterému typu funkce je toto: KonVexní - V tvoří proláklinu, KonkÁvní - Á tvoří kopeček.

Uvedme nyní kritéria, která nám umožní rozhodnout, zda je funkce v daném bodě konvexní nebo konkávní:

**Věta 1.8.2.** Pokud je  $f''(x_0) > 0$ , funkce  $f(x)$  je v bodě  $x_0$  konvexní.

**Věta 1.8.3.** Pokud je  $f''(x_0) < 0$ , funkce  $f(x)$  je v bodě  $x_0$  konkávní.

Zamyslíme-li se nad problémem hlouběji, zjistíme, že tato kritéria jsou naprosto zjevná. Aby funkce v daném bodě tvořila „kopeček“, musí její sklon postupně klesat. Pokud je sklon kladný a postupně klesá, dojdeme do fáze, kde je sklon nulový (maximum, vrchol kopečku), pokud pokračujeme, vytvoříme celý konkávní kopeček (tečna kopečku leží nad kopečkem). Pokud se sklon naopak zvětšuje, funkce musí evidentně tvořit „údolí“.

Předchozí věty nám však nic neříkají o situaci, kdy je druhá derivace v bodě  $x_0$  nulová. Zavedme následující definici:

**Definice 1.8.6.** Bod  $x_0$  nazýváme inflexním bodem funkce  $f(x)$ , pokud tato funkce v bodě  $x_0$  přechází z konvexní do konkávní (resp. z konkávní do konvexní). Je to tedy bod, ve kterém tečna ke grafu funkce  $f(x)$  tuto funkci protíná, nedotýká se jí z „vnějšku“.

Uvedme nyní větu podobného typu, jako je věta 1.8.1:

**Věta 1.8.4.** Pokud je  $f''(x_0) = 0$  a pokud platí  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , kde  $n$  je liché číslo, pak je  $x_0$  inflexním bodem dané funkce a platí:

$$f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ je bodem přechodu z polohy konkávní do polohy konvexní}$$

$$f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ je bodem přechodu z polohy konvexní do polohy konkávní}$$

Pokud je  $n$  sudé, pak bod  $x_0$  není inflexním bodem a funkce  $f(x)$  je v tomto bodě buď konvexní nebo konkávní.

*Poznámka.* Nepoužití čárky před „nebo“ v předchozí větě není gramatickou chybou - existují totiž i funkce, které jsou zároveň konvexní a zároveň konkávní. Takovou funkcí je funkce lineární či konstantní.

Praktické využití má předchozí věta snad jen v případě, že  $n = 3$  a tedy  $f'''(x_0) \neq 0$ . Zjišťování vyšších derivací se zpravidla nepoužívá, spíše se zjišťuje chování funkce  $f$  v okolí bodu  $x_0$ .

**Příklad 1.8.2.** Určete „největší“ možnou množinu  $K \subseteq \mathbb{R}$ , na které je funkce  $f(x) = \sin(x)$  konkávní. Jinými slovy, nalezněte množinu všech bodů  $x_0 \in \mathbb{R}$ , ve kterých je funkce  $\sin(x)$  konkávní.

**Řešení.** Nalezněme nejdříve množinu všech inflexních bodů. Vyřešme rovnici:

$$f''(x_0) = -\sin(x_0) = 0$$

Řešením této rovnice je evidentně  $x_0 \in \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$ . To, že všechny tyto body jsou body inflexními, jednoduše ověříme pomocí věty 1.8.4. Platí:

$$f'''(x_0) = -\cos(x_0) = -\cos(k\pi) = \pm 1 \neq 0$$

Tedy všechny nalezené body  $x_0$  jsou skutečně body inflexními. Reálnou osu tedy můžeme rozdělit na intervaly ve tvaru  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$  a  $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ . Jelikož v inflexním bodě přechází funkce z konkávní do konvexní a naopak, musí být skutečně na jedné „sadě“ intervalů konkávní, na druhé konvexní. Zbývá pouze určit, která sada je která. Není těžké to určit, uvědomíme-li si, jak graf funkce  $\sin(x)$  vypadá. Zkusme to však trochu „rigorózněji“. V první sadě intervalů zvolme hodnotu  $(2k+1/2)\pi$ , v druhé sadě hodnotu  $(2k-1/2)\pi$ . Platí:

$$f''((2k+1/2)\pi) = -\sin((2k+1/2)\pi) = -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$$

$$f''((2k-1/2)\pi) = -\sin((2k-1/2)\pi) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 > 0$$

Zde jsme pouze užili toho, že  $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$ . Podle vět 1.8.2 a 1.8.3 je tedy funkce  $\sin(x)$  v bodě  $(2k+1/2)\pi$  (a tedy v celém intervalu  $(2k\pi, (2k+1)\pi)$ ) konkávní a v bodě  $(2k-1/2)\pi$  (a tedy v celém intervalu  $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ ) konvexní. Zapišme ještě tento výsledek pomocí množinové symboliky. Funkce  $\sin(x)$  je konvexní pro:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} ((2k-1)\pi, 2k\pi)$$

a konkávní pro:

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (2k\pi, (2k+1)\pi)$$

## 1.9 Derivace funkcí více proměnných

Ačkoliv tato publikace předesílá přímo ve svém názvu, že pojednává o funkcích jedné proměnné, z důvodů, které vyjdou najevo v dalších kapitolách, je však nutné vysvětlit i určité minimum z diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Čtenář, který čte tuto publikaci pouze za účelem seznámení se s diferenciálním a integrálním počtem na středoškolské úrovni, může tuto i následující kapitoly v části *Diferenciální počet* s klidným svědomím přeskocit. (V části o integrálním počtu, kterou je zakončen výklad „středoškolské úrovně“, nebude využito nic z této ani z následujících kapitol.) Pro jistý všeobecný přehled je však dobré alespoň letmo nahlédnout i do následujících částí, jejich obsah není nijak extrémně náročný.

### 1.9.1 Parciální derivace

Mějme funkci  $f(x, y)$  dvou proměnných (z důvodu větší názornosti). Tuto funkci si můžeme představit jako plochu ve trojrozměrném prostoru zadanou rovnicí  $z = f(x, y)$ . Je přirozené určovat sklon této plochy stejným způsobem, jakým jsme určovali sklon funkce jedné proměnné – tedy tak, že se pohybujeme ve směru jedné osy a porovnáváme přírůstky funkce s posunem po této ose. Zavedme tedy následující definici derivace:

**Definice 1.9.1.** Mějme funkci  $f(x_1, \dots, x_n)$   $n$  proměnných. **Parciální derivací** funkce  $f$  podle proměnné  $x_n$  v bodě  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  nazýváme limitu:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k + h, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_k, \dots, \bar{x}_n)}{h}$$

Parciální derivaci funkce podle proměnné  $x_k$  značíme  $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ , čteme „parciální derivace  $f$  podle  $x_k$ “. Speciálně pro  $n = 2$  značíme  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  a platí:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h} \end{aligned}$$

Pro  $n = 1$  definice splývá s definicí derivace funkce jedné proměnné.

Vidíme, že jsme pouze pojem derivace zobecnili, nezavedli jsem však žádné nové složité pojmy. Pro praktické výpočty derivací je potřeba si uvědomit, že platí následující

**Věta 1.9.1.** *Nechť  $f(x_1, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných. Její parciální derivace podle  $k$ -té proměnné spočítáme tak, jako bychom derivovali funkci  $F(x_k) = f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$  jedné proměnné podle  $x_k$ . Jinak řečeno, derivujeme-li podle jedné proměnné, derivujeme úplně stejným způsobem, jako funkci jedné proměnné, pouze ostatní proměnné považujeme za konstanty.*

**Příklad 1.9.1.** Spočtěte derivace funkcí  $f(x, y) = xy + x^2$  a  $g(x, y) = x^2 + y \cos(x)$  podle proměnných  $x$  a  $y$ .

**Řešení.** Jak již bylo řečeno v předcházející větě, derivujeme jednoduše tak, že proměnné, podle kterých nederivujeme, považujeme za konstanty. Je tedy:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= y + 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= x \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) &= 2x - y \sin(x) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) &= \cos(x) \end{aligned}$$

*Poznámka.* U funkce více proměnných se většinou vynechává seznam argumentů funkce, jsou-li jasné z kontextu. Tedy např.  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  zapíšeme jako  $\frac{\partial f}{\partial x}$ . Této konvence budeme dále v textu využívat.

Pro funkce více proměnných platí obdobná pravidla jako pro funkce jedné proměnné:

**Věta 1.9.2.** *Nechť  $f$  a  $g$  jsou funkce  $n$  proměnných a mají v bodě  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  derivaci podle proměnné  $x_k$ . Pak:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}(f + g) &= \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{\partial g}{\partial x_k} \\ \frac{\partial}{\partial x_k}(f \cdot g) &= \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g + \frac{\partial g}{\partial x_k} \cdot f\end{aligned}$$

A je-li také  $g(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \neq 0$ , pak:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot g - \frac{\partial g}{\partial x_k} \cdot f}{g^2}$$

Stejně tak, jako jsme zavedli derivace vyšších řádů funkcí jedné proměnné, můžeme zavést i derivace vyšších řádů funkcí více proměnných.

**Definice 1.9.2.** Mějme funkci  $f$  více proměnných. Derivujeme-li ji postupně podle proměnných  $x_{k_1}, x_{k_2}$  až  $x_{k_n}$ , značíme to zápisem:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_{k_1} \partial x_{k_2} \cdots \partial x_{k_n}}$$

Speciálně, je-li  $k_1 = k_2 = \dots = k_n$ , tj. derivujeme  $n$ -krát podle stejné proměnné  $x_k$ , zapisujeme:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_k^n}$$

Pro úplnost uveďme ještě jednu poměrně důležitou větu:

**Věta 1.9.3.** *Nechť  $f(x_1, \dots, x_n)$  je funkce  $n$  proměnných a její druhé derivace  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  a  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  (povšimněte si prohozených indexů  $i$  a  $j$ ) jsou v okolí bodu  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  spojité. Pak platí:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

*Slovy řečeno - při počítání derivací můžeme libovolně zaměnit pořadí proměnných, podle kterých funkci derivujeme.*

Podmínka spojitosti obou derivací v předchozí větě je nutná, obecně se totiž derivace v různém pořadí mohou lišit.

Tímto výklad diferenciálního počtu funkcí více proměnných zakončíme. Teorie funkcí více proměnných sice otevírá nové obzory, bez kterých si moderní fyziku prakticky není možné představit, ale cílem této publikace je poskytnout čtenáři určitý přehled o metodách, jež se v matematické analýze využívají, nikoliv poskytnout ucelený přehled matematické analýzy. Proto jsme v této kapitole jsme vyložili pouze nutné minimum, jež budeme potřebovat v následujících kapitolách.

## 1.10 Taylorův rozvoj

Zkusme se nyní zamyslet nad problémem, zda je možné nalézt polynom  $n$ -tého stupně tj. funkci ve tvaru

$$P(x) = k_n x^n + k_{n-1} x^{n-1} + \dots + k_1 x + k_0 \quad (1.22)$$

kde  $k_n \neq 0$ , který by „vypadal“ stejně, jako nějaká námi zvolená funkce  $f(x)$ .

Zamysleme se nad tím, co musí funkce  $P(x)$  splňovat, aby se v pevně zvoleném bodě  $x_0$  co nejvíce podobala funkci  $f(x)$ . Rozhodně by měla mít v daném bodě stejnou hodnotu, jinak nelze moc hovořit o tom, že se funkce podobají, tedy  $P(x_0) = f(x_0)$ . Dále by měly obě funkce směřovat stejným směrem, z čehož plyne podmínka  $P'(x_0) = f'(x_0)$ , tj. musí si být rovny derivace obou funkcí. Zároveň by měl začít měnit sklon obou funkcí (tj. jejich derivace) stejným způsobem. Ale změna derivace je druhá derivace dané funkce, tedy by mělo platit  $P''(x_0) = f''(x_0)$ . Tyto úvahy nás přivádí k následujícímu

**Pozorování.** Funkce  $P(x)$  se funkcí  $f(x)$  v nějakém pevně zvoleném bodě  $x_0$  nejvíce podobá právě tehdy, když mají obě funkce co nejvíce shodných derivací v bode  $x_0$ . Zapsáno matematicky, požadujeme, aby  $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  pro  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Zapišme polynom  $P(x)$  ve tvaru:

$$P(x) = a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x - x_0) + a_0 \quad (1.23)$$

Derivace tohoto polynomu mají tvar:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \dots + a_1(x - x_0) + a_0 \\ P'(x) &= na_n(x - x_0)^{n-1} + (n-1)a_{n-1}(x - x_0)^{n-2} + \dots + 2a_2(x - x_0) + a_1 \\ P''(x) &= n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}(x - x_0)^{n-3} + \dots + 6a_3(x - x_0) + 2a_2 \\ &\dots \\ P^{(n)}(x) &= n(n-1)(n-2) \dots 1 \cdot a_n = n! \cdot a_n \end{aligned}$$

Proč jsme polynom  $P(x)$  zapsali ve tvaru (1.23) se objasní ve chvíli, kdy do derivací polynomu  $P(x)$  dosadíme  $x = x_0$ . Pak se totiž rovnice  $P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  redukuje na:

$$\begin{aligned} P(x_0) &= a_n \cdot 0^n + a_{n-1} \cdot 0^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 0 + a_0 = a_0 \cdot 0! = f(x_0) \\ P'(x_0) &= na_n \cdot 0^{n-1} + (n-1)a_{n-1} \cdot 0^{n-2} + \dots + 2a_2 \cdot 0 + a_1 = a_1 \cdot 1! = f'(x_0) \\ P''(x_0) &= n(n-1)a_n \cdot 0^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1} \cdot 0^{n-3} + \dots + 2a_2 = a_2 \cdot 2! = f''(x_0) \\ &\dots \\ P^{(n)}(x_0) &= n(n-1)(n-2) \dots 1 \cdot a_n = a_n \cdot n! = f^{(n)}(x_0) \end{aligned}$$

Jelikož  $(x - x_0)$  je pro  $x = x_0$  nulové. Odtud již tedy můžeme snadno získat koeficienty  $a_k$ :

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (1.24)$$

Na základě toho můžeme vyslovit následující definici:

**Definice 1.10.1.** Taylorovým polynomem (rozvojem) stupně  $n$  funkce  $f(x)$  v okolí bodu  $x_0$  nazveme polynom

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \quad (1.25)$$

za předpokladu, že všechny derivace funkce  $f(x)$  až do řádu  $n$  včetně existují a jsou spojité.

Označme:

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

pokud tato limita existuje a je konečná pro všechna  $x$  z definičního oboru funkce  $f$ .

Za určitých předpokladů, které zde nebudeme přesně specifikovat, platí následující

**Věta 1.10.1.** Pro funkci  $f(x)$  a její Taylorův rozvoj  $T(x)$  kolem bodu  $x_0$  platí:

$$f(x) = T(x)$$

pro všechna  $x$  z nějakého intervalu  $(x_0 - r, x_0 + r)$ , kde  $r$  je nějaké nezáporné reálné číslo.

To tedy znamená, že mocninná řada ve tvaru (1.25) pro  $n \rightarrow \infty$  přesně kopíruje chování funkce  $f$ . Největší číslo  $r$ , pro které předchozí věta platí, nazýváme *poloměr konvergence* Taylorovy řady. V této publikaci nebudeme uvádět metody výpočtu  $r$ . U pěkných funkcí, jako je  $\sin(x)$ ,  $e^x$  apod., je  $r = \infty$ , tj. platí, že  $f(x) = T(x)$  na celém  $\mathbb{R}$ . Uveďme nyní pro ilustraci několik příkladů:

**Příklad 1.10.1.** Rozviňte funkci  $\cos(x)$  v okolí bodu 0 Taylorovým rozvojem stupně 2 a stupně 4.

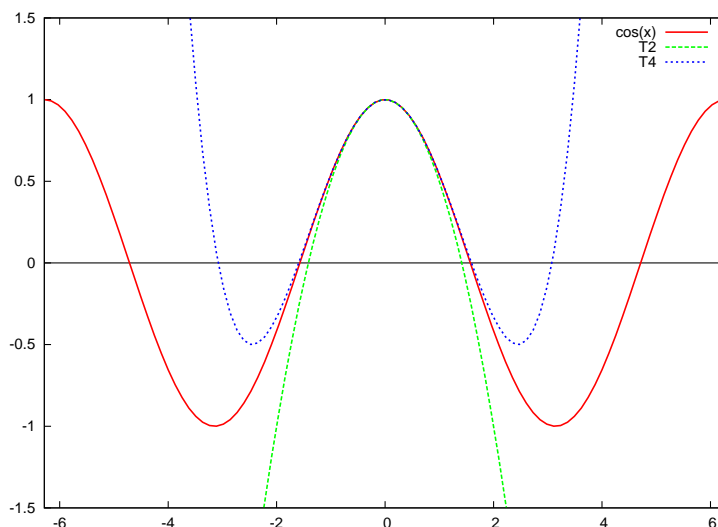
Vše, co potřebujeme určit jsou derivace funkce  $\cos(x)$  v bodě 0 až po derivace čtvrtého řádu. Postupným derivováním získáme:

$$\begin{aligned} \cos(0) &= 1 \\ \cos'(0) &= -\sin(0) = 0 \\ \cos''(0) &= -\cos(0) = -1 \\ \cos'''(0) &= \sin(0) = 0 \\ \cos^{(4)}(0) &= \cos(0) = 1 \end{aligned}$$

Pro  $\cos(x)$  tedy máme Taylorův rozvoj:

$$\begin{aligned} T_2(x) &= \frac{1}{0!} \cdot x^0 + \frac{0}{1!} \cdot x^1 + \frac{-1}{2!} \cdot x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + 1 \\ T_4(x) &= T_2(x) + \frac{0}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 1 \end{aligned}$$

Grafy všech tří funkcí jsou zobrazeny na obrázku 1.5. Tento příklad by nám měl demonstrovat smysl pojmu Taylorova rozvoje – Taylorův rozvoj nám umožňuje převést výpočet hodnot

Obrázek 1.5: Taylorovy rozvoje funkce  $\cos(x)$ 

„těžko uchopitelných“ funkcí, jako jsou například funkce goniometrické, na pouhé násobení a sčítání. Platí např.:

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$$

$$T_4\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 1 \approx 0,7074$$

Získali jsme tedy polynom takový, že výsledná chyba se objevuje až na čtvrtém desetinném místě, což je velmi dobrý výsledek. Polynom je totiž tak malého stupně, že by bylo možné provedené výpočty provést čistě pomocí tužky a papíru.

**Příklad 1.10.2.** Zapište nekonečnou Taylorovu řadu pro funkci  $\ln(x)$ .

**Řešení.** Zde narážíme na problém, že funkce  $\ln(x)$  není v bodě 0 definována, budeme muset tedy tuto funkci rozvinout v okolí bodu jiného. Podívejme se, co se stane, když se pokusíme tuto funkci rozvinout kolem bodu  $x_0$ . Výsledná řada bude (čtenář může tento výsledek ověřit spočítáním jednotlivých derivací):

$$T(x) = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{x_0^k} \cdot \frac{1}{k!} \cdot (x-x_0)^k = \ln(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{x_0^k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (x-x_0)^k$$

Zvolme  $x_0 = 1$ . Řada, kterou získáme, je:

$$T(x) = \ln(1) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{1^k} \cdot \frac{1}{k} \cdot (x-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot (x-1)^k$$

Ta je ovšem konvergentní jen pro  $x \in (0, 2)$ , pro  $x > 2$  je divergentní (např. pro  $x = 3$  „zabije“ exponenciální růst  $2^k$  bezmocné  $k$  ve jmenovateli). Můžeme tedy zkusit  $x_0 > 1$ . Rozborem tohoto případu bychom však dospěli k tomu, že řada by byla konvergentní jen pro  $x \in (x_0 - 1, x_0 + 1)$ . Uzevřeme to tedy konstatováním, že  $\ln(x)$  nemůžeme Taylorovou řadou rozvinout na celém definičním oboru. Ve skutečnosti, je možné odvodit, že poloměr konvergence této řady je 1 (nezávisle na volbě  $x_0$ ). Chceme-li numericky počítat hodnotu logaritmu, musíme vždy zvolit vhodné  $x_0$ , aby řada v zadaném bodě konvergovala.

## 1.11 Taylorův rozvoj funkce více proměnných

Zdá se býti logické, že i funkce více proměnných by mělo být možno rozvinout v nějakou mocninnou řadu obdobným způsobem, jako tomu bylo u funkce jedné proměnné. Odvození tohoto obecného vztahu je však již výrazně nad rámec tohoto textu, proto je zde nebudeme provádět. Podotkneme pouze, že pro funkci  $n$  proměnných  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  obsahuje tato mocninná řada členy ve tvaru  $a_1 a_2 \cdots a_n (x_1 - \bar{x}_1)^{p_1} \cdots (x_n - \bar{x}_n)^{p_n}$ , kde  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$  je bod, kolem kterého provádíme rozvoj a kde koeficienty  $a_k$  až  $a_n$  závisí na  $p_k$ -té derivaci funkce  $f$  podle proměnné  $x_k$  děleného faktoriálem příslušné mocniny, tj. děleného  $p_k!$ .

My však v dalším textu budeme potřebovat pouze Taylorův rozvoj funkce tří proměnných (označme je nyní  $x$ ,  $y$  a  $z$ ) a zajímat nás bude pouze jeho lineární část. Uveďme tedy z důvodu budoucí reference tento rozvoj:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot (z - z_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0)(y - y_0) + \dots \quad (1.26)$$

Zamyslíme-li se pouze nad lineární částí, je daný výsledek naprosto zjevný. Označme  $\Delta x = x - x_0$ ,  $\Delta y = y - y_0$ ,  $\Delta z = z - z_0$ . Pak můžeme lineární část přepsat jako:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) \approx f(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \Delta z \quad (1.27)$$

což je velmi logický výsledek - hodnota funkce v bodě  $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$  je přibližně rovna hodnotě funkce v bodě  $(x_0, y_0, z_0)$  plus sklon (derivace) funkce ve směru osy  $x$  krát to, o kolik jsme se ve směru osy  $x$  posunuli, plus sklon funkce ve směru osy  $y$  krát posun ve směru osy  $y$  plus ... Tento výsledek není nikterak zarážející a naprosto odpovídá lineárnímu přírůstku funkce jedné proměnné.

## 1.12 Význam diferenciálního počtu ve fyzice

Diferenciální počet nám umožňuje zaznamenat, jak se veličina mění – nejdůležitější je pro nás většinou informace, jak se mění v čase. Víme-li, jak se veličina mění v každém okamžiku a jaká byla její původní hodnota, zdá se býti přirozené, že díky tomu můžeme určit hodnotu dané veličiny v každém okamžiku. Ve skutečnosti je k tomu potřeba velmi robustní a složitý matematický aparát (určitá část z něj bude v této publikaci probrána), pro formulování principů si však vystačíme s tím, co již známe.

### 1.12.1 Rychlost, zrychlení, Newtonova pohybová rovnice

Asi každý středoškolák ví, co je to rychlost a zrychlení (hmotného bodu). Urazilo-li těleso dráhu  $s$  za čas  $t$ , byla jeho průměrná rychlost na této dráze:

$$\bar{v} = \frac{s}{t}$$

Počítáme-li rychlost tělesa v nějakém krátkém časovém okamžiku, zapisujeme to obvykle výrazem:

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Čím kratší je doba  $\Delta t$ , tím přesněji zjistíme rychlost tělesa v danou chvíli. Proč tedy nevzít tuto dobu nekonečně malou? Matematický aparát již k tomu máme! Stačí pouze dosadit  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t)$$

Neboli, velikost rychlosti bodu se rovná derivaci dráhy podle času (viz poznámka k definici 1.7.1 o tom, že derivaci podle času značíme tečkou). Stejně tak známe dobře vzorec, že průměrné zrychlení hmotného bodu je dáno vztahem:

$$\bar{a} = \frac{v}{t}$$

Aplikujeme-li stejný „limitní přechod“ jako u rychlosti, dojdeme k výsledku:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}(t) = \dot{v}(t) = \frac{d^2s}{dt^2}(t) = \ddot{s}(t)$$

kde poslední dva symboly znamenají druhou derivaci dráhy podle času (viz definice 1.5.4). Ukažme nyní, jak z tohoto zobecnění plynou různé vzorce, které čtenář pravděpodobně zná.

**Příklad 1.12.1.** Pro dráhu rovnoměrně zrychleného pohybu s počáteční rychlostí  $v_0$  a zrychlením  $a$  platí známý vzoreček:

$$s(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

určete rychlost a zrychlení tohoto bodu.

**Řešení.** Jak jsme odvodili v předchozích odstavcích, rychlost bodu je pouhou derivací jeho dráhy podle času. Tedy:

$$v(t) = \dot{s}(t) = v_0 + at$$

Abychom získali zrychlení, stačí pouze zderivovat rychlost:

$$a(t) = \dot{v}(t) = a$$

Jak vidíme, získané výsledky odpovídají nám již dobře známým vzorcům.

**Příklad 1.12.2.** Určete rychlost a zrychlení hmotného bodu kmitajícího harmonicky, tj. bodu, jehož „výška“ (výchylka, poloha, dráha) je dána vztahem (počáteční fázi  $\phi_0$  pro jednoduhost neuvažujeme):

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

**Řešení.** Znovu budeme pouze aplikovat pravidla derivování, jež byla vyložena v předchozí kapitole. Nezapomeňme, že  $\sin(\omega t)$  musíme derivovat jako složenou funkci:

$$\begin{aligned} v(t) &= \dot{y}(t) = A\omega \cos(\omega t) \\ a(t) &= \dot{v}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Tyto výsledky znovu odpovídají známým středoškolským vzorečkům.

Pojmy rychlosti a zrychlení však obvykle zavádíme jako vektorové veličiny - rychlost i zrychlení mají směr. Jak předchozí definice zobecnit i na vektory? Naprosto jednoduše. Je-li  $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$  tzv. **polohový vektor** hmotného bodu, tj. vektor, jehož souřadnice udávají polohu hmotného bodu, pak rychlost a zrychlení vypočteme zcela analogicky jako v případě dráhy a velikosti rychlosti:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

$$\mathbf{a}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt}(t) = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t)$$

Doteď jsme dělali pouze to, že jsme derivovali známé vzorce pro dráhu a tak získali rychlost a zrychlení. Na tomto postupu však není něco v pořádku - kde se ony vzorce pro dráhu vzaly? Přeci se nespokojíme s tím, že prostě *platí*. Že vzorce odpovídají experimentům? A jakým? Myslíte si, že někdo ověřoval experimentálně každý takovýto vzoreček, co kdy vznikl? Nikoliv! Stačí ověřit pouze jeden jediný vzorec a vše ostatní už vyplyne z měření a příslušné matematiky. Tímto vzorcem je:

**Newtonův pohybový zákon** (pohybová rovnice)

Působí-li na těleso síla o velikosti  $F$ , pak pro jeho zrychlení platí:

$$F = m a = m \ddot{s}$$

neboli, formulováno vektorově:

$$\mathbf{F} = m \mathbf{a} = m \ddot{\mathbf{r}}$$

Jak tohoto zákona využít? Známe-li sílu  $F$  (určenou experimentem či nějakým výpočtem) a počáteční rychlost a polohu tělesa můžeme pomocí této rovnice přesně určit, kde se bude těleso v danou chvíli nacházet. Jedná se o tzv. **obyčejnou diferenciální rovnici**, kde neznámá není číslo, nýbrž funkce  $s(t)$  resp.  $\mathbf{r}(t)$ . Tato pohybová rovnice je pro nás velmi silný nástroj - umožňuje nám spočítat dráhy planet, pohyby družic kolem země, dokonce je možné de facto z této jednoduché pohybové rovnice vybudovat tzv. mechaniku kontinua, jež se zabývá vlastnostmi pevných, kapalných a plynných látek. Matematický aparát mechaniky kontinua je však ještě výrazně náročnější než matematický aparát prezentovaný v této publikaci. Rozhodně však stojí za to ho nastudovat - pomocí něj je možné kompletně simulovat tok kapaliny, pohyby letadla, chování různých staveb, strojů atd... Zkusme využít znalostí, co už máme, abychom vyřešili alespoň jeden velmi jednoduchý příklad:

**Příklad 1.12.3.** Pro závažíčko zavěšené na pružině platí, že síla na něj působící je  $F = -ky$ , kde  $k$  je tzv. tuhost pružiny a  $y$  výchylka z rovnovážné polohy. Toto vyjádření je poměrně přirozené - představte si, že postupně natahujete pružinu. Čím více je natažená, tím větší klade odpor. My pouze předpokládáme, že tento odpor roste lineárně. Znaménko mínus je zde proto, že síla působí proti směru natažení. Náš úkol zní: Určete z pohybové rovnice výchylku  $y(t)$  závaží v čase  $t$  z rovnovážné polohy.

**Řešení.** Sestavme pohybovou rovnici závažíčka:

$$\begin{aligned} ma &= F \\ m\ddot{y} &= -ky \\ \ddot{y} &= -\frac{k}{m}y \end{aligned}$$

hledáme tedy funkci  $y(t)$  takovou, že její druhá derivace je rovna záporně vzaté původní funkci vynásobené konstantou. Prohlédneme-li si znovu příklad 1.12.2, zjistíme, že daný problém už jsme vyřešili. Jedním možným řešením je funkce:

$$y(t) = A \sin(\omega t) = A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

kde

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Prostým derivováním můžeme ověřit, že jsme skutečně našli řešení:

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= (A \sin(\omega t))' = A\sqrt{\frac{k}{m}} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \\ \ddot{y}(t) &= -A\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = -A\frac{k}{m} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) = -\frac{k}{m}y(t) \end{aligned}$$

Toto řešení sice není úplně obecné, v této publikaci se ovšem obecnějšími postupy k řešení takovýchto rovnic zabývat nebudeme.

Jak vidíme, abychom zjistili, jak se daný fyzikální jev „chová“, stačí, napíšeme-li diferenciální rovnici, která tento jev popisuje, a tuto rovnici následně vyřešíme. Problémem však je, že většinu v praxi se vyskytujících diferenciálních rovnic není možné řešit přesně a je nutné využít ke zjištění přibližného řešení pro danou situaci počítač.

## Kapitola 2

# Integrální počet

Integrální počet je s diferenciálním počtem neodmyslitelně spjat. Jakmile se pustíte do řešení složitějšího fyzikálního problému, pravděpodobně budete potřebovat nejen znalost diferenciálního počtu, ale také znalost počtu integrálního. Co to tedy onen integrál je? Možná si někteří z vás při čtení kapitoly 1 říkali, zda je možné najít funkci  $f(x)$ , známe-li její derivaci  $f'(x)$ . Odpověď není nikterak jednoduchá – pohybujeme-li se pouze v množině *elementárních funkcí* (zahrnující funkce jako  $ax^n$ ,  $a^x$ ,  $\ln x$ , goniometrické funkce a další „běžné“ funkce a funkce vzniklé součtem, rozdílem, součinem, podílem či skládáním konečného počtu těchto funkcí), zjistíme, že k některým funkcím je možné najít funkci, jejíž derivací danou funkci získáme (tuto funkci budeme posléze nazývat **primitivní funkce** k dané funkci), k některým ne. Není však nikterak jednoduché odhadnout, zda k dané funkci primitivní funkce (v „řeči“ elementárních funkcí) existuje, například funkce  $e^{-x^2}$  či  $\sin(x)/x$  vypadají poměrně jednoduše, jejich primitivní funkce však není vyjádřitelná pomocí elementárních funkcí (důkaz tohoto tvrzení je však výrazně nad rámec této publikace).

### 2.1 Motivace

Jak již bylo naznačeno v úvodu, podstatnou část integrálního počtu tvoří právě aparát, který nám umožní najít primitivní funkci k nějaké dané funkci. To samo o sobě zní spíše jako pouhá matematická hříčka, ale není tomu tak. Existuje nespočet způsobů, jak integrální počet aplikovat. Integrální počet nám umožňuje spočítat obsah pod grafem funkce (což nám umožňuje spočítat obsah různých útvarů, jako je například kruh či elipsa), umožňuje nám počítat objemy a povrchy těles (koule, kuželu, elipsoidu, „sinusoidu“, toru (americké koblihy) a mnohých dalších), momenty setrvačnosti těchto těles, hmotnosti těles (pokud nemají konstantní hustotu) atd. Umožňuje nám také počítat fyzikální veličiny, jako je vykonaná práce, množství přijatého tepla apod. Mimo to – znalost způsobu, jak najít primitivní funkci, je nezbytná, chcete-li řešit diferenciální rovnice (což je nutné při řešení mnoha fyzikálních problémů).

Nyní, když tušíme, k čemu se integrální počet používá, pusťme se do jeho matematické formulace.

### 2.2 Neurčitý (Newtonův) integrál

Začněme definicí, kterou jsme neformálně provedli již v úvodu:

**Definice 2.2.1.** Funkci  $F(x)$  nazveme **primitivní funkcí** k funkci  $f(x)$  na intervalu  $(a, b)$ , má-li  $F(x)$  na  $(a, b)$  derivaci a platí-li  $\forall x \in (a, b) : F'(x) = f(x)$ .

Primitivních funkcí k dané funkci existuje nekonečné množství - derivace konstanty je totiž 0 a platí tedy:

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x)$$

Je-li tedy  $F(x)$  primitivní funkcí k funkci  $f(x)$ , je také  $F(x) + C$ , kde  $C$  je libovolná konstanta, taktéž primitivní funkcí k funkci  $f(x)$ . Zavedme následující definici, která tento poznatek shrnuje:

**Definice 2.2.2.** **Neurčitým integrálem** (též **Newtonovým integrálem, integrálem v Newtonově smyslu** či **antiderivací**) funkce  $f(x)$  nazveme *množinu* všech primitivních funkcí k funkci  $f(x)$ . Tento neurčitý integrál značíme symbolem:

$$\int f(x) dx \tag{2.1}$$

kde  $dx$  určuje, že integrujeme podle proměnné  $x$ .

*Poznámka.* V rovnici 2.1 jsme použili jako argument funkce symbol  $x$ . Na tomto symbolu však samozřejmě nezáleží, můžeme použít jakýkoliv jiný, např.  $t$ . Musíme pak však samozřejmě také změnit tento symbol za znakem  $d$  v integrálu. Zápís:

$$\int f(t) dt \tag{2.2}$$

tedy znamená totéž co zápis 2.1, pouze proměnnou nazýváme jinak.

Ilustrujme zavedený pojem na příkladu:

**Příklad 2.2.1.** Nalezněte integrál funkce  $\cos(x)$  na jejím definičním oboru.

**Řešení.** Definičním oborem funkce  $\cos(x)$  jsou celá reálná čísla<sup>1</sup>. Podle tabulky 1.5.2 je derivací funkce  $\sin(x)$  funkce  $\cos(x)$ , definičním oborem sinu jsou taktéž celá reálná čísla, je tedy:

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$$

Konstantu píšeme do výsledku proto, aby bylo jasné, že každá funkce v daném tvaru (s libovolnou volbou konstanty) je primitivní funkcí k funkci, kterou integrujeme. Psaní konstant se při řešení integrálů jeví jako nadbytečné, a pokud je při výpočtech vynecháte a pouze tuto „neurčitost“ zapíšete pomocí jedné konstanty až ve výsledku, pravděpodobně tím nic nezkažete a pouze si usnadníte práci. Důsledné zapisování konstant je nutné až při řešení diferenciálních rovnic, kdy se po několikanásobné integraci a různých substitucích z konstanty vyklube záludná funkce, která už konstantou rozhodně není.

<sup>1</sup>Definičním oborem jsou dokonce celá komplexní čísla, cílem této publikace je však vysvětlit analýzu funkcí reálné proměnné

Funkce $f(x)$	Integrál $\int f(x) dx$	Podmínka
0	$C$	
$a$	$ax$	
$x^n, n \neq 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	pokud je $x^n$ i $x^{n+1}$ definováno
$e^x$	$e^x$	
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	$x \neq 0$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	
$\operatorname{tg}(x)$	$-\ln \cos(x) $	$x \neq k\pi, k \in Z$
$\operatorname{cotg}(x)$	$\ln \sin(x) $	$x \neq (k + 1/2)\pi, k \in Z$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \in (-1, 1)$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{argsinh}(x)$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg}(x)$	
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{argtgh}(x)$	$x \in (-1, 1)$

Tabulka 2.1: Přehled integrálů

Jak jsme viděli, jedním ze způsobů výpočtu integrálů je jednoduše výsledek „uhádnout“. Uhádnete-li výsledek, stačí prostým derivováním ověřit, že daný výsledek je skutečně správný. Postup, kdy výsledek uhádneme, je naprosto korektní a nelze proti němu nic namítat. Obvykle však není nikterak jednoduché výsledek uhádnout, proto se používají různé metody, jak daný integrál převést na integrál jednodušší. Tyto metody aplikujeme do té doby, než jsme schopni řešení integrálu uhádnout. K tomu, abyste byli schopni „hádat“ řešení integrálů, je nutné mít v zásobě dostatečné množství „tabulkových integrálů“, tj. integrálů, jejichž řešení znáte z paměti.

V tabulce 2.2 je uveden přehled neurčitých integrálů některých elementárních funkcí (pro zkrácení zápisu nejsou uváděny konstanty). Jak vidíte, tabulka integrálů zcela koresponduje s tabulkou derivací (zderivujete-li funkci v druhém sloupečku tabulky, dostanete funkci v prvním sloupečku tabulky).

### 2.2.1 Rigorózní dodatek - Bližší vhléd do zápisu integrálů

Možná jste si všimli, že symbol  $dx$  v zápisu integrálu je de facto identický se zápisem diferenciálu, který byl zaveden v kapitole 1.6. Není to náhoda, skutečně se o diferenciál jedná. Toho budeme s výhodou využívat při použití substituční metody (viz následující kapitola). Naznačme historický kontext, který k tomuto zápisu vedl. Původní úlohou integrálu (v počátcích vývoje kalkulu Newtonem a Leibnizem) bylo spočítání obsahu pod grafem funkce (tj. obsahu mezi grafem funkce a osou  $x$ ). Jak uvidíme později, počítání tohoto obsahu je nejjednodušší a nejpřirozenější aplikace integrálu. To, že tento „obsahový“ integrál lze vyjádřit pomocí primitivních funkcí však bylo objeveno až později. A tak Leibnizův zápis vycházel primárně z definice integrálu jakožto obsahu pod grafem funkce. Představme si nyní, že interval  $\langle a, b \rangle$ , na kterém chceme obsah spočítat, rozdělíme na obrovské množství  $n$  (nekonečně) malých dílků  $\langle a, a + dx \rangle$ ,  $\langle a + dx, a + 2dx \rangle$ ,  $\langle a + 2dx, a + 3dx \rangle$ , ...,  $\langle a + (n - 1)dx, b \rangle$ , každý tento dílek má tedy délku  $dx = (b - a)/n$ . Tyto dílky jsou tak malé, že hodnotu funkce  $f(x)$  můžeme považovat na každém z těchto intervalů za konstantní. Vezmeme-li tedy tuto hodnotu  $f(x)$  a vynásobíme-li ji délkou onoho malého intervalu, získáme obsah obdélníčku o výšce  $f(x)$  a šířce  $dx$ . Sečteme-li obsahy všech těchto obdélníků, získáme přibližný obsah pod grafem funkce. Označme  $S(f, a, b, n)$  takto získaný

obsah na intervalu  $\langle a, b \rangle$ :

$$S(f, a, b, n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot dx, \quad x_i = a + i \cdot dx, \quad dx = \frac{b-a}{n}$$

Jak uvidíme později, tato konstrukce se velmi podobá konstrukci tzv. Riemannova integrálu. My však chceme tuto sumu spočítat přes nekonečně malé dílky  $dx$ . Proto Leibniz vyměnil znak sumy za znak jiný, který tuto skutečnost podchycoval. Je to znak  $\int$ , který vyjadřuje, že „sčítáme přes všechny hodnoty  $x$ “, ne pouze přes diskrétní<sup>2</sup> hodnoty  $x_i$ . Znak  $\int$  je však ve skutečnosti pouze stylizované písmeno S (podle latinského výrazu sum, neboli suma, součet).

Tato intuitivní definice integrálu však není přijatelná. Matematicky korektní definici určitého integrálu (tj. integrálu, kterým se „počítá obsah“) podal až Riemann. Je však možné nějakým matematicky korektním způsobem interpretovat zápis neurčitého integrálu? Odpověď zní: Ano, je.

*Poznámka.* V následujícím výkladu budeme používat pojem operátor tak, jak je zaveden v kapitole 1.5.3 a diferenciál podle definice v kapitole 1.6.1.

Zavedme následující alternativní definici integrálu:

**Definice 2.2.3.** Integrál je operátor  $\int : \text{Dif} \rightarrow \text{Der}$  (Dif značí množinu všech **diferenciálů**, Der množinu všech diferencovatelných (derivovatelných) **funkcí**), který diferenciálu  $df$  přiřadí funkci  $f$ . (Konstantu volíme třeba tak, aby funkce v bodě 0 procházela nulou).

*Poznámka.* V definici 2.2.2 jsme zavedli integrál jakožto **množinu** všech primitivních funkcí, nyní však zvolíme definici jinou, kdy integrál přiřazuje konkrétní primitivní funkci. Velmi se tím totiž zjednoduší následující výklad. Pro čtenáře by neměl být výraznější problém modifikovat všechny vzorce tak, aby odpovídaly původní definici integrálu.

Všimněte si, že argument integrálu není běžná funkce jedné proměnné, ale diferenciál funkce, tedy velmi specifická funkce dvou proměnných. Jak ale víme, operátor  $d$  není prostý (všem funkcím lišícím se pouze o konstantu přiřadí stejný diferenciál), tedy k němu neexistuje operátor inverzní. Je nutné nějakým způsobem zúžit definiční obor operátoru  $d$  tak, aby byl prostý. Vezmeme tedy za tento definiční obor množinu všech elementárních funkcí (včetně funkcí vzniklých součtem, součinem, rozdílem, podílem a skládáním těchto funkcí<sup>3</sup>), které pochází počátkem souřadnic (tím jsme nic důležitého neodebrali - stále můžeme každou funkci získat posunutím). Konkrétní podoba této množiny však pro nás není důležitá, pro nás je důležitý pouze fakt, aby byl diferenciál na této množině prostý. Na takto zúženém diferenciálu tedy platí:

$$d^{-1} = \int, \quad \int^{-1} = d, \quad d^{-1}d(f) = \int \int^{-1}(f) = \int df = f$$

Jste-li zvyklí pracovat s integrálem pouze jako se symbolem, který „vyplivne“ funkci, pravděpodobně vám předchozí zápis připadá poněkud podivný, je však naprosto korektní.

Stále jsme však nevysvětlili, co znamená zápis:

$$\int f(x) dx$$

Rozeberme ho tedy podrobně. Zápis  $dx$  je zkrácený zápis pro  $dg, g(x) = x$ , je to tedy funkce dvou proměnných  $x$  a  $\Delta x$ :

$$dx = dx(x, \Delta x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$$

Vynásobíme-li tento diferenciál funkcí  $f(x)$ , dostaneme:

$$f(x) \cdot dx = f(x) \cdot dx(x, \Delta x) = f(x) \cdot \Delta x$$

<sup>2</sup>Slovo „diskrétní“ je v matematice synonymem pro „nespojité“, „nesouvislé“

<sup>3</sup>Ve skutečnosti by stačilo uvést součet, součin a skládání funkcí, zbylé dvě operace jsou pak speciální případy aplikace těchto tří.

Jak víme z kapitoly 1.6.1, platí:

$$dF(x, \Delta x) = F'(x) \cdot \Delta x$$

Pokud zjišťujeme integrál nějakého diferenciálu, hledáme takovou funkci, jejíž diferenciál je argumentem integrálu. Zapsáno matematicky:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= F(x), && \text{Na obě strany aplikujeme diferenciál (*)} \\ f(x) dx &= dF, && \text{Diferenciál rozepíšeme jako funkci dvou proměnných} \\ f(x) \cdot \Delta x &= F'(x) \cdot \Delta x && \text{Pokrátíme } \Delta x \\ f(x) &= F'(x) \end{aligned}$$

Co tedy dokazuje předešlá série rovností? Dokazuje, že definujeme-li integrál pomocí definice 2.2.3, neznamená zápis

$$\int f(x) dx$$

nic jiného než primitivní funkci k  $f(x)$ . Což je přesně to, co od neurčitého integrálu požadujeme.

*Poznámka.* Diferenciál jsme mohli na obě dvě strany rovnice (\*) aplikovat, jelikož jsme definiční obor diferenciálu zúžili tak, aby to byla prostá funkce, jinak bychom tuto úpravu provést nemohli (museli bychom diskutovat nejednoznačnost konstanty).

Důležitou vlastností integrálu je jeho linearita (integrál je lineární operátor), která plyne přímo z toho, že integrál je inverzním operátorem k diferenciálu, což je také lineární operátor (zamyslete-li se nad tím, co to znamená, že je operátor lineární (je to přímá analogie k lineárním funkcím reálné proměnné), zjistíte, že inverzní operátor k lineárnímu operátoru musí být také lineární):

$$\int (a \cdot df + b \cdot dg) = \int d(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot f + b \cdot g = a \cdot \int df + b \cdot \int dg$$

Slovy řečeno předchozí vzorec vyjadřuje, že integrál součinu konstanty a funkce je součin konstanty a integrálu funkce a integrál součtu (rozdíl) funkcí je součet (rozdíl) integrálů daných funkcí.

## 2.2.2 Metody výpočtu neurčitého integrálu

V předchozí kapitole jsme se seznámili s definicí integrálu. Ta nám však moc nenapoví, jak v praxi integrály počítat. Uveďme na úvod větu o integrálu součtu funkcí a součinu funkce a konstanty (zcela formálně odvozenou již na konci předchozího rigorózního dodatku).

**Věta 2.2.1.** *Nechť  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou integrovatelné funkce,  $c \in \mathbb{R}$ , pak platí:*

$$\begin{aligned} \int c \cdot f(x) dx &= c \cdot \int f(x) dx \\ \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \end{aligned}$$

Formální důkaz můžeme provést tak, že zderivujeme obě strany těchto rovnic (s ohledem na to, že platí  $(f + g)' = f' + g'$  a  $(cf)' = c \cdot f'$ ).

*Poznámka.* Pojmeme „integrovatelné“ ve větě 2.2.1 míníme, že dané funkce mají integrál v Newtonově smyslu. Obecně totiž nemusí mít ani jedna z funkcí integrál, i když jejich součet integrál má (viz příklad v následujícím rigorózním dodatku).

**Příklad 2.2.2.** Spočtěte integrál:

$$\int \frac{x^2 + x \sin(x) + 1}{x} dx$$

**Řešení.** Nejdříve rozepíšeme vnitřek na součet tří členů, ty následně převedeme na součet tří integrálů (jež byste měli umět spočítat, pokud umíte derivovat či znáte z paměti tabulku 2.2):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x \sin(x) + 1}{x} dx &= \int \left(x + \sin(x) + \frac{1}{x}\right) dx = \int x dx + \int \sin(x) dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \cos(x) + \ln(x) + C \end{aligned}$$

(Nezapomeňme připsat konstantu)

### Metoda per partes

Možná nyní očekáváte, že bude následovat věta o integrálu součinu a podílu. Bohužel tomu tak není – taková věta totiž **neexistuje**. Neexistuje žádný obecný způsob jak určit integrál součinu nebo podílu dvou funkcí, známe-li integrály obou činitelů či dělence a dělitele. Existují pouze několik metod, které v dané situaci mohou (ale nemusí) fungovat. Začněme metodou zvanou *integrace per partes* (v překladu *integrace po částech*):

**Věta 2.2.2** (Integrace per partes). *Nechť  $f(x)$  a  $g(x)$  jsou diferencovatelné (tj. derivovatelné) funkce, pak platí:*

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) dx$$

Tato věta je přímým důsledkem věty o derivaci součinu. Platí totiž:

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \\ f(x) \cdot g'(x) &= (f(x) \cdot g(x))' - f'(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

Připíšeme-li k oběma stranám poslední rovnosti integrál, dostaneme větu 2.2.2. Spočtěme nyní několik příkladů, na kterých budeme demonstrovat použití metody per partes.

**Příklad 2.2.3.** Spočtěte integrál funkce  $x \cdot \cos(x)$ .

**Řešení.** Označme  $f(x) = x$ ,  $g'(x) = \cos(x)$ , pak aplikací věty 2.2.2 dostaneme:

$$\int \underbrace{f(x)}_x \cdot \underbrace{g'(x)}_{\cos(x)} dx = \underbrace{f(x)}_x \cdot \underbrace{g(x)}_{\sin(x)} - \int \underbrace{f'(x)}_1 \cdot \underbrace{g(x)}_{\sin(x)} dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C$$

Tento příklad je typickou ukázkou toho, jak se metoda per partes používá – integrujeme-li funkci ve tvaru  $x^n f(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , můžeme zkusit  $n$ -krát použít per partes, jsme-li schopni funkci  $f(x)$   $n$ -krát zintegrovat.

**Příklad 2.2.4.** Spočtěte integrál funkce  $x^2 \cdot \cos(x)$ .

**Řešení.** Označme  $f(x) = x^2$ ,  $g'(x) = \cos(x)$ :

$$\begin{aligned} \int \overbrace{x^2}^f \cdot \overbrace{\cos(x)}^{g'} dx &= \overbrace{x^2}^f \cdot \overbrace{\sin(x)}^g - \int \overbrace{2x}^{f'=u} \cdot \overbrace{\sin(x)}^{g=v'} dx = \\ &= x^2 \cdot \sin(x) - \left( \overbrace{2x}^u \cdot \overbrace{(-\cos(x))}^v - \int \overbrace{2}^{u'} \cdot \overbrace{(-\cos(x))}^v \right) \\ &= x^2 \cdot \sin(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \sin(x) + C \end{aligned}$$

Při výpočtu jsme pouze dvakrát za sebou aplikovali metodu per partes. Poprvé jsme funkce označili  $f$  a  $g'$ , podruhé  $u$  a  $v'$ .

**Příklad 2.2.5.** Spočtete integrál funkce  $x^n \ln(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Řešení.** Řešení je (ač se to možná na první pohled nezdá) velmi jednoduché. Derivace funkce  $\ln x$  je  $1/x$ . Díky tomu je možné docílit toho, aby se po prvním provedení per partes logaritmus „ztratil“. Musíme však chytře zvolit funkce  $f$  a  $g'$ . Pokud bychom je zvolili stejně jako v předchozích příkladech, museli bychom logaritmus integrovat, ale to nechceme. Zvolíme tedy  $f(x) = \ln(x)$ ,  $g'(x) = x^n$ :

$$\begin{aligned} \int \overbrace{x^n}^{g'} \cdot \overbrace{\ln(x)}^f dx &= \overbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}^g \cdot \overbrace{\ln(x)}^f - \int \overbrace{\frac{x^{n+1}}{n+1}}^g \cdot \overbrace{\frac{1}{x}}^{f'} dx = \\ &= \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \ln(x) - \frac{1}{n+1} \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln(x) - \frac{1}{n+1} \right) + C \end{aligned}$$

**Příklad 2.2.6.** Kdybychom v minulém příkladu vzali funkce opačně, potřebovali bychom umět zintegrovat funkci  $\ln(x)$ . Možná jste si všimli, že tato funkce není uvedena v tabulce integrálů. Zkusme ji tedy zintegrovat.

**Řešení.** Zatím jediná metoda, kterou známe, je per partes, zkusme tedy použít ji. Že v daném integrálu není součin dvou funkcí? Ale je, zvolme funkce  $f(x) = \ln(x)$ ,  $g(x) = 1$ :

$$\int \overbrace{1}^{g'} \cdot \overbrace{\ln(x)}^f dx = \overbrace{x}^g \cdot \overbrace{\ln(x)}^f - \int \overbrace{x}^g \cdot \overbrace{\frac{1}{x}}^{f'} dx = x \ln(x) - x + C$$

**Bonbónek k per partes - integrály  $x^k \sin(x)$  a  $x^k \cos(x)$**

Na závěr této sekce si ukážeme takový „bonbónek“ navíc - jak integrovat funkce ve tvaru  $x^n \sin(x)$  a  $x^n \cos(x)$ . Použijme výsledky získané v příkladech 2.2.3 a 2.2.4:

$$\begin{aligned} (x \sin(x) + \cos(x) + C)' &= (x \cos(x) + \sin(x)) - \sin(x) + 0 = x \cos(x) \\ (x^2 \sin(x) + 2x \cos(x) - 2 \sin(x) + C)' &= (x^2 \cos(x) + 2x \sin(x)) + \\ &\quad + (2x(-\sin(x)) + 2 \cos(x)) - 2 \cos(x) + 0 \\ &= x^2 \cos(x) \end{aligned}$$

Všimli jste si, jakým způsobem se členy, které ve výsledku „nemají být“, ruší? Daný člen ve tvaru  $x^k \sin(x)$  (resp.  $\cos(x)$ ) zderivujeme, což nám dá  $x^k \cos(x) + kx^{k-1} \sin(x)$ . Chceme-li vyrušit druhý člen, musí v původní funkci následovat člen, který nám po derivaci vyhodí  $-kx^{k-1} \sin(x)$ . Tímto členem je  $kx^{k-1} \cos(x)$ . Ten nám však po derivaci nechá člen  $k(k-1)x^{k-2} \cos(x)$ . Chceme-li ho vyrušit, musí v původní funkci následovat člen  $-k(k-1)x^{k-2} \sin(x)$ ... Takto postupujeme do té doby, než se všechny nadbytečné členy vyruší. Tento fakt je možné shrnout takto:

**Pozorování.** Integrál funkce  $x^k \cos(x)$  můžeme zapsat v tomto tvaru:

$$\int x^k \cos(x) dx = x^k \sin(x) + kx^{k-1} \cos(x) - k(k-1)x^{k-2} \sin(x) - k(k-1)(k-2)x^{k-3} \cos(x) + k(k-1)(k-2)(k-3)x^{k-4} \sin(x) + \dots + 0$$

Začneme tedy členem  $x^k \sin(x)$ ,  $n$ -tý člen obsahuje na prvním místě  $(n-1)$ -ní derivaci  $x^k$ , funkce sinus a cosinus se pravidelně střídají a pokud přecházíme „z cosinu do sinu“, změním znaménko.

Pro funkci  $x^k \sin(x)$  je výsledek naprosto analogický, pouze prvním členem výsledného integrálu je  $-x^k \cos(x)$  a znaménko se tedy mění hned u druhého členu (druhým členem je  $kx^{k-1} \sin(x)$ ).

Osvětleme tento postup na několika konkrétních případech:

$$\begin{aligned} \int x^3 \cos(x) dx &= x^3 \sin(x) + 3x^2 \cos(x) - 6x \sin(x) - 6 \cos(x) + C \\ \int x^3 \sin(x) dx &= -x^3 \cos(x) + 3x^2 \sin(x) + 6x \cos(x) - 6 \sin(x) + C \\ \int x^4 \cos(x) dx &= x^4 \sin(x) + 4x^3 \cos(x) - 12x^2 \sin(x) - 24x \cos(x) + 24 \sin x + C \\ \int x^4 \sin(x) dx &= -x^4 \cos(x) + 4x^3 \sin(x) + 12x^2 \cos(x) - 24x \sin(x) - 24 \cos x + C \end{aligned}$$

### Metoda „vyjádření integrálu“, přičtení nuly

Další metodu, kterou si ukážeme, je možné použít v kombinaci s per partes, využijeme-li nějaké vlastnosti funkcí, se kterými počítáme. Princip metody objasňuje následující

**Věta 2.2.3.** *Podáří-li se postupnými ekvivalentními úpravami získat rovnici:*

$$\int f(x) dx = \dots = g(x) - \int f(x) dx$$

pak hledaný integrál je roven:

$$\int f(x) dx = \frac{g(x)}{2} + C$$

Obecněji - podaří-li se nám získat rovnici

$$\int f(x) dx = \dots = g(x) + p \int f(x) dx, \quad p \neq 1$$

hledaný integrál je roven

$$\int f(x) dx = \frac{g(x)}{1-p} + C$$

Ve skutečnosti neděláme nic jiného, než to, že integrál převedeme na druhou stranu „vyjádříme“ ho pomocí strany pravé. Předvedme si to na konkrétním příkladu:

**Příklad 2.2.7.** Spočtete integrál  $\int \sin^2(x) dx$ .

**Řešení.** Nejdříve si  $\sin^2(x)$  napíšeme jako  $\sin(x)\sin(x)$  a spočteme pomocí per partes (nyní skutečně nezáleží na tom, který sinus budeme integrovat a který derivovat). Posléze vyjádříme  $\cos^2(x)$  jako  $1 - \sin^2(x)$ :

$$\begin{aligned} \int \sin^2(x) dx &= -\cos(x)\sin(x) - \int (-\cos(x)\cos(x)) dx = -\cos(x)\sin(x) + \int \cos^2(x) dx = \\ &= -\cos(x)\sin(x) + \int (1 - \sin^2(x)) dx = -\cos(x)\sin(x) + x - \int (\sin^2(x)) dx \end{aligned}$$

Převedeme-li nyní integrál na pravé straně na levou stranu rovnice a vydělíme dvěma, najdeme řešení:

$$\int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin(x)\cos(x)) + C$$

Další metoda, kterou si ukážeme, je „přičtení nuly“, neboli přičtení výrazu  $1 - 1$ , či nějakého podobného výrazu. Tuto metodu si ukážeme na jednom integrálu, který se v různých výpočtech vyskytuje poměrně často (a proto, aby toho nebylo málo, ho v další kapitole spočítáme také substitucí):

**Příklad 2.2.8.** Spočtete integrál  $\int \sqrt{1-x^2} dx$ .

**Řešení.** Jak již bylo řečeno, tento příklad demonstruje použití metody nazvané „přičtení nuly“. Spočtete nejdříve daný integrál pomocí per partes (integrujeme jedničku, derivujeme danou funkci):

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (2.3)$$

Všimněte si znaménka mínus před  $x^2$  – vzniklo derivací  $\sqrt{1-x^2}$ . Úmyslně jsme toto mínus nevytkli před integrál – uděláme totiž jednu kouzelnou úpravu – přičteme k čitateli v posledním integrálu výraz  $1 - 1$ :

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int \frac{(\sqrt{1-x^2})^2}{\sqrt{1-x^2}} dx - \arcsin(x) = \int \sqrt{1-x^2} dx - \arcsin(x) \end{aligned}$$

Nyní tento výsledek dosadíme do rovnice 2.3

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx &= x\sqrt{1-x^2} - \left( \int \sqrt{1-x^2} dx - \arcsin(x) \right) = x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) + \\ &\quad - \int \sqrt{1-x^2} dx \end{aligned}$$

Převedeme-li nyní integrál na levou stranu a vydělíme dvěma, dostaneme:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \left( x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x) \right)$$

Jak vidíte, metody výpočtu integrálů se na sebe postupně „nabalují“. Čím více jich znáte, tím větší šanci máte, že se vám povede integrál spočítat. Zatím jsme však nevyložili jednu z nejdůležitějších metod vůbec, přesuňme se tedy směle do další kapitoly.

### Substituční metoda

S pojmem substituce je čtenář jistě dobře obeznámen. Běžné substituce, se kterými přijde středoškolák do styku, většinou slouží pouze ke zvýšení přehlednosti zápisu. U integrálů však substituce mají zásadní význam - je jimi možné převést jeden integrál na jiný (obvykle jednodušší, ale není to pravidlem). Jelikož naším cílem při integrování je upravovat integrál tak dlouho, než ho rozložíme na integrály, které umíme „uhádnout“, je možnost, že umíme převést integrál z jednoho tvaru na jiný, pro nás zásadní. Začněme tedy větami o substituci v neurčitém integrálu. Pravděpodobně se vám budou zdát poněkud abstraktní a nesrozumitelné, vše však bude vysvětleno v následujících příkladech.

**Věta 2.2.4** (První substituční metoda). *Nechť  $f$  má primitivní funkci na nějakém intervalu  $J$  a  $\phi : I \rightarrow J$  zobrazuje interval  $I$  do intervalu  $J$  a má všude na  $I$  derivaci. Označme  $t = \phi(x)$ . Pak platí:*

$$\int f(\phi(x))\phi'(x) dx = \int f(t) dt \quad (2.4)$$

To je logické, uvědomíme-li si, že  $t$  je funkce proměnné  $x$  a platí:

$$\frac{dt}{dx} = \phi'(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{\phi'(x)}$$

Formálním dosazením do levé strany rovnice 2.4 za  $\phi(x)$  a  $dx$  dostaneme pravou stranu rovnice 2.4. Přínos této substituce spočívá v tom, že integrál na pravé straně můžeme spočítat, aniž by bylo nutné uvažovat, co proměnná  $t$  vyjadřuje, jednoduše podle ní integrujeme. Do výsledku pak pouze dosadíme  $t = \phi(x)$ . Jediné, čeho je nutné si všimnout, je fakt, že  $\phi(x)$  nemusí být na, tedy nemusí „využít“ celý interval  $J$ . Integrál na pravé straně rovnice 2.4 totiž pak nemusíme řešit pro celé  $J$  (obvykle to znamená např. pro celá reálná čísla), ale pouze pro nějaký jeho podinterval, čímž se může výpočet zjednodušit.

Zamysleme se nyní nad čistě formálním procesem integrace substitucí. Co se po substituci změní?  $dx$  přejde v  $dt$ , celou integrovanou funkci vydělíme  $\phi'(x) = t'(x)$  a  $x$  musí zmizet, tj. musíme všechny výrazy obsahující  $x$  vyjádřit pomocí  $t$  (jinak by nebylo možné dále integrovat, protože zůstavší  $x$  závisí na  $t$ , nemůžeme ho tedy brát jako konstantu a substituce by ničemu nepomohla).

**Příklad 2.2.9.** Spočtete integrál funkce  $xe^{x^2}$  použitím substituce  $t = x^2$ .

**Řešení.** Provedeme nyní všechny kroky popsané v předchozím odstavci.  $\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x}$ . Dosadíme do daného integrálu:

$$\int xe^{x^2} dx = \int xe^t \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

Zderivováním výsledku se můžeme přesvědčit, že zadaný postup je správný. Při tomto derivování si možná uvědomíte, že substituční metoda je „opačný“ postup k derivování složené funkce.

V předchozím příkladu bylo přímo uvedeno, jakou substituci máme použít. Při řešení příkladů vám však nikdo neřekne, jaká substituce je nejlepší, musíte na to přijít sami. Neexistuje žádný obecný postup, který by říkal, jakou substituci použít. Jediné, co při volbě substituce pomáhá, je zkušenost. Zkusme však alespoň neformálně naznačit, jak substituci hledat.

Sestává-li integrovaná funkce ze součinu dvou různých funkcí, je nasnadě použití substituce  $t(x)$  jejíž derivace je jedna z těchto dvou funkcí (po provedení substituce tato funkce totiž zmizí). Je dobré si pamatovat, že derivací některých funkcí získáme funkce, kde se nějakou běžnou funkcí proměnné  $x$  dělí, nikoliv násobí, takovou funkcí je např.  $\ln x$ , či  $\operatorname{tg} x$ . Někdy je také nutné celý zlomek rozšířit zlomkem o hodnotě jedna a provést další úpravy, než je možné substituci použít. Demonstrujme tyto postupy na příkladech:

**Příklad 2.2.10.** Spočtete integrál funkce  $\frac{2x}{x^2+1}$ .

**Řešení.** Pravděpodobně první, co vás napadne, je: „V čitateli máme derivaci  $x^2$ , zvolíme tedy substituci  $t = x^2$ “. Tím se však nezabavíme jedničky ve jmenovateli. Můžeme však zvolit substituci jinou, a to  $t = x^2 + 1$ . Derivace stále zůstane  $2x$  (derivace konstanty je nula), ve jmenovateli nám však zůstane pouze  $t$ :

$$\int \frac{2x}{x^2+1} dx \Big|_{t=x^2+1} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |x^2+1| + C$$

*Poznámka.* Symbolem  $\int \dots dx \Big|_{t=f(x)}$  označujeme, že používáme substituci  $t = f(x)$  a že v dalším výpočtu budeme po vyřešení integrálu za  $t$  dosazovat  $f(x)$ . V literatuře bývá někdy zvykem nepsat substituci tímto způsobem za první integrál, ale za všechny následující. My budeme používat toto značení, jelikož je kratší a přehlednější.

**Příklad 2.2.11.** Spočtete integrál funkce  $x^2 \sin(x^3)$ .

**Řešení.** Uvědomme si, že derivací funkce  $x^3$  získáme funkci  $x^2$  násobenou konstantou. Zvolme tedy substituci  $t = x^3$ .

$$\int x^2 \sin(x^3) dx \Big|_{t=x^3} = \int \frac{1}{3} \sin(t) dt = -\frac{1}{3} \cos(t) + C = -\frac{1}{3} \cos(x^3) + C$$

**Příklad 2.2.12.** Spočtete integrál funkce  $\operatorname{tg}(x)$ .

**Řešení.** Rozepíšeme-li si tangens jako podíl sinu a cosinu, je ihned zřejmé, že v čitateli se nachází mínus derivace jmenovatele:

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx \Big|_{t=\cos} = - \int \frac{1}{t} dt = -\ln |t| + C = -\ln |\cos(t)|$$

Uveďme nyní obecný návod, jak počítat integrály s lineárními členy  $ax+b$ ,  $a \neq 0$ . Derivace lineární funkce je funkce konstantní, substituci  $t = ax+b$  je tedy možné použít vždy (výhodné je to samozřejmě pouze ve chvíli, kdy se v integrálu vyskytuje člen ve tvaru  $ax+b$ , jinak se integrál substitucí spíše zesložití). Označme  $F$  funkci primitivní k  $f$ . Pak platí:

$$\int f(ax+b) dx \Big|_{t=ax+b} = \frac{1}{a} \int f(t) dt = \frac{1}{a} F(t) + C = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

demonstrujme použití lineární substituce na příkladu:

**Příklad 2.2.13.** Spočtete integrál funkce  $\frac{1}{2x+3}$ .

**Řešení.** Zavedeme lineární substituci  $t = 2x + 3$  (Neboli  $dt = 2dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{2}$ ). Pak:

$$\int \frac{1}{2x+3} dx \Big|_{t=2x+3} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |2x+3| + C$$

Lineární substituce je nejjednodušší typ substituce a s trochou praxe se ji naučíte používat naprosto intuitivně z paměti, bez jakéhokoliv rozepisování pomocí dalších symbolů. Podívejme se nyní na trochu záludnější substituce:

**Příklad 2.2.14.** Spočtete integrál funkce  $\frac{1}{\cos(x)}$ .

**Řešení.** Na první pohled není zřejmá žádná substituce. Rozšířme však daný zlomek vhodným zlomkem o hodnotě 1:

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \int \frac{1}{\cos(x)} \frac{\cos(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} dx = \int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx$$

Nyní je substituce nasnadě. Provedeme substituci  $t = \sin(x)$ , výsledkem bude tabulkový integrál.

$$\int \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} dx \Big|_{t=\sin(x)} = \int \frac{1}{1 - t^2} dt = \operatorname{argtgh}(t) + C = \operatorname{argtgh}(\sin(x)) + C$$

**Příklad 2.2.15.** Spočtete integrál funkce  $\cos^3(x)$ .

**Řešení.** Tento příklad na první pohled také nevypadá jako příklad na substituci. Funkci  $\cos^3(x)$  si však můžeme napsat jako  $\cos^2(x) \cos(x) = (1 - \sin^2(x)) \cos(x)$ :

$$\begin{aligned} \int \cos^3(x) dx &= \int (1 - \sin^2(x)) \cos(x) dx \Big|_{t=\sin(x)} = \int (1 - t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} + C \\ &= \sin(x) - \frac{1}{3} \sin^3(x) + C \end{aligned}$$

**Příklad 2.2.16.** Spočtete integrál funkce  $\frac{\ln(x)}{x}$ .

**Řešení.** Je nutné si uvědomit, že po zavedení substituce  $t = \ln(x)$  budeme integrovanou funkci dělit funkcí  $\frac{1}{x}$ . Můžeme tedy tuto substituci bez problému použít:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx \Big|_{t=\ln(x)} = \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2} \ln^2 |x| + C$$

Doted' jsme používali substituci, ve které jsme zavedli nějakou novou funkci proměnné  $x$ . Lze však zvolit o postup opačný, tj. substituci, kde za  $x$  dosazujeme nějakou funkci jiné proměnné. Shrňme to v následující větě:

**Věta 2.2.5** (Druhá substituční metoda). *Nechť  $\phi : I \rightarrow J$  je spojitá a prostá funkce a má na svém definičním oboru nenulovou derivaci a  $f$  je funkce integrovatelná na  $J$ . Pak (dosadíme-li  $x = \phi(t)$ ) platí:*

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt \Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

Kde  $\phi^{-1}(x)$  značí funkci inverzní k  $\phi(x)$ . Označíme-li  $F(x)$  funkci primitivní k  $f(x)$  a  $G(x)$  funkci primitivní k  $f(\phi(x)) \phi'(x)$ , můžeme předchozí rovnost přepsat takto:

$$F(x) = G(\phi^{-1}(x))$$

**Důkaz.** Důkaz této věty je jednoduchý, provedme ho tedy. Funkce  $\phi(t)$  je prostá, tedy k ní existuje inverzní funkce  $\phi^{-1}(t)$ . Derivace  $\phi'(t)$  je nenulová, podle věty 1.5.3 tedy platí:  $(\phi^{-1}(t))' = \frac{1}{\phi'(\phi(t))}$ , tedy:

$$(G(\phi^{-1}(x)))' = G'(\phi^{-1}(x)) (\phi^{-1}(x))' = G'(t) \frac{1}{\phi'(t)} = f(\phi(t)) \phi'(t) \frac{1}{\phi'(t)} = f(\phi(t)) = f(x)$$

Q.E.D.

V tomto formálním zápise pro vás pravděpodobně věta 2.2.5 bude poněkud abstraktní. Zkusme si více přiblížit, co vlastně říká. Formálně tuto větu získáme dosazením  $x = \phi(t)$ , jelikož pak platí  $dx = \phi'(t)dt$ . To, aby funkce  $\phi$  byla prostá, požadujeme proto, aby k ní existovala inverzní funkce. Pak tedy zjevně platí  $x = \phi(t) \Rightarrow t = \phi^{-1}(x)$ . Zintegrujeme-li tedy funkci  $f(\phi(t))\phi'(t)$  a posléze do výsledku dosadíme  $t = \phi^{-1}(x)$ , získáme tím hledaný integrál. Demonstrujme to na příkladech:

**Příklad 2.2.17.** Spočítejte integrál funkce  $xe^{x^2}$ .

**Řešení.** Pozorný čtenář si jistě všimne, že tento integrál jsme spočítali již v příkladu 2.2.9 jako ukázkou použití první substituční metody. Nyní ho tedy zkusíme počítat substitucí opačnou. V příkladu 2.2.9 jsme zavedli substituci  $t = x^2$ , zaveďme nyní tedy substituci  $x = \sqrt{t}$ , která musí zákonitě fungovat také (ovšem pouze pro  $x > 0$ ). Platí:  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \Rightarrow dx = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$ . Z toho plyne:

$$\int xe^{x^2} dx \Big|_{x=\sqrt{t}} = \int \sqrt{t}e^{(\sqrt{t})^2} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

V posledním kroku jsme pouze využili toho, že platí  $\sqrt{t} = x \Rightarrow t = x^2$ . Musíme však mít na paměti, že tímto postupem jsme nezískali obecné řešení, ale pouze řešení na intervalu  $\langle 0, \infty \rangle$ , kdybychom chtěli získat obecné řešení, museli bychom použít také substituci  $x = -\sqrt{t}$  a pak obě řešení „slepit“. Shodou okolností však oba integrály v tomto případě dají stejný výsledek, obecně to však neplatí, proto je nutné hlídat interval, na němž řešení provádíme. Mimo jiné to ukazuje na to, proč je v tomto konkrétním případě lepší použít první substituční metodu, tou získáme obecné řešení rovnou.

*Poznámka.* Stejným způsobem, jako jsme zavedli označení  $\int \dots dx \Big|_{t=f(x)}$  pro první substituční metodu, zavádíme označení  $\int \dots dx \Big|_{x=\phi(t)}$  pro druhou substituční metodu.

**Příklad 2.2.18.** Spočítejte integrál funkce  $\sqrt{1-x^2}$ .

**Řešení.** Jak bylo slíbeno již v příkladu 2.2.8, kde byl tento integrál spočítán metodou per partes, spočteme ho nyní substitucí. Spočteme ho substitucí, která nám umožní zbavit se odmocniny - touto substitucí je goniometrická substituce  $x = \sin(t)$  nebo  $x = \cos(t)$ . Zvolme druhou substituci  $x = \cos(t)$ . Musíme si uvědomit, že věta 2.2.5 požaduje, aby funkce, kterou dosazujeme, byla prostá. To však  $\cos(t)$  není, „zužme“ tedy  $\cos$  tím způsobem, že za jeho definiční obor zvolíme interval  $\langle 0, \pi \rangle$ . Na tomto intervalu je funkce  $\cos$  prostá a nabývá hodnot  $-1$  až  $1$ , což přesně vyhovuje zadání úlohy (aby měla odmocnina smysl, musí být  $x \in (-1, 1)$ ). Pusťme se tedy konečně do integrace:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-x^2} dx \Big|_{x=\cos(t)} &= \int \sqrt{1-\cos^2(t)} (-\sin(t)) dt = - \int \sqrt{\sin^2(t)} \sin(t) dt = \\ &= - \int |\sin(t)| \sin(t) dt \end{aligned}$$

Poslední integrál je poněkud ošklivý. Není neřešitelný, ale jeho řešení je poměrně náročné. Uvědomíme-li si však, že daný integrál řešíme na intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ , můžeme využít fakt, že  $\sin(t)$  je na celém tomto intervalu nezáporný, tedy platí  $|\sin(t)| = \sin(t)$ . Tím se nám integrál zredukuje na  $-\int \sin^2(t) dt$ . Tento integrál jsme již však vyřešili v příkladu 2.2.7:

$$-\int \sin^2(t) dt = -\frac{1}{2}(t - \sin(t) \cos(t)) + C = \frac{1}{2}(\sqrt{1 - \cos^2(t)} \cos(t) - t) + C$$

Nyní za  $t$  dosadíme  $\arccos(x)$ :

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1 - \cos^2(t)} \cos(t) - t) + C = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} - \arccos(x)) + C$$

Což je hledaný výsledek.

### 2.2.3 Rigorózní dodatek

Jak bylo slíbeno, zde bude uveden příklad funkcí, z nichž ani jedna není integrovatelná, ale jejich součet již je. Zamysleme se nyní nad problémem obecněji. Máme-li funkci  $f(x)$ , o které víme, že není integrovatelná v Newtonově smyslu, a funkci  $g(x)$ , o které víme, že je integrovatelná v Newtonově smyslu, pak zcela určitě není integrovatelná ani funkce  $g(x) - f(x)$ , jelikož jelikož by pro jejich integrál muselo platit (z linearitativy operátoru integrálu):  $\int (g(x) - f(x)) dx = \int g(x) dx - \int f(x) dx$ ,  $f(x)$  však integrovatelná není, tedy není integrovatelná ani původní funkce. Součet těchto dvou funkcí, tj.  $f(x) + (g(x) - f(x)) = g(x)$  již však integrovatelná funkce je. Stačí nám tedy ukázat, že existuje nějaká funkce  $f(x)$ , která není integrovatelná v Newtonově smyslu. Zdůrazněme, že upřesnění „v Newtonově smyslu“ je nutné, jelikož existuje několik zobecnění pojmu integrálu a v tzv. Lebesgueově (čti Lebegově) smyslu (o němž se ještě zmíníme v některém z dalších rigorózních dodatků) je již integrovatelná i funkce, kterou zde uvedeme jako příklad.

Definujme funkci  $D(x)$  takto:

$$D(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \text{ racionální} \\ 0 & \text{pro } x \text{ iracionální} \end{cases}$$

Tato funkce se nazývá Dirichletova funkce a z hlediska svých vlastností ji můžeme označit za příšeru. Je všude definována, ale nemá nikde derivaci, jelikož pro každé  $\varepsilon > 0$  leží v  $\varepsilon$ -ovém okolí bodu každého bodu nekonečně mnoho bodů, kde má funkce hodnotu 0 a nekonečně mnoho bodů, kde má hodnotu 1. (Tedy v žádném případě nemůže existovat limita, kterou je definována derivace. Ba dokonce tato funkce není ani nikde spojitá.) K této funkci však neexistuje ani primitivní funkce. Kdyby existovala, muselo by pro ni platit (označme ji  $F$ ):  $F'(x) = D(x)$ . Byla-li by někde tato derivace definována v nějakém bodě  $x_0$ , mohla by se v diferenciálně malém okolí bodu  $x_0$  změnit jen diferenciálně málo (to je přímo definice derivace limitou), což je však spor s tím, že  $D(x)$  má v tomto okolí nekonečně mnoho bodů s hodnotou 0 a nekonečně mnoho s hodnotou 1.

### 2.2.4 Pokročilé metody výpočtu neurčitých integrálů

V tomto oddíle pohovoříme o některých metodách výpočtu neurčitých integrálů, které patří k běžně používaným, přesahují však již rámec středoškolského výkladu. Čtenář, jenž chce získat pouze přehled ve středoškolském učivu, může tento oddíl s klidným svědomím přeskocit, znalosti zde získané nebudeme nikde dále přímo požadovat. Pokud však chcete získat určitý přehled o metodách, které se ve výpočtech běžně používají, vřele vám doporučuji si tuto kapitolu nastudovat.

**Tato kapitola bude doplněna později.**

# Literatura

- [KI] *Kopáček, J.:* **Matematická analýza nejen pro fyziky I.**  
Matfyzpress, Praha 2004
- [KII] *Kopáček, J.:* **Matematická analýza pro fyziky II.**  
Matfyzpress, Praha 2003
- [KIII] *Kopáček, J.:* **Matematická analýza pro fyziky III.**  
Matfyzpress, Praha 2002